اندیشهٔ برتر

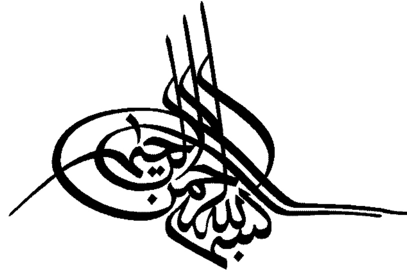
مجموعهٔ کامل، جامع و ماندگار

ریاضیات

هدیه ای نو به کلیهٔ
دانش آموزان رشته های
ریاضی، تجربی، انسانی
سال های اول، دوم،
سوم، پیش دانشگاهی،
تیزهوشان، دانشجویان،
دبیران و همکاران محترم

اندیشه ای طلایی برای
داوطلبان کنکور

مؤلف: احمد علی دارائی



اندیشهٔ برتر

(مجموعهٔ کامل، جامع و ماندگار ریاضیات)

مؤلف:

احمد علی دارائی

مقدمهٔ مؤلف:

بـه نـام خـداونـد جـان و خـرد کـــزین بـرتر انـدیشه بـرنگذرد

لوکا پاچیولو می‌گوید کسی که کاری نمی‌کند، اشتباه نمی‌کند و کسی که اشتباه نمی‌کند، چیزی فرا نمی‌گیرد.

آنچه را در این کتاب می‌خوانید، گوشه‌ای از تجربه، تعلیم، مطالعه و تدریس من در علم ریاضی است این کتاب می‌توانـد، هدیه‌ای خوب و به یاد ماندنی به یک فرزند، دوست، برادر، خواهر، معلم و ... باشد. از اینکه همه‌ی آنچه را که در ایـنجا می‌خوانید در همان لحظات اول برایتان روشن و قابل فهم نیست، نگران نشوید، نیروی ذهنی آدمیان یک جور نیست، بعضیها مطالب تازه را زود و راحت و غالباً سطحی یاد می‌گیرند، در حالیکه برخی دیگر، هر چیز تازه‌ای را به کندی، ولی عمیق فرا می‌گیرند.

عزیزان، سعی کنید پیش از آنکه راه حل داده شده‌ی کتاب را بخوانید خود به حل آن بپردازید و در صورتی که موفق نشدید، توضیح کتاب را ببینید و پس از آن که راه حل مسأله را در کتاب دیدید، تلاش کنید خودتان هم روشی برای حل آن بیابید.

برای خواندن کتابهای ریاضی، باید قلم در دست گرفت و بهترین نتیجه را به دست آورد، ویژگی ریاضیات در این است که هر موضوع تازه‌ی آن متکّی بر موضوعات قبلی است، به همین علّت، اغلب باید به موضوعات قبلی برگشت و دوباره آنها را تکرار کرد.

اسحق نیوتن، که یکی از پایه گزاران علم حساب دیـفرانسـیل و انـتگرال مـی‌باشد و بسـیاری از دانشـمندان وی را صـاحب بزرگترین فکری دانسته‌اند که تا امروز در نژاد بشری وجود داشته است، چنین می‌گوید: «من نمی‌دانم به چه صورتی، ممکن است در نظر جهانیان جلوه‌گر شوم، اما به نظر خودم چنین می‌آید که همچون کودکی خردسال هستم که در ساحل دریا به بازی مشغولم و گاه و بی‌گاه، سنگریزه‌ای صافتر از سنگهای دیگر یا صدفی زیباتر از صدفهای دیگر پیدا می‌کنم، در حالیکه اقیانوس عظیم حقیقت در مقابل من گسترده است و مرا بر آن آگاهی نیست.»

کتاب حاضر هم یکی از آن سنگریزه هاست، با آنکه جوابگوی بسیاری از مسائل نیز هست.

در اینجا لازم می‌دانم، نکاتی را به طور کلی در رابطه با این کتاب به شما گرامیان عرض کنم.

۱ـ اولین قدم برای مطالعهٔ خوب و مؤثر، داشتن برنامه‌ی مطالعاتی است.

۲ـ برنامه‌ی مطالعه را سر ساعت مشخص و معین شروع کرده و به هیچ وجه از آن صرف نظر نکنید.

۳ـ خودتان را به مطالعه کردن عادت دهید و برای مطالعه‌ی هر درس، وقت کافی در نظر بگیرید.

۴ـ هر جلسه‌ی مطالعه را به چند قسمت نموده، در بین آنها، دقایقی استراحت کنید و در بین مطالعه‌ی دو درس متشابه، درس دیگری مطالعه کنید.

۵ـ بهتر است زمان مطالعه را به چند زمان ۴۵ تا ۶۰ دقیقه‌ای تقسیم کرده و بعد از هر ۴۵ تا ۶۰ دقیقه مطالعه، ۱۰ تا ۱۵ دقیقه استراحت کنید.

۶ـ وقتی که خسته و کسل هستید و یا پس از صرف غذای سنگین، مطالعه نکنید و در هنگام مطالعه به چیزی غیر از درس، فکر نکنید.

۷ـ هنگامی که نگران هستید، اول نگرانی خود را برطرف نمائید، سپس به مطالعه بپردازید.

۸ـ در زمان مطالعه، حتی الامکان از میز و صندلی استفاده کنید و عکس و اشیاء مورد علاقه‌ی خود را از روی میز دور کنید.

۹ـ در شرایطی مطالعه کنید که هوا در اتاق شما جریان داشته باشد، ضمناً هوای اتاق نه خیلی گرم باشد و نه خیلی سرد.

۱۰ـ در هنگام مطالعه، دفتری برای یادداشت کردن سؤالات، ابهامات و نکاتی که به ذهنتان می‌رسد، داشته باشید.

۱۱ـ در زمان مطالعه، زیر مطالب مهم خط بکشید و بعد از مطالعه‌ی هر بخش، فکر کنید موضوعی را که مطالعه کردید، با موضوعات قبلی چه ارتباطی دارد.

۱۲ـ کتاب مشتمل بر ۱۸ فصل است، پس از خواندن درس هر فصل، تست آن فصل را بزنید.

۱۳ـ بسیاری از دانش پژوهان پیش‌دانشگاهی، نگران ریاضی پایه‌ی خویش می‌باشند، این کتاب نگرانی آنها را در این مورد برطرف می‌سازد، چرا که مطالب پایه نیز به طول کامل، به همراه کلیهٔ نکات و همچنین تست آورده شده است.

۱۴ـ کتاب به گونه‌ای تألیف شده که قابل استفاده‌ی کلیه‌ی دانش‌آموزان سالهای اول، دوم، سوم و پیش‌دانشگاهی بوده و کلیه‌ی رشته‌ها اعم از ریاضی، تجربی، انسانی و فنی و حرفه‌ای می‌توانند از آن استفاده کنند.

۱۵ـ این کتاب به زمان و مکان بستگی نداشته و لذا هر گونه تغییری در کتب درسی، از ارزش آن نمی‌کاهد.

۱۶ـ در هر تست یک گزینه درست و سه گزینه‌ی دیگر، نادرست‌اند، در پاسخنامهٔ تشریحی فقط دلیل درستی گزینه‌ی درست آمده است (به جز موارد استثناء)، بنابراین سعی کنید دلیل نادرستی سه گزینه‌ی دیگر را در یابید.

۱۷ـ تستها ۱۰ تا ۱۰ تا به همراه پاسخ تشریحی آورده شده‌اند، به عزیزان توصیه می‌شود که هر ۱۰ تست را در ۱۵ دقیقه حل کنند و هر بار برای خود درصد بگیرند، چون به هنگام کنکور دوباره که این تستها را تمرین می‌کنیم می‌خواهیم بدانیم درصد قبلی ما با درصد جدید چقدر تفاوت داشته است، ضمناً نحوه‌ی درصدگیری، در فرمول زیر آمده است.

$$\frac{\text{تعداد درست} \times ۳ - \text{تعداد غلط}}{\text{تعداد کل} \times ۳} \times ۱۰۰$$

۱) ۸۰٪ به بالا ⟵ عالی

۲) ۵۰٪ به بالا ⟵ خوب

۳) ۳۰٪ به بالا ⟵ متوسط

۴) ۳۰٪ به پائین ⟵ ضعیف

هرگاه درصد از خوب به پائین را کسب کردید، دوباره فصل را مرور کرده و مجدداً درصدگیری نمائید و درصد جدید را برای خودتان ثبت کنید.

۱۸ـ پس از حل تستهای این کتاب، که به صورت طبقه‌بندی شده هستند، لازم است که حتماً تستهای کنکور سراسری و آزاد سالهای گذشته را حل نموده و در مورد آنها نیز مسأله‌ی درصدگیری را انجام داده و سعی کنید زمان تست زدن را به حداقل برسانید.

به یاد داشته باشید که خواستن سرآغاز توانستن است.

در پایان لازم می‌دانم از جناب آقای مهندس نصیرنیا مسئول محترم خدمات نشر کامپیوتری نوآور که مسئولیت تایپ و حروفچینی دقیق این کتاب را برعهده داشتند، صمیمانه سپاسگزاری نمایم، ضمناً مراتب سپاس و امتنان خود را به مدیریت محترم انتشارات عابد جناب آقای کفاش ابراز می‌دارم.

واضح است که این کتاب با تمام دقت و توجهی که در زمان تألیف، تایپ، حروفچینی و غلط‌گیری به عمل آمده است خالی از نقص نیست، لذا از کلیه‌ی عزیزانی که این کتاب را مطالعه می‌فرمایند از صمیم قلب تقاضا دارم اگر به معایبی برخورد می‌کنند، بادیده‌ی اغماض، مطالب را ارزیابی نموده، بر من منت گذاشته و از طریق ناشر و یا تلفن همراه ۰۹۱۲۲۴۰۷۳۵۸۲، مرا از راهنمائیها و انتقادات سازنده‌ی خود بی‌نصیب نفرمایند.

احمدعلی دارائی

آبان ماه ۸۲

تقدیم به همه کسانی که می‌دانند دوستشان دارم

فهرست مطالب

فصل اول

اتحادهاو دو جمله‌ای نیوتن

«بهترین دانش آن است که ترا به رستگاری برساند.» «حضرت محمد ص»

۱) $\begin{cases} a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab \\ a^۴+b^۴=(a^۲+b^۲)^۲-۲a^۲b^۲ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} a^۳+b^۳=(a+b)^۳-۳ab(a+b) \\ a^۶+b^۶=(a^۲+b^۲)^۳-۳a^۲b^۲(a^۲+b^۲) \end{cases}$

۳) $\begin{cases} a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲) \\ a^n-b^n=(a-b)(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+\dots+ab^{n-۲}+b^{n-۱}) \\ x^۳-۱=(x-۱)(x^۲+x+۱) \\ x^۴-۱=(x-۱)(x^۳+x^۲+x+۱) \\ \vdots \\ x^n-۱=(x-۱)(x^{n-۱}+x^{n-۲}+\dots x+۱) \end{cases}$

۴) $\begin{cases} a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲) \\ a^۵+b^۵=(a+b)(a^۴-a^۳b+a^۲b^۲-ab^۳+b^۴) \\ \vdots \\ a^n+b^n=(a+b)(a^{n-۱}-a^{n-۲}b+\dots-ab^{n-۲}+b^{n-۱}) \ (\text{فرد } n) \\ x^۳+۱=(x+۱)(x^۲-x+۱) \\ x^۵+۱=(x+۱)(x^۴-x^۳+x^۲-x+۱) \\ \vdots \\ x^n+۱=(x+۱)(x^{n-۱}-x^{n-۲}+\dots+x^۲-x+۱) \end{cases}$

۵) $\begin{cases} (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b \quad , \quad (\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})(\sqrt{n+۱}+\sqrt{n})=۱ \\ (\sqrt[۳]{a}-\sqrt[۳]{b})(\sqrt[۳]{a^۲}+\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲})=a-b \\ (\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt[۳]{a^۲}-\sqrt[۳]{ab}+\sqrt[۳]{b^۲})=a+b \end{cases}$

۶) $\begin{cases} (ax+by)^۲+(bx-ay)^۲=(a^۲+b^۲)(x^۲+y^۲) \\ x^۴+x^۲y^۲+y^۴=(x^۲+xy+y^۲)(x^۲-xy+y^۲) \\ x^۴+۴y^۴=(x^۲+۲xy+۲y^۲)(x^۲-۲xy+۲y^۲) \end{cases}$

۷)
$$\begin{cases}(a+b+c)^۳ = a^۳+b^۳+c^۳+۳a^۲b+۳a^۲c+۳b^۲a+۳b^۲c+۳c^۲a+۳c^۲b+۶abc\\ (a+b+c)^۳-a^۳-b^۳-c^۳=۳(a+b)(b+c)(c+a)\\ a^۳+b^۳+c^۳-۳abc=(a+b+c)(a^۲+b^۲+c^۲-ab-ac-bc)\text{ , (اتحاد لاگرانژ)}\\ \begin{cases}a+b+c=۰\Rightarrow a^۳+b^۳+c^۳=۳abc\text{ , (اتحاد اولر)}\\ \text{یا}\\ a=b=c\end{cases}\end{cases}$$

تست: مجموع ریشه‌های معادلهٔ $(۲x-۷)^۳+(x+۶)^۳+(۱-۳x)^۳=۰$ کدام است؟

۱) ۰　　۲) $\frac{۱۷}{۶}$　　۳) $\frac{-۱۳}{۶}$　　۴) $\frac{۱۷}{۲}$

حل:

$(۲x-۷)+(x+۶)+(۱-۳x)=۰\quad\Rightarrow$

$(۲x-۷)^۳+(x+۶)^۳+(۱-۳x)^۳=۳(۲x-۷)(x+۶)(۱-۳x)=۰$

$$\Rightarrow\begin{cases}x'=\frac{۷}{۲}\\ x''=-۶\\ x''=\frac{۱}{۳}\end{cases}\Rightarrow x'+x''+x'''=\frac{-۱۳}{۶}$$

۸) رادیکال مرکّب و تبدیل آن در صورت امکان به دو رادیکال ساده:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{۲}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{۲}}\quad,\quad(c=\sqrt{a^۲-b})$$

مثال: حاصل $\sqrt{۷+۴\sqrt{۳}}$ را حساب کنید؟

$$\sqrt{۷+۴\sqrt{۳}}=\sqrt{۷+\sqrt{۴۸}}=\sqrt{\frac{۷+۱}{۲}}+\sqrt{\frac{۷-۱}{۲}}=۲+\sqrt{۳}$$

$$\begin{cases}a=۷\\ b=۴۸\end{cases}\Rightarrow c=\sqrt{۴۹-۴۸}=۱$$

راه حل دیگر:

$$\sqrt{۷+۴\sqrt{۳}}=\sqrt{(\square+\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{(۲+\sqrt{۳})^۲}=|۲+\sqrt{۳}|=۲+\sqrt{۳}$$

۹) $$\sqrt{a+ib}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^۲+b^۲}}{۲}}\pm i\sqrt{\frac{-a\pm\sqrt{a^۲+b^۲}}{۲}}\quad,\quad(i=(۰,۱),i^۲=-۱)$$

کاربرد اتحاد مزدوج

فرمولهای طلائی:

۱) $(\sqrt{A}\pm\sqrt{B})^{-۱}=\frac{\sqrt{A}\pm\sqrt{B}}{A-B}$

۲) $(\sqrt{N+۱}\pm\sqrt{N})^{-۱}=\sqrt{N+۱}\mp\sqrt{N}$

مثال:

$(\sqrt{۷}+۳)^{-۱}=\frac{\sqrt{۷}-۳}{-۲}$　　$(۲+\sqrt{۳})^{-۱}=۲-\sqrt{۳}$

$(\sqrt{۶}-۲)^{-۱}=\frac{\sqrt{۶}+۲}{۲}$　　$(۵-۲\sqrt{۶})^{-۱}=۵+۲\sqrt{۶}$

مثال مهم: حاصل $\left\{\left\{\left[(\sqrt{۲}-۱)^{-۱}-۲\right]^{-۱}-۲\right\}^{-۱}\right\}^{-۱}$ را بدست آورید؟

در این سؤال از فرمول (۲) چندین بار استفاده شده است. $\sqrt{۲}-۱=\left\{\left\{\left[\underbrace{(\sqrt{۲}-۱)^{-۱}}_{\sqrt{۲}+۱}-۲\right]^{-۱}-۲\right\}^{-۱}\right\}^{-۱}$

بچه‌ها! کاربرد فرمول (۱) و (۲) بسیار مهم است، چیزی که در ریاضیات مهم است این است که بتوانید از فرمولهائی که می‌دانید استفاده کنید، شخصی که فرمول می‌داند ولی کاربردش را نمی‌داند مانند راننده‌ای است که گواهینامهٔ رانندگی دارد ولی رانندگی بلد نیست، پس اکنون که در ابتدای راه هستید، سعی کنید مفهوم و کاربرد هر فرمول را بیاموزید.

تست: حاصل عبارت $s=\alpha^۵-\dfrac{\alpha^۴}{۵-۲\sqrt{۶}}+۱$ **به ازاء** $\alpha=۵+۲\sqrt{۶}$ **برابر است با:**

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) $۵-۲\sqrt{۶}$ ۴) $۵+۲\sqrt{۶}$

حل: $S=\alpha^۵-\alpha^۴.\underbrace{(۵-۲\sqrt{۶})^{-۱}}_{\alpha}+۱ \Rightarrow \alpha^۵-\alpha^۵+۱=۱$

فرمول مهم:

$$\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۴}}+...+\frac{۱}{\sqrt{n-۱}+\sqrt{n}}=\sqrt{n}-۱$$

مثال:

$$۱)\ \frac{۱}{۱+\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۴}}+...+\frac{۱}{\sqrt{۱۲۰}+\sqrt{۱۲۱}}=\sqrt{۱۲۱}-۱=۱۱-۱=۱۰$$

$$۲)\ \frac{۵}{۱+\sqrt{۲}}+\frac{۵}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}+...+\frac{۵}{\sqrt{۹۹}+\sqrt{۱۰۰}}=۵(۱۰-۱)=۴۵$$

$$۳)\ \frac{۳}{\sqrt{۲۵}+\sqrt{۳۰}}+\frac{۳}{\sqrt{۳۰}+\sqrt{۳۵}}+...+\frac{۳}{\sqrt{۶۲۰}+\sqrt{۶۲۵}}=۳(\frac{۲۵-۵}{۵})=۱۲$$

حتماً می‌گویید چرا بر ۵ تقسیم کرده‌ایم اینجاست که باز می‌گوئیم اگر فرمول حفظ باشید مثال (۱) و (۲) را می‌توانید حل کنید در صورتیکه در امتحاناتی مثل کنکور مثال (۳) را از شما می‌خواهند اگر به مثال (۱) و (۲) توجه کنید قدر نسبت (۱) می‌باشد در صورتیکه در مثال (۳)؛ قدر نسبت ۵، است.

اکنون مناسب می‌بینیم در اینجا ۶ کسر معروف را، که در مبحث اتحادها توسط طراحان در سؤالات تستی، طرح گردیده‌اند ارائه دهیم، باز خواهید دید که حفظ بودن این ۶ کسر کاربردی برای شما ندارد چیزی که در ریاضیات حرف اول را می‌زند مفهوم است.

$۱)\ \dfrac{۱-a}{۱-\frac{۱}{a}}=-a$

$۲)\ \dfrac{۱}{۱+a}+\dfrac{۱}{۱+\frac{۱}{a}}=۱$

$۳)\ \dfrac{۱+a}{۱+\frac{۱}{a}}+\dfrac{۱-a}{۱-\frac{۱}{a}}=۰$

$۴)\ \dfrac{۱}{۱-a}+\dfrac{۱}{۱-\frac{۱}{a}}=۱$

$۵)\ \dfrac{a^{\frac{۱}{۲}}+a^{-\frac{۱}{۲}}}{a^{\frac{۱}{۲}}-a^{-\frac{۱}{۲}}}=\dfrac{a+۱}{a-۱}$

$۶)\ \dfrac{۱+a}{۱+\frac{۱}{a}}=a$

تذکر: در اینجا متذکر می‌شویم که گرچه به نظر می‌آید اصلاً موضوع شامل اتحادها نمی‌باشد اما اگر قدری تأمل کنیم در می‌یابیم که این مثال‌ها فقط برای راه انداختن شما و start حرکت است.

چند مثال:

۱) $\frac{۱}{۱+\underbrace{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}_{a}}+\frac{۱}{۱+\underbrace{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}_{\frac{۱}{a}}}=$ طبق فرمول ۲ = ۱

۲) $\frac{۱}{۱-\underbrace{\sqrt{a-\sqrt{a^۲-۱}}}_{a}}+\frac{۱}{۱-\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a^۲-۱}}}_{\frac{۱}{a}}}=$ طبق فرمول ۴ = ۱

۳) $\frac{۵}{۲+۲\tan ۱۵^\circ}+\frac{۵}{۲+\underbrace{۲\tan ۷۵^\circ}_{\cot ۱۵^\circ}}=$ طبق فرمول ۲ = $\frac{۵}{۲}$

۴) نمودار تابع $y=\frac{۴}{۱+\sqrt{x^۲-\sqrt{x^۴-۱}}}+\frac{۴}{۱+\sqrt{x^۲+\sqrt{x^۴-۱}}}$ چیست؟

حل: این همان فرمول ۲ است که در عدد ۴ ضرب شده است بنابراین ۴ = ۱ × ۴ = y و لذا نمودارش خطی افقی است.

تست: اگر $x=\sqrt[۳]{\sqrt{۲}+۱}+\sqrt[۳]{\sqrt{۲}-۱}$، آنگاه $(x^۳-۳x)$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۴

طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم: $x^۳=\sqrt{۲}-۱+\sqrt{۲}+۱+۳\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}+۱)(\sqrt{۲}-۱)}\,(\sqrt[۳]{\sqrt{۲}-۱}+\sqrt[۳]{\sqrt{۲}+۱})$

$x^۳=۲\sqrt{۲}+۳\sqrt[۳]{۱}\;(x)\;\Rightarrow x^۳-۳x=۲\sqrt{۲}$

تست: هرگاه ۳ = $x^۲+x$ باشد، حاصل عبارت $A=\frac{x^۶+x^۳-۲۷}{x^۴}$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳− ۳) ۹ ۴) ۹−

حل: $x^۳+x-۳=۰ \overset{\text{طبق اتحاد اولر}}{\Rightarrow} x^۶+x^۳-۲۷=۳(x^۳)(x)(-۳)=-۹x^۴ \Rightarrow A=\frac{-۹x^۴}{x^۴}=-۹$

تست: هرگاه $\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{y^۲}+\sqrt[۳]{z^۲}=۰$ باشد، حاصل عبارت $B=\frac{(x^۲+y^۲+z^۲)^۳}{۹x^۲y^۲z^۲}$ چقدر است؟

۱) ۲۷ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۳ ۴) ۹

حل: $\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{y^۲}+\sqrt[۳]{z^۲}=۰ \overset{\text{طبق اتحاد اولر}}{\Rightarrow} x^۲+y^۲+z^۲=۳\sqrt[۳]{x^۲y^۲z^۲}$

$\Rightarrow (x^۲+y^۲+z^۲)^۳=۲۷x^۲y^۲z^۲ \Rightarrow B=\frac{۲۷x^۲y^۲z^۲}{۹x^۲y^۲z^۲}=۳$

دو جمله‌ای نیوتن و بسط آن:

هر دو جمله‌ای به صورت $(a+b)^n$ را دو جمله‌ای نیوتن و چند جمله‌ای هم ارز با آن را بسط آن دو جمله‌ای می‌گویند. در زیر دو جمله‌ای نیوتن به ازاء ۳ و ۲ و ۱ و ۰ = n آمده است.

$$(a+b)^0=1$$
$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

اگر ضرائب این چند جمله ایها را به ترتیب زیر بنویسیم:

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

شکلی شبیه یک مثلث حاصل می‌شود که مجموع هر دو عدد هر سطر یکی از ضریبهای سطر بعدی را می‌دهد و روی دو ساق مثلث، عدد ثابت ۱ قرار دارد. به کمک مثلث فوق، اعداد واقع در سطر بعد و سطرهای بعدی (یعنی ضرائب بسط $(a+b)^4$ و...) به دست می‌آیند و در نتیجه ضرائب بسط دو جمله‌ای برای هر عدد طبیعی n بدست می‌آیند، به عنوان مثال اعداد سطر پنجم عبارتست از: ۱ ۴ ۶ ۴ ۱

و لذا: $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^3$

در حالت کلی داریم:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\dots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

مثال:
$$(a+b)^4=\binom{4}{0}a^4+\binom{4}{1}a^3b+\binom{4}{2}a^2b^2+\binom{4}{3}ab^3+\binom{4}{4}b^4$$
$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$\begin{cases}\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\\ \binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1\\ \binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n\end{cases}$$

روش آسان محاسبهٔ ضرائب بسط دو جمله‌ای:

به فرمول زیر توجّه کنید:

$$\text{ضریب هر جملهٔ بسط}=\frac{\text{ضریب جملهٔ ما قبل}\times \text{توان a در جملهٔ ما قبل}}{\text{تعداد جملات ماقبل}}$$

مثال:

$$(a+b)^4=a^4+\frac{1\times4}{1}a^3b+\frac{3\times4}{2}a^2b^2+\frac{2\times6}{3}ab^3+b^4$$

$= a^۴ + ۴a^۳b + ۶a^۲b^۲ + ۴ab^۳ + b^۴$

مثال: حاصل $(۲x + ۳y)^۷$ را حساب کنید؟

$(۲x + ۳y)^۷ = (۲x)^۷ + ۷(۲x)^۶(۳y)^۲ + ۲۱(۲x)^۵(۳y)^۲ + ۳۵(۲x)^۴(۳y)^۳ + ۳۵(۲x)^۳(۳y)^۴$

$+ ۲۱(۲x)^۲(۳y)^۵ + ۷(۲x)(۳y)^۶ + (۳y)^۷ = ...$

بسط دو جمله‌ای نیوتن دارای ویژگیهای مهّم زیر است:

۱) تعداد جملات بسط برابر است با $n + ۱$ (یعنی یکی بیشتر از توان)

۲) چند جمله‌ای سمت راست برحسب a و b از درجهٔ n است.

۳) چند جمله‌ای برحسب a و b متقارن است. (یعنی همانطوریکه مثلاً $a^۲b$ داریم، $ab^۲$ نیز داریم)

۴) چند جمله‌ای سمت راست یک چند جمله‌ای همگن است، یعنی مجموع توانهای a و b در تمام جملات برابر n است.

۵) توانهای a از چپ به راست نزولی و توانهای b از چپ به راست صعودی است.

۶) در هر جمله در مقایسه با جملهٔ قبل، یک واحد از توان a کم شده و یک واحد به توان b اضافه می‌شود.

۷) جمله‌ایهائی که از دو طرف به یک فاصله‌اند، ضرائب متساوی دارند.

۸) همیشه توان b، یک واحد کمتر از مرتبهٔ جمله در بسط است. (یعنی مثلاً توان b در جملهٔ سوّم، برابر ۲ است.)

۹) مجموع ضرائب بسط برابر است با ۲^n (کافی است به جای a و b، یک قرار دهیم تا مجموع ضرائب بسط به دست آیند.)

یعنی: $\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + ... + \binom{n}{n} = ۲^n$

تست: مجموع ضرائب بسط $(x + y)^۴$ برابر است با:

۱) ۱۶ ✓   ۲) ۱۸   ۳) ۲۰   ۴) ۱۲

$x = y = ۱ \Rightarrow (۱ + ۱)^۴ = ۲^۴ = ۱۶$

یادآوری: $(x + y)^۴ = x^۴ + ۴x^۳y + ۶x^۲y^۲ + ۴xy^۳ + y^۴$

$۱ + ۴ + ۶ + ۴ + ۱ = ۱۶$

تست: اگر مجموع ضرائب عددی بسط $(\sqrt[۳]{x} + \frac{۱}{\sqrt{x}})^n$، ۲۴۰ واحد از مجموع ضرائب بسط $(a + b)^{۲n}$ کمتر باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۶   ۲) ۴   ۳) ۵   ۴) ۳

$۲^{۲n} = ۲^n + ۲۴۰$

$(۲^n)^۲ - ۲^n - ۲۴۰ = ۰$

$(۲^n + ۱۵)(۲^n - ۱۶) = ۰$

$۲^n = -۱۵$ غیرممکن

$۲^n = ۱۶ \Rightarrow n = ۴$

۱۰) هرگاه ضریب جمله pام با ضریب جملهٔ rام بسط برابر باشند، آنگاه:

$$p + r = n + ۲$$

تست: اگر در بسط $(x + y)^n$، ضریب جملهٔ هفدهم با ضریب جملهٔ نهم برابر باشد، n کدام است؟

۱) ۳۰ ۲) ۲۲ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶

$۱۷ + ۹ = n + ۲ \Rightarrow n = ۲۴$

۱۱) جملات kام و $(k + ۱)$ام بسط از فرمولهای زیر محاسبه می‌شوند.

$$\text{جملهٔ } k\text{ام} = \binom{n}{k-۱} a^{n-k+۱} b^{k-۱}$$

$$\text{جملهٔ } (k+۱)\text{ام} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k}$$

تست: جملهٔ ششم بسط $(۳x + ۵y)^۹$ کدام است؟

۱) $\binom{۹}{۶}(۳x)^۳(۵y)^۶$ ۲) $\binom{۹}{۵}(۳x)^۵(۵y)^۴$ ۳) $\binom{۹}{۵}(۳x)^۴(۵y)^۵$ ۴) $\binom{۹}{۶}(۳x)^۶(۵y)^۳$

$$\text{جملهٔ ششم} = \binom{۹}{۵}(۳x)^۴(۵y)^۵$$

۱۲) هرگاه بین a و b، در طرف اول بسط، منفی باشد، در طرف دوم، علامتها، یکی درمیان مثبت و منفی می‌شوند.

۱۳) مجموع ضرائب بسط $(a - b)^n$، صفر است، یعنی: $\binom{n}{۰} - \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \dots + (-۱)^n \binom{n}{n} = ۰$

۱۴) جملهٔ مستقل از x: جملهٔ مستقل از x در بسط $(a + b)^n$، در صورت وجود جمله‌ای است که شامل x نباشد به عبارت دیگر توان x در این جمله برابر صفر باشد. برای یافتن جمله مستقل از x در بسط $(a + b)^n$، کافی است فرمول جملهٔ kام یا $(k+۱)$ام را نوشته، توان x در این جمله را مساوی صفر قرار دهیم تا k به دست آمده و مشخص شود کدام جمله، جملهٔ مستقل از x است.

تست: جملهٔ مستقل از x در بسط $\left(\frac{۳}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۳x}\right)^۹$، کدام جملهٔ آن است؟

۱) جملهٔ ششم ۲) جملهٔ پنجم ۳) جملهٔ هفتم ۴) جملهٔ چهارم

$$\text{جملهٔ } (k+۱)\text{ام} = \binom{۹}{k}\left(\frac{۳}{۲}x^۲\right)^{۹-k}\left(-\frac{۱}{۳x}\right)^k$$

$$\Rightarrow (x^۲)^{۹-k}(x^{-۱})^k = x^{۱۸-۳k}$$

$\Rightarrow ۱۸ - ۳k = ۰ \Rightarrow k = ۶$

بنابراین گزینه‌ی صحیح، گزینه‌ی ۳ می‌باشد.

تذکر مهم: در یک بسط، ممکن است، جملهٔ مستقل از x، وجود نداشته باشد.

۱۵) در حالت کلی، جملهٔ مستقل از x در بسط $(x^q + x^p)^n$، عبارتست از:

$$m = \frac{nq}{q-p} + ۱$$ (m باید یک عدد طبیعی باشد)

مثال: آیا در بسط $\left(x + \frac{۵}{\sqrt[۳]{x}}\right)^{15}$، جملهٔ مستقل از x وجود دارد یا نه، چرا؟

خیر، زیرا: $m=\frac{15\times 1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{45}{4}$ طبیعی نیست.

۱۶) محاسبهٔ جمله‌ای که در آن x^p وجود داشته باشد.

برای محاسبهٔ چنین جمله‌ای، ابتدا فرمول جملهٔ $(k+1)$ام را نوشته، توان x را در آن مساوی p قرار می‌دهیم تا k و از آنجا جمله‌ای که شامل x^p است (در صورت وجود) به دست آید.

تست: ضریب x^{23} در بسط $(x^4-\frac{1}{x^3})^{15}$ کدام است؟

۱) $6\times14\times13$　　۲) $-6\times14\times13$　　۳) $7\times13\times15$　　۴) $-7\times13\times15$

$$\text{جملهٔ }(k+1)\text{ام}=\binom{15}{k}(x^4)^{15-k}(-x^{-3})^k=\binom{15}{k}(-1)^k x^{60-7k}$$

$$60-7k=32\Rightarrow k=4$$

لذا جملهٔ $((k+1)$ام $=(1+4)$ام) پنجم، جمله‌ایست که در آن x^{32} وجود دارد و ضریب جملهٔ x^{32} در این جمله عبارتست از:

$$\binom{15}{4}(-1)^4=7\times13\times15$$

۱۷) جملهٔ وسط و جملات وسط در بسط $(a+b)^n$:

الف) اگر در دو جمله‌ای $(a+b)^n$، n عدد طبیعی زوج باشد، آنگاه جملهٔ وسط، جملهٔ $(\frac{n}{2}+1)$ام است.

ب) اگر در دو جمله‌ای $(a+b)^n$، n عدد طبیعی فرد باشد، آنگاه جملات وسط عبارتند از:

جملات $(\frac{n+1}{2})$ام و $(\frac{n+1}{2}+1)$ام

مثال: جملهٔ وسط بسط $(\frac{a}{x}+\frac{x}{a})^{10}$ را بیابید؟

$n=10$ زوج $\Rightarrow$ جملهٔ وسط $=\frac{10}{2}+1=6$ جملهٔ ششم

جملهٔ وسط = جملهٔ ششم $=\binom{10}{5}(\frac{a}{x})^5(\frac{x}{a})^5=\binom{10}{5}$

۱۸) جملات گویا در بسط دو جمله‌ای نیوتن:

جملات گویا، جملاتی هستند که در آنها، حروف زیر رادیکال و به صورت اصم نباشند.

مثال: در بسط $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y})^{24}$، تعداد جملات گویا را بیابید؟

هر جمله از بسط، شامل عبارتی به صورت $(\sqrt{x})^p(\sqrt[3]{y})^q$ است، اگر بخواهیم جملهٔ بدست آمده، گویا باشد، بایستی q مضرب ۳ و p مضرب ۲ باشد، (تا x و y از زیر رادیکال درآیند) ضمناً باید مجموع توانها یعنی $p+q$، همیشه مساوی ۲۴ باشد، لذا در واقع، باید تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادلهٔ زیر را به دست آوریم.

$$\begin{cases}q=3k'\\p=2k\end{cases}\Rightarrow 2k+3k'=24$$

از این معادله، نتیجه می‌شود که k نیز بایستی مضرب ۳ باشد پس: $k=0$ و ۳ و ۶ و ۹ و ۱۲

لذا پنج جملهٔ گویا در بسط $(\sqrt{x}+\sqrt[3]{y})^{24}$ وجود دارند که با توجه به فرمول $\binom{24}{q}(\sqrt{x})^p(\sqrt[3]{y})^q$ و یا $\binom{24}{3k'}(\sqrt{x})^{2k}(\sqrt[3]{y})^{3k'}$ عبارتند از:

$$\begin{cases}k=0\\k'=8\end{cases}\rightarrow y^8$$

$$\begin{cases}k=3\\k'=6\end{cases}\rightarrow \binom{24}{18}x^3y^6$$

$$\begin{cases}k=6\\k'=4\end{cases}\rightarrow \binom{24}{12}x^6y^4$$

$$\begin{cases}k=9\\k'=2\end{cases}\rightarrow \binom{24}{6}x^9y^2$$

$$\begin{cases}k=12\\k'=0\end{cases}\rightarrow x^{12}$$

۱۸) بسط چند جمله‌ای (تعمیم بسط دو جمله‌ای):

از روی بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$، می‌توان الهام گرفت و به بسط چند جمله‌ای، یعنی بسط هائی نظیر $(a+b+c)^n$، $(a+b+c+d)^n$ و ... و به طور کلی بسط $(a_1+a_2+\dots+a_k)^n$ پرداخت.

نکاتی راجع به بسط چند جمله‌ای $(a_1+a_2+\dots+a_k)^n$

۱) فرمول کلی بسط فوق عبارتست از:

$$(a_1+a_2+\dots+a_k)^n=\sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n}\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_k}a_1^{n_1}a_2^{n_2}\dots a_k^{n_k}$$

که در آن:

$$\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

در واقع بسط فوق برابر است با مجموع تمام جملاتی نظیر $\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}a_1^{n_1}.a_2^{n_2}\dots a_k^{n_k}$ که در آنها n_1 و n_2 و ... و n_k، جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ $n_1+n_2+\dots+n_k=n$ می‌باشند.

تبصره: بدیهی است که اگر در بسط فوق a_3 و a_4 ... و a_k همگی صفر باشند، آنگاه داریم $(a_1+a_2)^n=\sum\frac{n!}{n_1!\,n_2!}a_1^{n_1}a_2^{n_2}$ که در آن $n_1+n_2=n$

و یا $(a_1+a_2)^n=\sum\frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}a_1^{n_1}a_2^{n-n_1}$ که همان بسط دو جمله‌ای نیوتن $(a_1+a_2)^n$ است.

نکته: تعداد جملات متمایز بسط چند جمله‌ای مزبور عبارتست از تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ $n_1+n_2+\dots+n_k=n$ که عبارتست از:

$$\binom{n+k-1}{k-1}=\binom{n+k-1}{n}=\frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}$$

توجّه داشته باشید که طبق فرمول $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$، دو عبارت $\binom{n+k-1}{n}$, $\binom{n+k-1}{k-1}$ با یکدیگر مساوی‌اند.

مثال: تعداد جملات بسط $(a+b+c)^۲$ عبارتست از:

$$\binom{۳+۲-۱}{۲}=\binom{۴}{۲}=۶$$

مثال: آیا در بسط $(x+y+z)^{۱۰}$، جمله‌ای به صورت $x^۳y^۴z^۲$ وجود دارد یا نه، چرا؟

خیر، زیرا $۱۰ \neq ۲+۴+۳$

تست: ضریب جملهٔ $a^۲b^۴c$ در بسط $(a+b+c)^۷$ کدام است؟

۱) ۹۲ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۰ ۴) ۹۶

$$\frac{۷!}{۲!۴!۱!}=۱۰۵$$

مثال: $(a+b+c)^۳$ را به کمک فرمول بسط چند جمله‌ای بسط دهید؟

$$(a+b+c)^۳=\Sigma\frac{۳!}{n_۱!n_۲!n_۳!}a^{n_۱}b^{n_۲}c^{n_۳}$$

و $n_۱+n_۲+n_۳=۳$

معادلهٔ فوق دارای $۱۰=\binom{۵}{۳}=\binom{۳+۳-۱}{۳}$ جواب صحیح نامنفی است که عبارتند از:

(۰,۰,۳) و (۰,۳,۰) و (۳,۰,۰) ← دسته اول

(۰,۱,۲) و (۰,۲,۱) و (۱,۰,۲) و (۱,۲,۰) و (۲,۰,۱) و (۲,۱,۰) ← دسته دوم

(۱,۱,۱) ← دسته سوم

بنابراین داریم:

$$(a+b+c)^۳=\frac{۳!}{۳!۰!۰!}a^۳b^۰c^۰+\frac{۳!}{۰!۳!۰!}a^۰b^۳c^۰+...+\frac{۳!}{۱!۱!۱!}a^۱b^۱c^۱$$
$$=a^۳+b^۳+c^۳+۳a^۲b+۳a^۲c+۳ab^۲+۳ac^۲+۳b^۲c+۳bc^۲+۶abc$$

تست: مجموع ضرائب بسط $(۴a+b-۳c)^{۱۰}$ کدام است؟

۱) ۵۱۲ ۲) ۱۰۲۴ ۳) ۰ ۴) ۵۱۲-

کافی است به جای a و b و c، یک قرار دهیم.

$$(۴+۱-۳)^{۱۰}=۲^{۱۰}=۱۰۲۴$$

نکته: تعداد جوابهای صحیح و مثبت (طبیعی) معادلهٔ $x_۱+x_۲+...+x_n=k$ عبارتست از: $\binom{n-۱}{k-۱}$

تست: معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳=۸$ چند جواب طبیعی دارد؟

۱) ۴۲ ۲) ۴۵ ۳) ۹۰ ۴) ۲۱

$$\binom{۸-۱}{۳-۱}=\binom{۷}{۲}=۲۱$$

تعدادی از جوابهای معادله عبارتند از: (۶,۱,۱) و (۱,۶,۱) و (۱,۱,۶) و (۵,۲,۱) و ...

نکته: تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ با شرط $x_1 \geq c_1$ و $x_2 \geq c_2$ و ... $x_k \geq c_k$ عبارتست از:

$$\binom{n - c_1 - c_2 - \dots - c_k - k - 1}{k - 1}$$

تست: تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ با شرط $x_i \geq i$ $(1 \leq i \leq 3)$ عبارتست از:

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۰

$$\begin{cases} x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 2 \\ x_3 \geq 3 \end{cases} \rightarrow \binom{8-3-2-1+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

این جوابها عبارتند از:

(۳,۲,۳) و (۲,۳,۳) و (۲,۲,۴) و (۱,۴,۳) و (۱,۳,۴) و (۱,۲,۵)

۱۹) اتحاد یک جمله مشترک دوتائی و تعمیم آن

۱) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

۲) $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc$

۳) $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = x^4 + (a + b + c + d)x^3 + (ab + ac + ad + bc + bd + cd)x^2 + (abc + abd + acd + bcd)x + abcd$

۴) فرمول کلی → $(x + a_1)(x + a_2) + \dots + (x + a_n) = x_n + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)x^{n-1} + \dots + a_1a_2 \dots a_n$

در اتحاد کلی فوق، نکات زیر را به خاطر بسپارید.

۱) ضریب x^{n-1} برابر Σa_i است.

۲) ضریب x^{n-2} برابر $\Sigma a_i a_j$ است.

⋮

$(n - 1)$ ضریب x برابر $\Sigma a_i a_j \dots a_z$ است.

n) مقدار ثابت، برابر $a_1 a_2 \dots a_n$ است.

تست: ضریب x^2 در عبارت $(x + 1)^2(x - 2)(x + 3)$ برابر است با:

۱) ۶- ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) ۱۲-

$(x + 1)(x + 1)(x - 2)(x + 3)$

x^2 ضریب $= \Sigma a_i a_j = (1)(1) + (1)(-2) + (1)(3) + (1)(-2) + (1)(3) + (-2)(3) = -6$

تذکر: هرگاه در فرمول کلی فوق $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ آنگاه داریم:

$(x + a)(x + a) \dots (x + a) = x^n + (a + a + \dots + a)x^{x-1} + (a^2 + a^2 + \dots + a^2)x^{n-2} + \dots + a^n =$

$x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}a + \binom{n}{2} x^{n-2}a^2 + \dots + a^n$

که همان فرمول دو جمله‌ای می‌باشد.

۱ـ هرگاه $x + \frac{۱}{x} = -۲$، حاصل $x^{۷} + \frac{۱}{x^{۹}}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۱-

۲ـ هرگاه $x + \frac{۱}{x} = a$، حاصل $x - \frac{۱}{x}$ کدام است؟

۱) $\pm\sqrt{۱ + a^{۲}}$ ۲) $\pm\sqrt{a^{۲} + ۴}$ ۳) $\pm\sqrt{a^{۲} - ۱}$ ۴) $\pm\sqrt{a^{۲} - ۴}$

۳ـ هرگاه $x + \frac{۱}{x} = ۴$، حاصل $x^{۴} + \frac{۱}{x^{۴}}$ کدام است؟

۱) ۱۹۴ ۲) ۲۰۴ ۳) ۱۹۶ ۴) ۱۸۲

۴ـ مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی ۱۱۳ است، حاصلضرب دو عدد کدام است؟

۱) ۵۶ ۲) ۱۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۴۸

۵ـ از روابط $x + z = ۵xz$، $y + z = ۳yz$ و $x + y = ۲xy$ مقدار $\frac{xy + yz + zx}{xyz}$ برابر است با:

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۱۵ ۴) ۲۰

۶ـ هرگاه $\frac{x^{۲}}{x^{۴} + ۱} = \frac{۱}{۱۴}$، با شرط $x > ۰$ حاصل $x^{۳} + \frac{۱}{x^{۳}}$ کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۵۲ ۳) ۳۶ ۴) ۷۶

۷ـ در صورتی که $a^{۲} - ۸ab + ۹b^{۲} = ۰$ باشد، با شرط $a , b > ۰$، حاصل مثبت کسر $\frac{a + ۳b}{a - ۳b}$ برابر است با:

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۶}$ ۳) $\sqrt{۷}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

۸ـ $(\sqrt{۳} - ۲)^{۳}$ برابر است با:

۱) $۲۶ - ۱۵\sqrt{۳}$ ۲) $-۲۶ + ۱۵\sqrt{۳}$ ۳) $۱۰ - ۹\sqrt{۳}$ ۴) $-۱۰ + ۹\sqrt{۱۹}$

۹ـ هرگاه $x + y = \frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $x^{۳} + y^{۳} + xy$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۲۷}$ ۳) $\frac{۱}{۸۱}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۱۰ـ عبارت $(x + ۲)^{n} + (x + ۲)^{n-۱}(x + ۱) + ... + (x + ۱)^{n}$ برابر است با:

۱) $(x + ۲)^{n} + (x + ۱)^{n}$ ۲) $(x + ۲)^{n} - (x + ۱)^{n}$

۳) $(x + ۲)^{n+۱} + (x + ۱)^{n+۱}$ ۴) $(x + ۲)^{n+۱} - (x + ۱)^{n+۱}$

۱ـ (۲) $x + \frac{1}{x} = -2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0$

$x = -1 \Rightarrow x^7 + \frac{1}{x^9} = -2$

۲ـ (۴) $(x + \frac{1}{x})^2 - (x - \frac{1}{x})^2 = 4 \Rightarrow (x - \frac{1}{x})^2 = a^2 - 4$

$\Rightarrow x - \frac{1}{x} = \pm\sqrt{a^2 - 4}$

۳ـ (۱) $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = 4^2 - 2 = 14$

$x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 2 = 14^2 - 2 = 194$

۴ـ (۱) $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab \Rightarrow (n+1)^2 + n^2 = (n+1-n)^2 + 2n(n+1)$

$113 = 1 + 2n(n+1) \Rightarrow n(n+1) = 56$

۵ـ (۲)

$$\begin{cases} x + z = 5xz \\ y + z = 3xy \\ x + y = 2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 5 \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = 3 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

طرفین سه معادله را با هم جمع می‌کنیم.

$2(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) = 10 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 5$

$\frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5$

۶ـ (۲) $\frac{x^2}{x^4 + 1} = \frac{1}{14} \Rightarrow \frac{x^4 + 1}{x^2} = 14 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$

$(x + \frac{1}{x})^2 - 2x(\frac{1}{x}) = 14 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \pm 4$

$\xrightarrow{x > 0} x + \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3x \cdot \frac{1}{x}(x + \frac{1}{x}) = 4^3 - 12 = 52$

۷ـ (۳)

$$a^2 - 8ab + 9b^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (a + 3b)^2 - 14ab = 0 \\ (a - 3b)^2 - 2ab = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 3b = \pm\sqrt{14ab} \\ a - 3b = \pm\sqrt{2ab} \end{cases} \quad \frac{a + 3b}{a - 3b} = \sqrt{7}$$

۸ـ (۱) $(2 - \sqrt{3})^3 = 2^3 - 3(2)^2\sqrt{3} + 3(2)(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^3 = 26 - 15\sqrt{3}$

۹ـ (۲) $x^3 + y^3 + 3xy = (x + y)^3 - 3xy(x + y) + 3xy = \frac{1}{27} - 3xy + 3xy = \frac{1}{27}$

۱۰ـ (۲) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$ طبق اتحاد

$(x + 2)^{n+1} - (x + 1)^{n+1} = (x + 2 - x - 1)((x + 2)^n + (x + 2)^{n-1}(x + 1) + \ldots + (x + 1)^n)$

۱ـ حاصل $\sqrt[4]{6+4\sqrt{2}} \times \sqrt{4-2\sqrt{2}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) 2 ۴) 1

۲ـ حاصل $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}$ برابر است با:

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) 4

۳ـ مجموع $\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ کدام است؟

۱) 10 ۲) 9 ۳) $\sqrt{99}$ ۴) $\sqrt{99}-1$

۴ـ مقدار عددی عبارت $A = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$ به ازاء $x = \sqrt[3]{2} - 1$ کدام است؟

۱) 12 ۲) 8 ۳) 6 ۴) 9

۵ـ مقدار عددی عبارت $x^5 - 12x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 12x - 1$ به ازاء $x = 11$ کدام است؟

۱) 10 ۲) 11 ۳) -11 ۴) 12

۶ـ مقدار عددی عبارت $p = x^5 - (2+\sqrt{2})x^3 + 3x^2 + 3x - \sqrt{2}$ به ازاء $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) $-2\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}$

۷ـ هرگاه، $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c} = 0$ باشد، $(a + b + c)^3$ برابر است با:

۱) $9abc$ ۲) $8a^3b^3c^3$ ۳) $27abc$ ۴) $3\sqrt[3]{3a^3b^3c^3}$

۸ـ هرگاه $x + 2y = 3z$، حاصل $A = \frac{x^3+8y^3-27z^3}{9xyz}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -2 ۳) 2 ۴) $\frac{1}{2}$

۹ـ هرگاه $x + \sqrt[3]{x} = 1$ باشد، حاصل کسر $B = \frac{x^3+x-1}{3\sqrt[3]{x}}$ کدام است؟

۱) x ۲) $\sqrt[3]{x}$ ۳) $-x$ ۴) $-\frac{x}{3}$

۱۰ـ هرگاه $x + y + z^3 = 3$، حاصل $x^3 + (y-3)^3 + z^3$ کدام است؟

۱) $3xz(y-3)$ ۲) $xz(y-3)$ ۳) $3xz(y+3)$ ۴) $xz(y+3)$

۱ـ (۳)
$$\sqrt{۴-۲\sqrt{۲}} \times \sqrt[۴]{۶+۴\sqrt{۲}} = \sqrt[۴]{(۴-۲\sqrt{۲})^۲} . \sqrt[۴]{۶+۴\sqrt{۲}}$$
$$= \sqrt[۴]{۲۴-۱۶\sqrt{۲}} . \sqrt[۴]{۶+۴\sqrt{۲}} = \sqrt[۴]{۴} . \sqrt[۴]{۶-۴\sqrt{۲}} . \sqrt[۴]{۶+۴\sqrt{۲}}$$
$$= \sqrt[۴]{۴} \sqrt[۴]{۳۶-۳۲} = \sqrt[۴]{۱۶} = ۲$$

۲ـ (۲)
$$\sqrt[۶]{۴+۲\sqrt{۳}} . \sqrt[۶]{(\sqrt{۳}-۱)^۲} . \sqrt[۳]{۴} = \sqrt[۶]{۴+۲\sqrt{۳}} . \sqrt[۶]{۴-۲\sqrt{۳}} . \sqrt[۳]{۴}$$
$$= \sqrt[۶]{۱۶-۱۲} . \sqrt[۳]{۴} = \sqrt[۶]{۴} . \sqrt[۳]{۴} = \sqrt[۳]{۲} . \sqrt[۳]{۴} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$$

۳ـ (۲)
$$(\sqrt{۲}-۱)+(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})+...+(\sqrt{۱۰۰}-\sqrt{۹۹}) = \sqrt{۱۰۰}-۱ = ۹$$

یادآوری:
$$(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})(\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}) = ۱ \Rightarrow \sqrt{n+۱}-\sqrt{n} = \frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}$$

۴ـ (۳)
$$A = (x+۱)^۳+۴ = (\sqrt[۳]{۲}-۱+۱)^۳+۴ = ۶$$

۵ـ (۱) به جای ۱۲، ۱+x می‌گذاریم.
$$x = ۱۱ \Rightarrow x+۱ = ۱۲$$
$$x^۵-(x+۱)x^۴+(x+۱)x^۳-(x+۱)x^۲+(x+۱)x-۱$$
$$= x^۵-x^۵-x^۴+x^۴+x^۳-x^۳-x^۲+x^۲+x-۱ = x-۱ = ۱۱-۱ = ۱۰$$

۶ـ (۴) به جای x و $x^۲$ به ترتیب $\sqrt{۲}$ و ۲ می‌گذاریم.
$$x = \sqrt{۲} \Rightarrow x^۲ = ۲$$
$$P = x^۵-(x^۲+x)x^۳+x^۲(x^۲)+۳x-x$$
$$= x^۵-x^۵-x^۴+x^۴+۲x = ۲x = ۲\sqrt{۲}$$

۷ـ (۳) **یادآوری:** $a+b+c = ۰ \Rightarrow a^۳+b^۳+c^۳ = ۳abc$
$$\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}+\sqrt[۳]{c} = ۰ \Rightarrow a+b+c = ۳\sqrt[۳]{abc}$$
$$(a+b+c)^۳ = ۲۷abc$$

۸ـ (۲)
$$x+۲y-۳z = ۰ \Rightarrow x^۳+۸y^۳-۲۷z^۳ = ۳x(۲y)(-۳z) \Rightarrow A = \frac{-۱۸xyz}{۹xyz} = -۲$$

۹ـ (۳)
$$x+\sqrt[۳]{x}-۱ = ۰ \Rightarrow x^۳+x-۱ = -۳x\sqrt[۳]{x} \Rightarrow B = \frac{-۳x\sqrt[۳]{x}}{۳\sqrt[۳]{x}} = -x$$

۱۰ـ (۱)
$$x+(y-۳)+z = ۰ \Rightarrow x^۳+(y-۳)^۲+z^۳ = ۳x(y-۳)z$$

تا توانستم ندانستم و چون دانستم، نتوانستم. «خواجه عبدالله انصاری»

۱ـ جملهٔ مستقل از x در بسط $(x^2 - \frac{1}{x})^6$، برابر با کدامیک از اعداد زیر است؟

۱) -20 ۲) -15 ۳) 15 ۴) 20

۲ـ در کدام جمله از بسط $(a + \sqrt{a})^{10}$، توان a، برابر ۷ می‌باشد. $(a > 0)$

۱) هفتم ۲) سوم ۳) چهارم ۴) پنجم

۳ـ مجموع ضرائب بسط $(a + b)^{2n}$ از مجموع ضرائب بسط $(x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$، ۲۴۰ واحد بیشتر است، مقدار n برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴ـ در بسط $(x + y)^{25}$، ضریب جملهٔ هفتم با ضریب کدام جمله برابر است؟

۱) هفدهم ۲) نوزدهم ۳) هیجدهم ۴) بیستم

۵ـ جملهٔ وسط $(x+y)^{40}$ کدام است؟

۱) $\binom{40}{21} x^{19}y^{21}$ ۲) $\binom{40}{20} x^{19}y^{21}$ ۳) $\binom{40}{20} x^{20}y^{20}$ ۴) $\binom{40}{21} x^{20}y^{20}$

۶ـ اگر در بسط $(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4})^n$، ضریب جملهٔ سوم، ۴۴ واحد از ضریب جملهٔ دوم بیشتر باشد، n کدام است؟

۱) $n = 10$ ۲) $n = 11$ ۳) $n = 13$ ۴) $n = 18$

۷ـ در بسط $(x + 1)(x + 2)(x + 3) \dots (x + 100)$، ضریب x^{99}، کدام است؟

۱) $100!$ ۲) ۵۰۵۰ ۳) ۱۰۱۰۰ ۴) $99!$

۸ـ در بسط $(1 + x)^{13}$، بزرگترین ضریب برابر است با:

۱) ۱۳ ۲) ۱۷۱۶ ۳) ۱۸۲۱ ۴) ۱۷۲۶

۹ـ در بسط $(x - 1)(x + 2)(x + 4)(x - 7)$، ضریب x^2 برابر است با:

۱) ۲۹ ۲) -31 ۳) -33 ۴) -34

۱۰ـ مجموع ضرائب بسط $(3x^2 + x - 2)^{99} + (x - 5)^{49}$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) 2^{98} ۳) 2^{99} ۴) ۲

۱ـ (۳) $(x^{۲} - x^{-۱})^{۶}$

یادآوری: $m = \frac{nq}{q-p} + ۱ = \frac{۶(۲)}{۲-(-۱)} + ۱ = ۵$

پس جملهٔ مستقل از x، جملهٔ پنجم است.

جملهٔ پنجم = $\binom{۶}{۴} (x^{۲})^{۲} (-\frac{۱}{x})^{۴} = ۱۵$

۲ـ (۲) جملهٔ $(k+۱)$ام = $\binom{۱۰}{k} a^{۱۰-k} (\sqrt{a})^{k} \Rightarrow a^{۱۰-k-\frac{k}{۲}} = a^{۷}$

$۱۰ - \frac{۳k}{۲} = ۷ \Rightarrow k = ۲ \Rightarrow$ جملهٔ سوم

۳ـ (۲) $۲^{۲n} = ۲^{n} + ۲۴۰ \Rightarrow (۲^{n})^{۲} - ۲^{n} - ۲۴۰ = ۰$

$(۲^{n} - ۱۶)(۲^{n} + ۱۵) = ۰ \Rightarrow ۲^{n} = ۱۶ \Rightarrow n = ۴$

۴ـ (۴) ضریب جملهٔ هفتم = ضریب جملهٔ هیجدهم $\Leftarrow ۷ + ۲۰ = ۲۵ + ۲$

۵ـ (۳) $(x + y)^{۴۰} \Rightarrow \frac{n}{۲} + ۱ = ۲۱$ جملهٔ بیست و یکم　$\binom{۴۰}{۲۰} x^{۲۰}y^{۲۰}$

۶ـ (۲) $\binom{n}{۲} = ۴۴ + \binom{n}{۱}$

$\frac{n(n-۱)}{۲} = ۴۴ + n \Rightarrow n(n - ۱) - ۲n = ۸۸$

$n(n - ۳) = ۸۸ \Rightarrow ۱۱ \times ۸ \Rightarrow n = ۱۱$

۷ـ (۲) ضریب $x^{۹۹} = ۱ + ۲ + ۳ + ... + ۱۰۰ = \frac{۱۰۰\times۱۰۱}{۲} = ۵۰۵۰$

۸ـ (۲) بزرگترین ضریب = ضریب یکی از دو جملهٔ وسط = $\binom{۱۳}{۷} = ۱۷۱۶$

۹ـ (۳) ضریب $x^{۲} = (-۱)(۲) + (-۱)(۴) + (-۱)(-۷) + (۲)(۴) + (۲)(-۷) + ۴(-۷) = -۳۳$

۱۰ـ (۲) $x = ۱ \Rightarrow ۲^{۹۹} + (-۴)^{۴۹} = ۲^{۹۹} - ۲^{۹۸} = ۲^{۹۸}(۲ - ۱) = ۲^{۹۸}$

نجات دادن یک محکوم، بهتر از محکوم کردن یک انسان است.　(ولتر)

آدمی ساختهٔ افکار خویش است، فردا همان خواهد شد که امروز اندیشیده است. (موریس مترلینگ)

فصل دوم

معادلات

۱ـ معادلهٔ درجهٔ اول: هر معادلهٔ درجهٔ اول یک مجهولی را به صورت $ax + b = ۰$ نمایش می‌دهیم:

الف) اگر $a \neq ۰$ باشد، جواب معادله برابر است با: $x = \frac{-b}{a}$

ب) اگر $a = ۰$ باشد دو حالت پیش می‌آید:

حالت اول: اگر $b = ۰$، آنگاه معادله به صورت $۰x + ۰ = ۰$ و یا $۰x = ۰$ در می‌آید که در این حالت، x هر عدد حقیقی می‌تواند باشد لذا معادله در این حالت بیشمار جواب دارد و اصطلاحاً می‌گویند معادله در این حالت مبهم است.

حالت دوم: اگر $b \neq ۰$، آنگاه معادله به صورت $۰x = -b$ یا $۰ = -b$ در می‌آید که غیرممکن است و لذا معادله در این حالت، جواب ندارد.

بنابراین به طور اختصار می‌توان گفت:

$$ax = -b \Rightarrow \begin{cases} a \neq ۰ \Rightarrow x = \frac{-b}{a} \\ a = ۰ \Rightarrow \begin{cases} b = ۰ & \text{معادله مبهم است.} \\ b \neq ۰ & \text{معادله غیرممکن (ممتنع) است} \end{cases} \end{cases}$$

تست: در معادلهٔ $(m - ۱)x = m^۲ - ۱$، مقدار m چند باشد تا معادله مبهم شود؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۰ ۴) ± ۱

$$\begin{cases} a = ۰ & \Rightarrow m = ۱ \\ b = ۰ & \Rightarrow m = \pm ۱ \end{cases} \overset{\text{ریشه مشترک}}{\Rightarrow} m = ۱$$

تست: در معادلهٔ $(m^۲ - ۴)x = m + ۲$، مقدار m چند باشد تا معادله غیرممکن شود؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ± ۲ ۴) هیچکدام

$$\begin{cases} a = ۰ \Rightarrow m = \pm ۲ \\ b \neq ۰ \Rightarrow m = -۲ \end{cases} \overset{\text{جواب غیرمشترک}}{\Rightarrow} m = ۲$$

۲ـ معادلهٔ درجه دوم: هر معادلهٔ درجهٔ دوم را در حالت کلی می‌توان به صورت $ax^۲ + bx + c = ۰$ $(a \neq ۰)$ نشان داد. در این معادله b یا c یا هر دوی آنها، می‌توانند صفر باشند که در هر یک از این حالتها، معادله را یک معادلهٔ درجه دوم ناقص می‌گویند.

حل معادلات درجهٔ دوم ناقص:

الف) اگر $c = ۰$ باشد، آنگاه معادله از طریق فاکتورگیری حل می‌شود.

$$ax^۲ + bx = ۰ \Rightarrow x(ax + b) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

ب) اگر $b=0$ باشد آنگاه:

I) اگر a و c مختلف العلامه باشند، معادله دو ریشهٔ قرینه دارد که عبارتند از: $\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ در واقع:

$$ax^2+c=0 \Rightarrow x^2=\frac{-c}{a} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

II) اگر a و c متحدالعلامه (همعلامت) باشند، معادله در این حالت ریشهٔ حقیقی ندارد.

ج) اگر $b=c=0$، در این حالت معادله دارای ریشهٔ مضاعف $x=0$ است.

$$ax^2=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x\times x= \begin{cases} x=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow x=0$$ ریشه‌ی مضاعف

حل معادلهٔ درجه دوم در حالت کلی: (دستور b یا دستور Δ)

برای حل یک معادلهٔ درجهٔ دوم در حالت کلی، مبین (Δ) معادله را حساب کرده و به صورت زیر عمل کنیم.

$$\Delta = b^2-4ac$$

الف) $\text{if } \Delta > 0 \Rightarrow$ معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است. $\Rightarrow x',x''=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

ب) $\text{if } \Delta = 0 \Rightarrow$ معادله دارای دو ریشه‌ی مساوی و یا یک ریشهٔ حقیقی مضاعف است. $\Rightarrow x'=x''=\frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}=\frac{-b}{2a}$

ج) $\text{if } \Delta < 0 \Rightarrow$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد. (البته معادله در این حالت دو ریشهٔ مختلط دارد).

تذکر: دستور b' یا دستور Δ': اگر ضریب x معادلهٔ درجه دوم، یعنی b زوج باشد، می‌توان برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم، از دستور b' یا دستور Δ' استفاده کرد (b' نصف b است) در این صورت محاسبات آسانتر می‌شوند.

$$\begin{cases} b'=\frac{b}{2} \\ \Delta'=b'^2-ac=\frac{1}{4}\Delta \end{cases}$$

الف) $\text{if } \Delta' > 0 \Rightarrow$ معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد. $\Rightarrow x',x''=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$

ب) $\text{if } \Delta' = 0 \Rightarrow$ معادله دارای دو ریشه مساوی و یا یک ریشهٔ حقیقی مضاعف است. $\Rightarrow x',x''=\frac{-b\pm\sqrt{0}}{a}=\frac{-b}{a}$

ج) $\text{if } \Delta' < 0 \Rightarrow$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد. (البته معادله در این حالت دو ریشهٔ مختلط دارد).

تذکر: در حالت خاص، یعنی زمانی که b زوج باشد، فرقی نمی‌کند که معادله را از دستور b حل کنیم یا از دستور b' جوابهای بدست آمده در هر دو حالت یکی هستند.

بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم:

توجه داشته باشید که s و p در زیر به ترتیب مجموع و حاصلضرب ریشه‌ها می‌باشند.

$$\left(p=x'x''=\frac{c}{a} \quad ,s=x'+x''=\frac{-b}{a}\right)$$

حالت اول $\text{if } \Delta$ یا $\Delta' > 0 \Rightarrow$ معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد. (با فرض $x' < x''$)

- ۱) $\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow$ دو ریشه متحدالعلامه‌اند.
- ۲) $\frac{c}{a} < 0$ $(x' < 0 < x'')$ دو ریشه مختلف العلامه‌اند
- ۳) $\frac{c}{a} = 0 \Rightarrow$ یک ریشه صفر و ریشهٔ دیگر $\frac{-b}{a}$ است.

۱) $\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow$
- $s = \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow 0 < x' < x''$ هر دو ریشه مثبت‌اند
- $s = \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow x' < x'' < 0$ هردو ریشه منفی‌اند

۲) $\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow$
- $s = \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \begin{cases} x' < 0 < x'' \\ |x''| > |x'| \end{cases}$ قدر مطلق ریشهٔ مثبت بزرگتر است.
- $s = \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \begin{cases} x' < 0 < x'' \\ |x'| > |x''| \end{cases}$ قدر مطلق ریشهٔ منفی بزرگتر است.
- $s = \frac{-b}{a} = 0 \Rightarrow \{x' = -x''$ دو ریشه قرینه‌اند.

۳) $\frac{c}{a} = 0 \Rightarrow$
- $s = \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow x' = 0 < x''$
- $s = \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow x' < 0 = x''$

حالت دوم: $\text{if } \Delta$ یا $\Delta' = 0 \Rightarrow x' = x'' = \frac{-b}{2a} \Rightarrow$ معادله دو ریشه‌ی حقیقی مساوی دارد

- $s = \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow 0 < x' = x''$ ریشهٔ مضاعف مثبت است.
- $s = \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow x' = x'' < 0$ ریشهٔ مضاعف منفی است.
- $s = \frac{-b}{a} = 0 \Rightarrow x' = x'' = 0$ ریشهٔ مضاعف صفر است.

حالت سوم: $\text{if } \Delta$ یا $\Delta' < 0 \Rightarrow$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

نکاتی مهم راجع به معادلهٔ درجهٔ دوم:

۱) اگر در یک معادلهٔ درجهٔ دوم، مجموع ضرائب صفر باشد، یکی از ریشه‌ها برابر ۱ بوده و ریشهٔ دیگر برابر $\frac{c}{a}$ خواهد بود.

$ax^2 + bx + c = 0$

$\text{if } a + b + c = 0 \quad x' = 1, \quad x'' = \frac{c}{a}$

مثال: ریشه‌های معادلات زیر را بیابید؟

الف) $7x^2 - 8x + 1 = 0 \quad x' = 1, \quad x'' = \frac{1}{7}$

ب) $(\sin^2\alpha)x^2 - x + \cos^2\alpha = 0$ (a، b، c)

$$\sin^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 0 \quad \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = \frac{c}{a} = \cot^2\alpha \end{cases}$$

۲) هرگاه در معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c = 0$، داشته باشیم: $a + c = b$، آنگاه یکی از ریشه‌های معادله برابر ۱− بوده و ریشهٔ دیگر برابر $-\frac{c}{a}$ خواهد بود.

مثال: ریشه‌های معادلهٔ زیر را بیابید؟

الف) $81x^2 + 100x + 19 = 0$

$$a + c = b \quad \begin{cases} x' = -1 \\ x'' = -\frac{c}{a} = -\frac{19}{81} \end{cases}$$

ب) $(2+\sqrt{3})x^2 + 4x + 2 - \sqrt{3} = 0$

$$a + c = b \quad \begin{cases} x' = -1 \\ x'' = -\frac{c}{a} = -\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \end{cases}$$

تست: یکی از ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 + (a+b+c)x + b + c = 0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) $\frac{c}{a}$ ۴) $-\frac{c}{a}$

$$a + c = b \Rightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ x'' = -\frac{c}{a} = -\frac{b+c}{a} \end{cases}$$

۳ـ اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c = 0$، صفر باشد، ریشهٔ دیگر $\frac{-b}{a}$ است.

۴ـ شرط اینکه یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم، به سمت بی‌نهایت میل کند، آنستکه $a \to 0$ میل کند.

تست: اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $(m+2)x^2 - x + 2m = 0$ به سمت بی‌نهایت میل کند ریشه‌ی دیگر معادله کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۴ ۳) ۴− ۴) ۲−

$a = 0 \Rightarrow m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2$ جایگذاری $\Rightarrow (-2+2)x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow x = -4$ ریشهٔ دیگر

۵ـ مجموع ریشه‌ها، حاصلضرب ریشه‌ها و قدر مطلق تفاضل ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم را به ترتیب با s و p و D نمایش داده و داریم:

$$\begin{cases} s = x' + x'' = \frac{-b}{a} \\ p = x'.x'' = \frac{c}{a} \\ D = |x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \end{cases}$$

تست: اگر loga و logb ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + 2mx - 3 = 0$ باشند، مقدار $\frac{\log ab}{\log a \log b}$ کدام است؟

۱) $-\frac{2m}{3}$ ۲) $\frac{3m}{2}$ ۳) $\frac{2}{3m}$ ۴) $\frac{2m}{3}$

$$\frac{\log ab}{\log a.\log b}=\frac{\log a+\log b}{\log a.\log b}=\frac{s}{p}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-b}{c}=-\frac{۲m}{-۳}=\frac{۲m}{۳}$$

تست: اگر $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+qx-۳=۰$ باشند، $\tan(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۱) $\frac{q}{۳}$ ۲) $\frac{-q}{۴}$ ۳) $\frac{q}{۴}$ ۴) $\frac{-q}{۳}$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{s}{۱-p}=\frac{-q}{۱-(-۳)}=\frac{-q}{۴}$$

۶ـ اگر مجموع و حاصلضرب دو عدد معلوم باشند (s و p معلوم باشند) می‌توان آن دو عدد را از حل معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲-sx+p=۰$ بدست آورد.

مثال: مجموع دو عدد حقیقی ۱- و حاصلضربشان $\sqrt{۳}-۳$ است، آن دو عدد را بیابید؟

$$x^۲-sx+p=۰\Rightarrow x^۲+x+\sqrt{۳}-۳=۰\Rightarrow x=\frac{-۱\pm\sqrt{۱-(\sqrt{۳}-۳)^۲}}{۲}=\frac{-۱\pm\sqrt{(۲\sqrt{۳}-۱)^۲}}{۲}=\begin{cases}x_۱=\sqrt{۳}-۱\\ x_۲=-\sqrt{۳}\end{cases}$$

۷ـ رابطهٔ s_iها در معادلهٔ درجهٔ دوم: فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases}s_۱=x'+x''\\ s_۲=x'^۲+x''^۲\\ s_۳=x'^۳+x''^۳\\ s_{n-۱}=x'^{n-۱}+x''^{n-۱}\\ s_n=x'^n+x''^n\end{cases}$$

در این صورت همواره داریم: $as_n+bs_{n-۱}+cs_{n-۲}=۰\ (n>۲)\ (*)$

اثبات فرمول (*)

$$ax^۲+bx+c=۰\overset{\times x^{n-۲}}{\Rightarrow}ax^n+bx^{n-۱}+cx^{n-۲}=۰$$

حال x' را به جای x می‌گذاریم. $\Rightarrow ax'^n+bx'^{n-۱}+cx'^{n-۲}=۰$

حال x'' را به جای x می‌گذاریم. $\Rightarrow ax''^n+bx''^{n-۱}+cx''^{n-۲}=۰$

$$a(x'^n+x''^n)+b(x'^{n-۱}+x''^{n-۱})+c(x'^{n-۲}+x''^{n-۲})=۰$$

$$as_n+bs_{n-۱}+cs_{n-۲}=۰$$

تست: در معادلهٔ $x^۲-۲x-۱=۰$ اگر $s_{۱۰}=x'^{۱۰}+x''^{۱۰}=n$ باشد، مقدار $s_{۳۰}$ برابر است با:

۱) $n^۳-۳$ ۲) $n^۳-n$ ۳) $n^۳+۳n$ ۴) $n^۳-۳n$

$$x'^{۱۰}+x''^{۱۰}=n\xrightarrow{\text{به توان ۳ می‌رسانیم.}}x'^{۳۰}+x''^{۳۰}+۳x'^{۱۰}x''^{۱۰}(x'^{۱۰}+x''^{۱۰})=n^۳$$

$$(a+b)^۳=a^۳+b^۳+۳ab(a+b)$$

$$s_{۳۰}+۳(x'x'')^{۱۰}s_{۱۰}=n^۳\Rightarrow s_{۳۰}=n^{۳۰}+۳(-۱)^{۱۰}(n)=n^۳-۳n$$

۸ـ محاسبهٔ عبارات متقارن برحسب ریشه‌ها، بدون حل معادلهٔ درجهٔ دوم:

$x' + x'' = s$

$x'.x'' = p$

$x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = s^2 - 2p$

$x'^3 + x''^3 = (x' + x'')^3 - 3x'x''(x' + x'') = s^3 - 3ps$

$x'^4 + x''^4 = (x'^2 + x''^2)^2 - 2x'^2x''^2 = (s^2 - 2p)^2 - 2p^2$

$x'^{-1} + x''^{-1} = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{x'' + x'}{x'x''} = \frac{s}{p}$

$x'^{-2} + x''^{-2} = \frac{1}{x'^2} + \frac{1}{x''^2} = \frac{x''^2 + x'^2}{(x'x'')^2} = \frac{s^2 - 2p}{p^2}$

$x'^{-3} + x''^{-3} = \frac{s^3 - 3ps}{p^3}$

$x'^{-4} + x''^{-4} = \frac{(S^2 - 2p)^2 - 2p^2}{p^4}$

$|x' - x''| = D = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$

$|x'^2 - x''^2| = |(x' + x'')(x' - x'')| = \left| s.\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \right|$

$|x'^3 - x''^3| = |(x' - x'')(x'^2 + x'x'' + x''^2)| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}(s^2 - p) \right|$

$|x'^4 - x''^4| = |(x'^2 + x''^2)(x'^2 - x''^2)| = \left| (s^2 - 2p).\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} s \right|$

$x'x''^2 + x''x'^2 = x'x''(x'' + x') = ps$

$\frac{x'}{x''} + \frac{x''}{x'} = \frac{x'^2 + x''^2}{x'x''} = \frac{s^2 - 2p}{p}$

$\begin{cases} x' > 0 \\ , \\ x'' > 0 \end{cases} \to \sqrt{x'} + \sqrt{x''} = \sqrt{(\sqrt{x'} + \sqrt{x''})^2} = \sqrt{x' + x'' + 2\sqrt{x'x''}} = \sqrt{s + 2\sqrt{p}}$

$\begin{cases} x' > 0 \\ , \\ x'' > 0 \end{cases} \to |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \sqrt{(\sqrt{x'} - \sqrt{x''})^2} = \sqrt{x' + x'' - 2\sqrt{x'x''}} = \sqrt{s - 2\sqrt{p}}$

$\begin{cases} x' > 0 \\ , \\ x'' > 0 \end{cases} \to \frac{\sqrt{x'}}{\sqrt{x''}} + \frac{\sqrt{x''}}{\sqrt{x'}} = \frac{x' + x''}{\sqrt{x'x''}} = \frac{s}{\sqrt{p}}$

تست: اگر x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $mx^2-2(m+1)x+m=0$ باشند، m چند باشد تا داشته باشیم $x'+2x''=3$

۱) ۴ ۲) ۴- ۳) ۲ ۴) ۲-

$$\begin{cases} x'+2x''=3 \\ x'+x''=s=\frac{2(m+1)}{m} \\ x'x''=p=1 \end{cases} \overset{\text{از حل دستگاه}}{\Rightarrow} m=4$$

چگونگی حل دستگاه:

$$-\begin{cases} x'+2x''=3 \\ x'+x''=\frac{2m+2}{m} \end{cases} \Rightarrow x''=\frac{m-2}{m} \rightarrow x'=\frac{m+4}{m}$$

$$x'x''=1 \Rightarrow \frac{m-2}{m}\times\frac{m+4}{m}=1 \Rightarrow m^2+2m-8=m^2 \Rightarrow m=4$$

۹ـ هرگاه در یک معادلهٔ درجهٔ دوم $b=0$ باشد و a و c مختلف العلامه باشند، معادله دو ریشهٔ قرینه خواهد داشت.

تست: m چند باشد، تا معادلهٔ زیر دو ریشهٔ قرینه داشته باشد؟

۱) ± 3 ۲) ± 9 ۳) ۹ ۴) ۹-

$$9x^2+(m^2-81)x+m-5=0$$

$$\begin{cases} b=0 \Rightarrow m=\pm 9 \\ ac<0 \overset{a=9>0}{\Rightarrow} c<0 \Rightarrow m-5<0 \Rightarrow m<5 \end{cases} \Rightarrow m=-9 \text{ قابل قبول}$$

۱۰ـ هرگاه در یک معادلهٔ درجهٔ دوم، a و c مختلف العلامه باشند ($p=\frac{c}{a}<0$) معادله حتماً دارای دو ریشه متمایز مختلف العلامه خواهد بود. (زیرا در این حالت $\Delta=b^2-4ac$ همواره مثبت می‌شود)

مثال: k را چنان بیابید تا معادلهٔ درجهٔ دوم زیر همواره دو ریشه مختلف العلامه داشته باشد؟

$$-3x^2+4x+(k^2-1)=0 \Rightarrow \frac{c}{a}<0 \overset{a<0}{\Rightarrow} c>0 \Rightarrow$$

$k^2-1>0 \Rightarrow k<-1$ یا $k>1$

تست: حدود m چند باشد تا معادلهٔ $2(\sqrt{2}+1)x^2-4mx+(2m-6)=0$ دو ریشهٔ مختلف العلامه داشته باشد؟

۱) $m>3$ ۲) $m<3$ ۳) $m>6$ ۴) $m<6$

$$\frac{c}{a}<0 \overset{a>0}{\Rightarrow} c<0 \Rightarrow 2m-6<0 \Rightarrow m<3$$

۱۱ـ هرگاه در یک معادلهٔ درجهٔ دوم، $a=c$ باشد، ریشه‌های معادله (در صورت وجود)، معکوس یکدیگر خواهند بود.

تست: ریشه‌های کدام معادله معکوس یکدیگرند؟

۱) $3x^2+2x-5=0$ ۲) $\sqrt{2}x^2+(2+\sqrt{2})x+2=0$

۳) $2x^2+7x-2=0$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}x^2+10x+\sqrt{2}+1=0$

حل: گزینه‌ی (۴) صحیح است زیرا: $a=c \quad , \quad \frac{۱}{\sqrt{۲}-۱}=\sqrt{۲}+۱$

۱۲ـ اگر در معادلهٔ درجهٔ دوم داشته باشیم: $a=-c$، آنگاه ریشه‌های معادله عکس و قرینهٔ یکدیگرند.

۱۳ـ اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم، k برابر ریشه دیگر باشد، آنگاه:

$kb^۲=(k+۱)^۲ac$ یا $\frac{b^۲}{ac}=\frac{(k+۱)^۲}{k}$

تست: اگر در معادلهٔ درجه دوم، $x^۲-(m+۵)x+۱۶=۰$، یکی از ریشه‌ها، چهار برابر ریشهٔ دیگر باشد، m برابر است با:

۱) ۱۵– و ۵ ۲) ۱۰ و ۵ ۳) ۱۰– و ۵ ۴) ۱۵ و ۵

حل: $\frac{b^۲}{ac}=\frac{(k+۱)^۲}{k}\Rightarrow\frac{(m+۵)^۲}{۱۶}=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow(m+۵)^۲=۱۰۰$

$m+۵=\pm۱۰ \begin{cases} m=-۱۵ \\ m=۵ \end{cases}$

۱۴ـ اگر ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ به ترتیب x و $x+d$ باشند، آنگاه: $\Delta=a^۲d^۲$

۱۵ـ اگر ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ دو عدد صحیح متوالی باشند، آنگاه ریشهٔ کوچکتر برابر است با: $x'=-\frac{(a+b)}{۲a}$ و ضمناً $\Delta=a^۲$ واضح است که در اینحالت $x'+x''=\frac{-b}{a}\Rightarrow x'+x'+۱=\frac{-b}{a} \Rightarrow$

$x''=\frac{-(a+b)}{۲a}+۱$

تست: اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^۲+px+q=۰$ دو عدد صحیح متوالی باشند، همواره داریم:

۱) $p^۲=۴q$ ۲) $p^۲+۴q=۱$ ۳) $p^۲=-۴q$ ۴) $p^۲-۴q=۱$

حل: $\Delta=a^۲$ لذا: $p^۲-۴q=۱$

۱۶ـ اگر در معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$، $a\to۰$ میل کند، یکی از ریشه‌ها به سمت ∞ و اگر b نیز به سمت صفر میل کند و $c\neq۰$ آنگاه هر دو ریشهٔ معادله به سمت ∞ میل می‌کنند.

تست: به ازاء کدام مقدار m، فقط یک ریشهٔ معادلهٔ $(m^۳-m)x^۲+(m^۲-m)x+۴=۰$ به سمت ∞ میل می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۱– ۳) ۰ ۴) ۱– و ۱ و ۰

$\begin{cases} a=۰\Rightarrow m=۰,\pm۱ \\ b\neq۰\Rightarrow m=۰,۱ \end{cases} \overset{\text{جواب غیرمشترک}}{\Rightarrow} m=-۱$

۱۷ـ اگر $p+iq$ $(i=\sqrt{-۱}, p,q\in R)$ یک ریشهٔ مختلط معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ باشد، ریشهٔ دیگر معادله حتماً $p-iq$ خواهد بود.

تست: معادلهٔ درجهٔ دومی که یک ریشهٔ آن $۳+۲i$ باشد، کدام است؟

۱) $x^۲+۳x+۱۳=۰$ ۲) $x^۲-۳x+۱۳=۰$ ۳) $x^۲+۶x+۱۳=۰$ ۴) $x^۲-۶x+۱۳=۰$

حل: می‌دانیم ریشهٔ دیگر $۳-۲i$ خواهد بود لذا:

روش اول: $\left(x-(۳+۲i)\right)\left(x-(۳-۲i)\right)=۰\Rightarrow x^۲-۶x+(۹-۴i^۲)=۰\Rightarrow x^۲-۶x+۱۳=۰$

روش دوم: $\begin{matrix} s = x' + x'' = ۶ \\ p = x'.x'' = ۱۳ \end{matrix} \Rightarrow x^۲ - sx + p = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۶x + ۱۳ = ۰$

۱۸ـ اگر $p + \sqrt{q}$ ($P \in Q$ و $q \in Q$ و q جذر کامل ندارد) یک ریشهٔ معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشد، آنگاه ریشهٔ دیگر معادله $p - \sqrt{q}$ خواهد بود.

تست: معادلهٔ درجهٔ دومی با ضرائب گویا، که یک ریشه آن $\sqrt{۳} - ۲$ باشد، کدام است؟

۱) $x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$ ۲) $x^۲ + ۴x + ۱ = ۰$ ۳) $x^۲ - ۴x - ۱ = ۰$ ۴) $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$

حل: واضح است که ریشهٔ دیگر $\sqrt{۳} + ۲$ خواهد بود لذا:

$$\begin{cases} s = ۴ \\ p = ۱ \end{cases} \Rightarrow x^۲ - sx + p = ۰ \rightarrow x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$$

۱۹ـ در یک معادله، با ضرائب اصم، ریشه‌های اصم ممکن نیست به تعداد زوج ظاهر شوند، به عبارت دیگر تعداد ریشه‌های اصم چنین معادله‌ای همیشه فرد است.

مثال: ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - (\sqrt{۲} + ۳)x + ۳\sqrt{۲} = ۰$ عبارتند از: $\sqrt{۳}, ۲$

مثال: معادله‌ای از کمترین درجه با ضرائب گویا تشکیل دهید که $\sqrt{۳} + ۲$, $\sqrt{۲} + ۳$، دو ریشهٔ آن باشند؟

حل: واضح است که $\sqrt{۳} - ۲$, $\sqrt{۲} - ۳$ نیز، الزاماً دو ریشهٔ دیگر معادله بوده، بنابراین معادلهٔ مزبور، حداقل بایستی دارای چهار ریشه باشد یعنی $\sqrt{۳} \pm ۲$, $\sqrt{۲} \pm ۳$، لذا معادلهٔ مطلوب به صورت زیر خواهد بود.

$$\left(x - (۳ + \sqrt{۲})\right) + \left(x - (۳ - \sqrt{۲})\right) \left(x - (۲ + \sqrt{۳})\right) \left(x - (۲ - \sqrt{۳})\right) = ۰$$

$$\Rightarrow (x - ۳ - \sqrt{۲})(x - ۳ + \sqrt{۲})(x - ۲ - \sqrt{۳})(x - ۲ + \sqrt{۳}) = ۰$$

$\left[(x - ۳)^۲ - ۲\right] \left[(x - ۲)^۲ - ۳\right] = ۰ \Rightarrow x^۴ - ۱۰x^۳ + ۳۲x^۲ - ۳۴x + ۱۷ = ۰$ معادله مطلوب

۲۰ـ اگر مبین (دلتای) یک معادلهٔ درجهٔ دوم، منفی باشد، آن معادله را می‌توان به صورت مجموع دو مربع کامل نوشت:

$$ax^۲ + bx + c = a(x^۲ + \frac{b}{a}x + \frac{b^۲}{۴a^۲} - \frac{b^۲}{۴a^۲}) + c = a(x + \frac{b}{۲a})^۲ + \frac{-(b^۲ - ۴ac)}{۴a}$$

$$= a(x + \frac{b}{۲a})^۲ + \frac{-\Delta}{۴a} = [\sqrt{a}(x + \frac{b}{۲a})]^۲ + (\frac{\sqrt{-\Delta}}{۲\sqrt{a}})^۲$$

مثال: $p = x^۲ - ۲x + ۵ \Rightarrow \quad \Delta = ۴ - ۲۰ < ۰$

$p = (x - ۱)^۲ + ۴ \Rightarrow p = (x - ۱)^۲ + ۲^۲$

۲۱ـ اگر در معادلهٔ درجهٔ دوم داشته باشیم: $a + b = c$، آنگاه $s + p = ۱$

۲۲ـ تجزیه و تعیین علامت سه جمله‌ایهای درجهٔ دوم: $f(x) = ax^۲ + bx + c$

حالت اول: اگر $\Delta > ۰$، معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز x' و x'' است و در این حالت به صورت زیر تجزیه می‌شود.

$f(x) = a(x - x')(x - x'')$

جدول تعیین علامت در حالت $\Delta > 0$:

x	$-\infty$	x'		x''	$+\infty$
$f(x)$	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

حالت دوم: اگر $\Delta = 0$، معادله یک ریشه حقیقی مضاعف دارد یعنی $x' = x'' = \frac{-b}{2a}$ و به صورت $a(x - x'')^2$ یا $f(x) = a(x - x')^2$ تجزیه می‌شود.

جدول تعیین علامت در حالت $\Delta = 0$:

x	$-\infty$	$x' = x'' = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

نتیجه: اگر $\begin{cases} \Delta = 0 \\ a > 0 \end{cases}$ آنگاه همواره $f(x) \geq 0$ و اگر $\begin{cases} \Delta = 0 \\ a < 0 \end{cases}$ آنگاه همواره $f(x) \leq 0$.

حالت سوم: اگر $\Delta < 0$، آنگاه معادله ریشهٔ حقیقی ندارد، لذا تجزیه نیز نمی‌شود. اما همانطوریکه در نکتهٔ ۲۰ بیان شد، معادله را می‌توان در این حالت به صورت مجموع دو مربع کامل در آورد.

جدول تعیین علامت در حالت $\Delta < 0$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	موافق علامت a	

نتیجهٔ مهم: اگر $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ آنگاه همواره $f(x) > 0$ و اگر $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$ آنگاه همواره $f(x) < 0$ لذا یک سه جمله‌ای درجهٔ دوم زمانی همواره مثبت است $(\forall x \in R: f(x) > 0)$ که $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$ باشد و زمانی همواره منفی است $(\forall x \in R: f(x) < 0)$ که $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$ باشد.

مثال: ثابت کنید به ازاء هر عدد حقیقی x، $-x^2 + x - 10 < 0$

$$\begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 40 = -39 < 0 \end{cases}$$

تست: به ازاء چه مقادیری از m، همواره $(\forall x \in R)$ داریم: $(m - 1)x^2 - 2mx + (m - 2) < 0$

۱) $m < 1$ ۲) $m < \frac{1}{3}$ ۳) $m < \frac{2}{3}$ ۴) $m > 1$

$$\begin{cases} \Delta' < 0 \Rightarrow m^2 - (m-1)(m-2) < 0 \Rightarrow m < \frac{2}{3} \\ a < 0 \Rightarrow m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{جواب مشترک}} m < \frac{2}{3}$$

۲۳ـ حل معادلات تبدیل‌پذیر به معادلهٔ درجهٔ دوم:

مثال: معادلهٔ $(x^۲ + x + ۲)(x^۲ + x + ۳) = ۲۰$ را حل کنید؟

حل: فرض می‌کنیم. $x^۲ + x = y$

$$\Rightarrow (y + ۲)(y + ۳) = ۲۰ \Rightarrow y^۲ + ۵y - ۱۴ = ۰$$

$$(y + ۷)(y - ۲) = ۰ \begin{cases} y = -۷ \\ y = ۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^۲ + x = -۷ \Rightarrow x^۲ + x + ۷ = ۰ \Rightarrow \Delta < ۰ \Rightarrow \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد} \\ x^۲ + x = ۲ \Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰ \overset{a+b+c=۰}{\Rightarrow} \begin{cases} x' = ۱ \\ x'' = \frac{c}{a} = -۲ \end{cases} \end{cases}$$

نکته: حل معادلات به صورت $ax^{۲n} + bx^n + c = ۰$ $(n \in N)$،

مثال: معادله $۵x^{۱۰۰} + ۲x^{۵۰} - ۷ = ۰$ را حل کنید؟

حل: فرض می‌کنیم $y = x^{۵۰}$ لذا:

$$۵y^۲ + ۲y - ۷ = ۰$$

$$a + b + c = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y' = ۱ \Rightarrow x^{۵۰} = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱ \\ y'' = \frac{c}{a} = \frac{-۷}{۵} \Rightarrow x^{۵۰} = -\frac{۷}{۵} \text{ ریشه حقیقی ندارد.} \end{cases}$$

تست: ریشهٔ معادله $(\sqrt{۲} - ۱)^{\tan x} + (\sqrt{۲} + ۱)^{\tan x} = ۲$ کدام است؟

۱) $x = ۲k\pi$ ۲) $x = k\pi$ ۳) $x = (۲k + ۱)\pi$ ۴) $x = \frac{k\pi}{۲}$

حل: با توجه به $\frac{۱}{\sqrt{۲} - ۱} = ۱ + \sqrt{۲}$ داریم:

$$(\sqrt{۲} - ۱)^{\tan x} + \left(\frac{۱}{\sqrt{۲} - ۱}\right)^{\tan x} = ۲$$

حال فرض می‌کنیم $y = (\sqrt{۲} - ۱)^{\tan x}$ لذا:

$$y + \frac{۱}{y} = ۲ \Rightarrow y^۲ - ۲y + ۱ = ۰ \Rightarrow (y - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow y = ۱$$

$$\Rightarrow (\sqrt{۲} - ۱)^{\tan x} = ۱ \Rightarrow (\sqrt{۲} - ۱)^{\tan x} = (\sqrt{۲} - ۱)^{۰} \Rightarrow \tan x = ۰ \Rightarrow x = k\pi, k \in z$$

۲۴ـ برای اینکه معادله‌ای بنویسیم که ریشه هایش عکس ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشد، کافی است جای a و c را عوض کنیم.

مثال: معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲ + ۵x - ۱۱ = ۰$ باشد؟

حل: کافی است جای a و c را عوض کنیم. $-۱۱x^۲ + ۵x + ۲ = ۰$

۲۵ـ برای آنکه معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشد، کافی است علامت b را عوض کنیم.

۲۶ـ برای آنکه معادله‌ای بنویسیم که ریشه هایش عکس و قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشد، کافی است جای a و c را عوض کرده و علامت b را نیز عوض کنیم.

۲۷ـ برای آنکه معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش k برابر ریشه‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ باشد، کافی است b را در k و c

را در k^2 ضرب کنیم. لذا ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 + bkx + ck^2 = 0$، k برابر ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ است.

تست: معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌هایش ۳ برابر ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 + 3x - 1 = 0$ باشد، کدام است؟

۱) $2x^2 + 9x + 3 = 0$ ۲) $2x^2 + 3x - 9 = 0$ ۳) $2x^2 + 9x - 9 = 0$ ۴) $2x^2 + 27x - 3 = 0$

حل: کافی است b را در ۳ و c را در ۹ ضرب کنیم، بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

تست: معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌هایش نصف ریشه‌های معادلهٔ $2x^2 + 3x - 7 = 0$ باشد، کدام است؟

۱) $4x^2 + 3x - 7 = 0$ ۲) $8x^2 + 3x - 7 = 0$ ۳) $x^2 + 6x - 14 = 0$ ۴) $8x^2 + 6x - 7 = 0$

حل: کافی است b را در $\frac{1}{2}$ و c را در $\frac{1}{4}$ ضرب کنیم لذا خواهیم داشت:

$$2x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{7}{4} = 0 \quad \overset{\times 4}{\Rightarrow} 8x^2 + 6x - 7 = 0$$

۲۸ـ معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ مفروض است.

برای اینکه معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش

الف) α واحد از ریشه‌های معادله داده شده بیشتر باشد، کافی است x را به $x - \alpha$ تبدیل کنیم.

ب) α واحد از ریشه‌های معادله داده شده کمتر باشد، کافی است x را به $x + \alpha$ تبدیل کنیم.

ج) α برابر ریشه‌های معادلهٔ مفروض باشد، کافی است x را به $\frac{x}{\alpha}$ تبدیل کنیم.

د) $\frac{1}{\alpha}$ برابر $(\alpha \neq 0)$ ریشه‌های معادلهٔ مفروض باشد، کافی است x را به αx تبدیل کنیم.

هـ) ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادله مفروض باشد، کافی است x را به، $\sqrt{x}$ تبدیل کنیم.

و) ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های معادله مفروض باشد، کافی است x را به، $\sqrt[3]{x}$ تبدیل کنیم.

ز) ریشه‌هایش قرینهٔ ریشه‌های معادله مفروض باشد، کافی است x را به، $-x$ تبدیل کنیم.

ح) ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله مفروض باشد، کافی است x را به، $\frac{1}{x}$ تبدیل کنیم.

ی) ریشه‌هایش عکس و قرینهٔ ریشه‌های معادله مفروض باشد، کافی است x را به، $\frac{-1}{x}$ تبدیل کنیم.

مثال: (مربوط به قسمت «و»): معادلهٔ $x^2 - 4x - 1 = 0$ مفروض است، معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌هایش مکعب ریشه‌های معادلهٔ فوق باشد عبارتست از:

۱) $x^2 - 32x - 4 = 0$ ۲) $x^2 - 64x - 1 = 0$ ۳) $x^2 - 52x - 1 = 0$ ۴) $x^2 - 76x - 1 = 0$

حل: کافی است x را به $\sqrt[3]{x}$ تبدیل کنیم.

$$(\sqrt[3]{x})^2 - 4\sqrt[3]{x} - 1 = 0$$

$$\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} - 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0 \ \Rightarrow \ a^3+b^3+c^3=3abc}$$

$$(\sqrt[3]{x^2})^3 + (-4\sqrt[3]{x})^3 + (-1)^3 = 3\sqrt[3]{x^2}(-4\sqrt[3]{x})(-1)$$

$$x^2 - 64x - 1 = 12x \Rightarrow x^2 - 76x - 1 = 0$$

مثال: معادلهٔ $x^۲ + ۷x - ۱ = ۰$ مفروض است، معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه هایش از نصف ریشه‌های معادلهٔ مفروض، یک واحد کمتر باشد، کدام است؟

۱) $۴x^۲ + ۲۲x - ۷ = ۰$ ۲) $۴x^۲ + ۶x - ۱۱ = ۰$ ۳) $۴x^۲ + ۲۲x + ۱۷ = ۰$ ۴) $x^۲ + ۱۱x + ۷ = ۰$

حل: کافی است x را به $۲(x + ۱)$ تبدیل کنیم. $(۲x + ۲)^۲ + ۷(۲x + ۲) - ۱ = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ + ۲۲x + ۱۷ = ۰$

مثال: معادلهٔ $x^۲ - ۵x - ۲ = ۰$ مفروض است، اگر x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ مفروض باشند، معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌هایش $۲x' + ۳x'' - ۴$ و $۲x'' + ۳x' - ۴$ باشند؟

$$x^۲ - ۵x - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} s = \frac{-b}{a} = ۵ \\ p = \frac{c}{a} = -۲ \end{cases}$$

حل: فرض می‌کنیم y ریشهٔ معادلهٔ مطلوب باشد لذا:

$$y = ۲x' + ۳x'' - ۴ = ۲\underbrace{(x' + x'')}_{s=۵} + x'' - ۴ = x'' + ۶ \Rightarrow x'' = y - ۶$$

لذا کافی است x را به $x - ۶$ تبدیل کنیم.

$$\Rightarrow (x - ۶)^۲ - ۵(x - ۶) - ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۱۷x + ۶۴ = ۰$$

مثال: معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌هایش ۲ واحد بیشتر از ریشه‌های معادلهٔ $۵x^۲ + ۱۴x + ۹ = ۰$ باشد؟

حل: کافی است x را به $x - ۲$ تبدیل کنیم.

$$۵(x - ۲)^۲ + ۱۴(x - ۲) + ۹ = ۰$$

$$۵x^۲ - ۶x + ۱ = ۰$$

امتحان مسأله: $۵x^۲ + ۱۴x + ۹ = ۰ \xrightarrow{a + c = b} x' = -۱ ,\ x'' = \frac{-۹}{۵}$

$$۵x^۲ - ۶x + ۱ = ۰ \xrightarrow{a + b + c = ۰} x' = ۱ ,\ x'' = \frac{c}{a} = \frac{۱}{۵}$$

همانطوریکه دیده می‌شود ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم مطلوب، به ترتیب ۲ واحد بیشتر از ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم داده شده می‌باشند.

راه دوم:

$$۵x^۲ + ۱۴x + ۹ = ۰ \Rightarrow a + c = b \Rightarrow \begin{cases} x' = -۱ \\ x'' = -\frac{۹}{۵} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = -۱ + ۲ = ۱ \\ y'' = -\frac{۹}{۵} + ۲ = \frac{۱}{۵} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = \frac{۶}{۵} \\ p = \frac{۱}{۵} \end{cases} \Rightarrow y^۲ - \frac{۶}{۵}y + \frac{۱}{۵} = ۰ \Rightarrow ۵y^۲ - ۶y + ۱ = ۰$$

۲۹ـ اگر دو معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ و $a'x^۲ + b'x + c' = ۰$ دارای مبین‌های (دلتاهای) مساوی باشند آنگاه $(۲ax + b)^۲ = (۲a'x + b')^۲$

۳۰ـ برای آنکه دو معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ و $a'x^۲+b'x+c'=۰$ دارای یک ریشهٔ مشترک (مساوی) باشند، باید تساوی زیر برقرار باشد.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}^۲$$

در این حالت نسبت بین دو ریشهٔ غیرمشترک از دستور زیر به دست می‌آید. $\frac{x''}{x'''}=\frac{ca'}{ac'}$ زیرا $\frac{x'x''}{x'x'''}=\frac{\frac{c}{a}}{\frac{c'}{a'}}=\frac{ca'}{ac'}$

تست: معادلات $x^۲+mx+۱=۰$ و $x^۲+x+m=۰$ در ازاء چه مقدار m دارای یک ریشهٔ مشترک هستند؟

۱) ۳ ۲) ۲- ۳) ۲ ۴) ۳-

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} ۱ & m \\ m & ۱ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۱ & m \\ ۱ & ۱ \end{vmatrix}^۲$$

$$(m-۱)(۱-m^۲)=(۱-m)^۲\Rightarrow m+۱=-۱\Rightarrow m=-۲$$

۳۱ـ برای آنکه دو معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ و $a'x^۲+b'x+c'=۰$ دارای دو ریشهٔ مساوی باشند باید:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

۳۲ـ معادلهٔ $\frac{A^۲}{x-\alpha}+\frac{B^۲}{x-\beta}=m^۲$ که در آن A و B و α و β و m همگی اعداد حقیقی‌اند، دارای هیچ ریشهٔ موهومی نیست.

۳۳ـ شرط لازم و کافی برای آنکه ریشه‌های دو معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ و $a'x^۲+b'x+c'=۰$ معکوس یکدیگر باشند آنستکه: $\frac{a}{c'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{a'}$

۳۴ـ شرط لازم و کافی برای آنکه ریشه‌های دو معادلهٔ $ax^۲+bx+c=$ و $a'x^۲+b'x+c'=۰$ قرینهٔ یکدیگر باشند آنستکه: $\frac{a}{a'}=\frac{-b}{b'}=\frac{c}{c'}$

۳۵ـ شرط اینکه عدد α بین دو ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ باشد آنستکه $af(\alpha)<۰$

۳۶ـ شرط اینکه عدد α خارج دو ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم $f(x)=ax^۲+bx+c$ باشد آنستکه $af(\alpha)>۰$

۳۷ـ اگر مبین (Δ) معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ صفر باشد، سه جمله‌ای مزبور را می‌توان به صورت مربع کامل نوشت.

۳۸ـ اگر مبین (Δ) معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx+c=۰$ کوچکتر از صفر باشد سه جمله‌ای مزبور را می‌توان به صورت مجموع دو مربع کامل نوشت.

۳۹ـ در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$، هرگاه $b=-c$ باشد، آنگاه مجموع ریشه‌ها با ضرب ریشه‌ها برابر می‌شود.

مثال: در معادله‌ی $۲x^۲+x-۱=۰$ چون $b=-c=۱$ لذا $s=p=-\frac{۱}{۲}$

۴۰ـ در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c=۰$، هرگاه $x'=x''^۲$ (یعنی یکی از ریشه‌های معادله مربع ریشه‌ی دیگر باشد) آنگاه $S=\sqrt[۳]{p}+(\sqrt[۳]{p})^۲$، در حالت کلی اگر $x'=x''^n$، آنگاه $S=\sqrt[n+۱]{p}+(\sqrt[n+۱]{p})^n$

نکاتی مختصر راجع به معادله‌ی درجه‌ی سوم:

شکل کلی هر معادله‌ی درجه‌ی سوم کامل به صورت $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ می‌باشد، ریشه‌های این معادله (و به طور کلی هر معادله‌ای) طول نقاط برخورد منحنی نمایش آن، با محور xها می‌باشند. با توجه به نمودار توابع درجه‌ی سوم، می‌توان گفت که نمودار هر معادله‌ی درجه‌ی سوم، محور xها را حداقل در یک نقطه و حداکثر در سه نقطه قطع می‌کند و در نتیجه، هر معادله‌ی درجه‌ی سوم، حداقل یک ریشه و حداکثر سه ریشه حقیقی دارد.

روش تشخیص تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم:

در این روش ابتدا مشتق تابع را حساب می‌کنیم.

الف) اگر مشتق تابع ریشه نداشت، در این صورت یا همواره مثبت است یا همواره منفی، بنابراین تابع در این حالت یا اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی، لذا نمودار تابع در این حالت محور xها را در یک نقطه قطع می‌کند و معادله یک ریشه دارد.

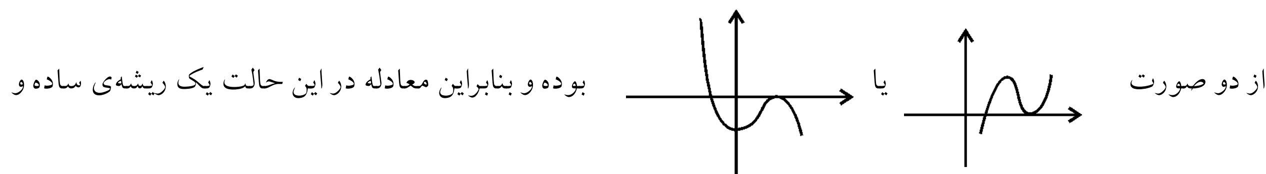
مثال: معادله‌ی $x^3 + x - 7 = 0$ چند ریشه دارد؟

$y' = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow$ تابع اکیداً صعودی است $\Rightarrow$ $\underline{1}$ ریشه دارد.

مثال: معادله‌ی $-x^3 + x^2 - 5x - 1 = 0$ چند ریشه دارد؟

$y' = -3x^2 + 2x - 5 = 0 \begin{cases} \Delta = 4 - 60 < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow y' < 0 \Rightarrow$ تابع اکیداً نزولی است $\Rightarrow$ $\underline{1}$ ریشه دارد

ب) هرگاه مشتق تابع دو ریشه داشته باشد، به طوریکه عرض یکی از این نقاط صفر باشد، در این صورت شکل تابع به یکی از دو صورت



بوده و بنابراین معادله در این حالت یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف دارد، دقت کنید که ریشه‌ی مضاعف، علاوه بر اینکه ریشه‌ی خود معادله است، ریشه‌ی مشتقش نیز می‌باشد.

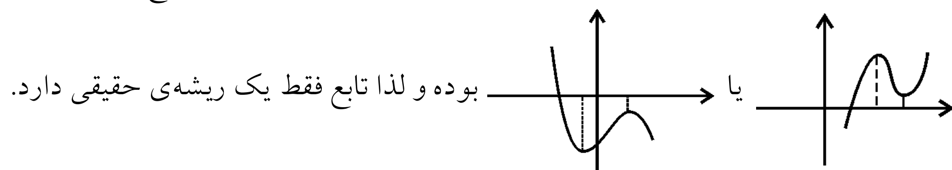
مثال: معادله‌ی $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$ چند ریشه دارد؟

$$y' = 3x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \{f(2) = 0$$

پس معادله در این حالت یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف دارد. ضمناً ریشه‌ی مضاعف معادله $x = 2$ می‌باشد.

ج) هرگاه مشتق تابع دو ریشه داشته باشد، به طوریکه عرض هیچیک از ریشه‌ها، صفر نباشد در این صورت با توجه به شکل تابع که بستگی به عرض این ریشه‌ها دارد، تابع یا یک ریشه و یا سه ریشه متمایز خواهد داشت.

۱) هرگاه عرض ریشه‌های مشتق هر دو مثبت و یا هر دو منفی باشند شکل تابع به یکی از دو صورت



بوده و لذا تابع فقط یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

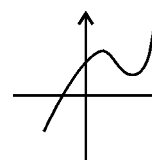
۲) هرگاه عرض ریشه‌های مشتق مختلف العلامه باشند، شکل تابع به یکی از دو صورت

یا بوده و لذا معادله در این حالت ۳ ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

مثال: معادله‌ی $2x^3 - 9x^2 + 12x + 6 = 0$ چند ریشه دارد؟

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = 11 > 0 \\ x = 2 \Rightarrow f(2) = 10 > 0 \end{cases}$$

لذا شکل تابع به صورت



بوده و بنابراین معادله فقط ۱ ریشه دارد.

تذکرات بسیار مهم:

۱) همانند هر معادله‌ی دیگر، هرگاه مجموع ضرائب معادله صفر شود یکی از ریشه‌های معادله $x = 1$ است.

مثال: یک ریشه‌ی معادله‌ی $x^3 + x^2 - 2 = 0$، $x = 1$ است.

۲) هرگاه در معادله‌ی درجه‌ی سوم $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ داشته باشیم، $a + c = b + d$، یکی از ریشه‌های معادله $x = -1$ است.

مثال: یک ریشه‌ی معادله‌ی $x^3 - 2x - 1 = 0$، $x = -1$ است.

۳) در برخی از موارد، می‌توان به کمک دسته‌بندی و فاکتورگیری معادله را حل کرد.

مثال: معادله‌ی $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ را حل کنید؟

$$(x^3 - 4x) - (3x^2 - 12) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) - 3(x^2 - 4) = 0$$

$$(x^2 - 4)(x - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2, 3$$

۴) در برخی از موارد، برای حل یک معادله‌ی درجه‌ی سوم، از تشکیل مکعب کامل به صورت زیر استفاده می‌کنیم.

مثال: معادله‌ی $x^3 + 3x^2 + 3x + 9 = 0$ را حل کنید؟

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 8 = 0 \Rightarrow (x+1)^3 = -8 \Rightarrow x + 1 = -2 \Rightarrow x = -3$$

۵) در برخی از موارد، به کمک تغییر متغیرهای مثلثاتی، می‌توان معادله‌ی درجه سوم را حل کرد.

مثال: معادله‌ی $3x - 4x^3 - 1 = 0$ را حل کنید؟

فرض می‌کنیم $x = \sin\alpha$ داریم:

$$3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \sin 3\alpha = 1$$

$$3\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = \sin\alpha = \sin\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$ ریشه‌ی معادله

از طرفی چون $a + c = b + d$، لذا $x = -1$ یک ریشه‌ی دیگر معادله است، البته $x = \frac{1}{2}$ ریشه‌ی مضاعف معادله است. زیرا

این ریشه، ریشه‌ی مشتق نیز می‌باشد.

مثال: معادله‌ی $x^۳ - ۳\sqrt{۳}x^۲ - ۳x + \sqrt{۳} = ۰$ **را حل کنید؟**

$$\sqrt{۳}(۱ - ۳x^۲) = ۳x - x^۳ \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{۳x - x^۳}{۱ - ۳x^۲}$$

فرض می‌کنیم $x = \tan\alpha$ داریم:

$$\sqrt{۳} = \frac{۳\tan\alpha - \tan^۳\alpha}{۱ - ۳\tan^۲\alpha} \Rightarrow \tan ۳\alpha = \sqrt{۳} \Rightarrow ۳\alpha = k\pi + \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \alpha = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۹}$$

لذا ریشه‌های معادله عبارتند از:

k	α	ریشه = $x = \tan\alpha$
۰	$\frac{\pi}{۹}$	$x_۱ = \tan\frac{\pi}{۹}$
۱	$\frac{۴\pi}{۹}$	$x_۲ = \tan\frac{۴\pi}{۹}$
۲	$\frac{۷\pi}{۹}$	$x_۳ = \tan\frac{۷\pi}{۹}$

۶) هرگاه α و β و γ ریشه‌های معادله درجه‌ی سوم $ax^۳ + bx^۲ + cx + d = ۰$ باشند، همواره داریم:

$$\begin{cases} s = \alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a} \\ q = \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = \frac{c}{a} \\ p = \alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a} \end{cases}$$

تست: ریشه‌های معادله‌ی $x^۳ - (a + b + c)x^۲ + (ab + ac + bc)x - abc = ۰$ **عبارتند از:**

۱) a و b- و c　　۲) a و b و a+b　　۳) a و b و c　　۴) a- و b- و c

پاسخ صحیح با توجه به نکته‌ی ۶ گزینه‌ی ۳ می‌باشد.

۷) صورت کانونیک هر معادله‌ی درجه‌ی سوم به صورت $x^۳ + px + q = ۰$ می‌باشد، یعنی ضریب $x^۳$ یک و ضریب $x^۲$، صفر باشد.

تذکر ۱: هر معادله‌ی درجه‌ی سوم کامل مانند $ax^۳ + bx^۲ + cx + d = ۰$ را می‌توان با استفاده از تغییر متغیر $x = X - \frac{b}{۳a}$ به صورت کانونیک $X^۳ + pX + q = ۰$ در آورد.

تذکر ۲: هرگاه در معادله‌ی درجه‌ی سوم، ضریب $x^۲$ صفر باشد، با تقسیم معادله بر ضریب $x^۳$، می‌توان معادله را به معادله‌ی کانونیک تبدیل کرد.

تذکر ۳: هرگاه در معادله‌ی درجه سوم، ضریب x صفر باشد، با تغییر متغیر $x = \frac{۱}{X}$، به سهولت معادله به صورت کانونیک تبدیل می‌شود.

بنابراین هر معادله‌ی درجه سوم را می‌توان در حالت کلی به صورت کانونیک $x^۳ + px + q = ۰$ در آورد.

مبین (Δ) معادله‌ی درجه سوم: در معادله‌ی $x^۳+ px + q = ۰$، عبارت $\Delta = ۴p^۳+۲۷q^۲$ را مبین معادله‌ی درجه‌ی سوم می‌گویند.

حل معادله‌ی درجه سوم کانونیک

۱) اگر $\Delta > ۰$ باشد آنگاه معادله فقط یک ریشه‌ی حقیقی دارد که این ریشه را می‌توان به کمک دستور زیر (دستور کاردان یا کاردانو، ریاضی‌دان ایتالیائی) به دست آورد.

$$x = \sqrt[۳]{-\frac{q}{۲}+\sqrt{\frac{\Delta}{۱۰۸}}}+\sqrt[۳]{-\frac{q}{۲}-\sqrt{\frac{\Delta}{۱۰۸}}}$$

مثال: ریشه‌ی معادله‌ی $x^۳+ ۶x - ۲۰ = ۰$ را بیابید؟

$$\Delta = ۴p^۳ + ۲۷q^۲ = ۴ \times ۲۱۶ + ۲۷(-۲۰)^۲ > ۰$$

$\Rightarrow$ معادله فقط یک ریشه حقیقی دارد $\Rightarrow x = \sqrt[۳]{۱۰ + ۶\sqrt{۳}} + \sqrt[۳]{۱۰ - ۶\sqrt{۳}}$

$$x = \sqrt[۳]{(۱+\sqrt{۳})^۳} + \sqrt[۳]{(۱-\sqrt{۳})^۳} = ۱+\sqrt{۳}+۱-\sqrt{۳} = ۲$$

۲) هرگاه $\Delta = ۰$ باشد، آنگاه معادله‌ی درجه‌ی سوم، یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف دارد، ریشه‌ی ساده (که علامت آن مخالف q است)

با جایگذاری ۰ به جای Δ، در دستور کاردان، به صورت $x = -۲\sqrt[۳]{\frac{q}{۲}}$ می‌باشد، در این حالت ریشه‌ی مضاعف از دستور $x = \sqrt[۳]{\frac{q}{۲}}$ به دست می‌آید، زیرا:

ریشه‌ی مضاعف $= \sqrt[۳]{\frac{q}{۲}} = x \Leftarrow \quad -۲\sqrt[۳]{\frac{q}{۲}} + ۲x = ۰ \quad \xrightarrow{x_۲= x_۳ \text{ ریشه مضاعف}} \quad x_۱+ x_۲+ x_۳= -\frac{b}{a}$

مثال: مطلوبست حل معادله‌ی $x^۳ - ۶x + ۴\sqrt{۲} = ۰$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = -۲\sqrt[۳]{\frac{q}{۲}} = -۲\sqrt{۲} \\ x_۲ = x_۳ = \sqrt[۳]{\frac{q}{۲}} = \sqrt{۲} \end{cases}$$

۳) هرگاه $\Delta < ۰$ باشد، معادله سه ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد، در این حالت، نمی‌توان از دستور کاردان استفاده کرد. برای تعین ریشه‌ی معادله فرض می‌کنیم $x = r\cos\theta$، یک ریشه‌ی معادله باشد، برای تعیین x، کافی است مقادیر θ و r را بیابیم.

$$x^۳+ px + q = ۰ \Rightarrow r^۳\cos^۳\theta + pr\cos\theta + q = ۰$$

تقسیم بر $r^۳$ $\Rightarrow \cos^۳\theta + \frac{p}{r^۲}\cos\theta + \frac{q}{r^۳} = ۰ \quad (۱)$

می‌دانیم: $\cos۳\theta = ۴\cos^۳\theta - ۳\cos\theta$ لذا:

$$\cos^۳\theta = \frac{۱}{۴}\cos۳\theta + \frac{۳}{۴}\cos\theta$$

$$\cos^۳\theta - \frac{۳}{۴}\cos\theta - \frac{۱}{۴}\cos۳\theta = ۰ \quad (۲)$$

از مقایسه‌ی (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases} \frac{p}{r^۲} = -\frac{۳}{۴} \Rightarrow r = ۲\sqrt{\frac{-p}{۳}} \quad (۳) \\ \frac{q}{r^۳} = \frac{-۱}{۴}\cos۳\theta \Rightarrow \cos۳\theta = \frac{-۴q}{r^۳} = \frac{-۴q}{۸\sqrt{\frac{-p^۳}{۲۷}}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos ۳\theta = \frac{-۳q}{۲p\sqrt{-\frac{p}{۳}}} \quad (۴)$$

از روابط (۳) و (۴) مقادیر r و θ و در نتیجه مقادیر x به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} x_۱ = ۲\sqrt{-\frac{p}{۳}}\cos\theta \\ x_۲ = ۲\sqrt{-\frac{p}{۳}}\cos(\theta + \frac{۲\pi}{۳}) \\ x_۳ = ۲\sqrt{-\frac{p}{۳}}\cos(\theta + \frac{۴\pi}{۳}) \end{cases}$$

که در آن ۳θ، کوچکترین زاویه‌ی بین ۰ و π است به طوریکه:

$$\cos ۳\theta = -\frac{۳q}{۲|p|\sqrt{-\frac{p}{۳}}}$$

برای اینکه مقادیر r و θ حقیقی باشند، باید $P < ۰$ و $۱ \leq \left| \frac{-۳q}{۲p\sqrt{-\frac{p}{۳}}} \right| = |\cos ۳\theta|$ باشند، که البته این شرط همان شرط $۴p^۳ + ۲۷q^۲ < ۰$ است.

مثال: ریشه‌های معادله‌ی $x^۳ - ۳x + ۱ = ۰$ را بیابید؟

$$\Delta = ۴p^۳ + ۲۷q^۲ = -۸۱ < ۰$$

پس معادله سه ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد.

$$\cos ۳\theta = \frac{-۳q}{۲|p|\sqrt{-\frac{p}{۳}}} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \{۳\theta = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}\}$$

پس $۳\theta = \frac{۲\pi}{۳}$، لذا $\theta = \frac{۲\pi}{۹}$ و ریشه‌های معادله عبارتند از:

$$\begin{cases} x_۱ = ۲\cos\frac{۲\pi}{۹} \\ x_۲ = ۲\cos\frac{۸\pi}{۹} \\ x_۳ = ۲\cos\frac{۱۴\pi}{۹} \end{cases}$$

تذکر: هنگامیکه به k عدد می‌دهیم، $\theta_۱$ و $\theta_۲$ و $\theta_۳$، بایستی دارای کسینوسهای متفاوت باشند.

چند نکته مهم راجع به معادلات

۱) هر معادله‌ی چند جمله‌ای از درجه‌ی n، در اعداد حقیقی، حداکثر n ریشه دارد.

۲) هر معادله‌ی چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد n، در اعداد حقیقی، حتماً حداقل یک ریشه دارد.

۳) فرمولی که برای حل معادله‌ی درجه‌ی سوم قبلاً به نام کاردان بیان نمودیم، در ابتدا به وسیله‌ی ریاضی‌دان هندی تارتاگلیا به دست آمده و در سال ۱۵۴۵، به وسیله‌ی کاردان ریاضی دان ایتالیائی منتشر شد. کمی بعد، دانشمندی دیگر به نام فِراری، فرمولی برای حل معادله‌ی دو مجذوری ($ax^۴ + bx^۲ + c = ۰$) در حالت کلی به دست آورد. بعد از وی، اوّلر (اویلر) و دکارت برای حل کلی معادلات دو مجذوری، فرمولهائی به دست آوردند. برای حل معادلات از درجه‌ی ۴ بالاتر، کوششهای زیادی شده است که فرمولی جبری برای یافتن ریشه‌ها، برحسب ضرایب معادله به دست آورند، اما در سال ۱۸۲۴، ریاضی‌دان

نروژی، نیل هنریک آبل (۱۸۲۹ - ۱۸۰۲) ثابت کرد که چنین فرمولی وجود ندارد، هر چند در حالت خاص، ممکن است معادله‌ی چند جمله‌ای از هر درجه‌ای را حل کرد.

۴) (قضیه‌ی اساسی جبر): هر تابع چند جمله‌ای از درجه‌ی بزرگتر یا مساوی یک، حداقل یک ریشه در اعداد مختلط دارد. این قضیه بوسیله‌ی ریاضی‌دان مشهور آلمانی کارل فریدریش گوس آلمانی در سن ۲۲ سالگی اثبات شد.

۵) هر معادله‌ی چند جمله‌ای از درجه n، در اعداد مختلط دقیقاً n ریشه دارد.

۶) همواره داریم: $|a| + |b| + ... + |z| = 0 \Rightarrow a = b = ... = z = 0$

تست: ریشه‌ی معادله‌ی $|x^4 - 16| + |2x - 4| + |x^3 - 8| = 0$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۳ می‌باشد. (ریشه‌ی مشترک هر سه قدر مطلق)

۷) همواره داریم:

$$\sqrt[\text{زوج}]{a} + \sqrt[\text{زوج}]{b} + ... + \sqrt[\text{زوج}]{z} = 0 \Rightarrow a = b = ... = z = 0$$

۸) همواره داریم:

$$a^{\text{زوج}} + b^{\text{زوج}} + ... + z^{\text{زوج}} = 0 \Rightarrow a = b = ... = z = 0$$

تست: ریشه‌ی معادله‌ی $\sqrt[4]{x^3 - x} + (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^{800} + |x^2 - 1| = 0$ عبارتست از:

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۱- ۴) ۲

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۱ می‌باشد (ریشه‌ی مشترک هر سه عبارت)

تست: در معادله‌ی $(x^5 - 2)^{30} + (x^{15} - y + 1)^{42} = 0$ مقدار y کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹- ۳) ۹ ۴) $\sqrt[4]{9}$

$$\begin{cases} x^5 - 2 = \Rightarrow x^5 = 2 \\ x^{15} - y + 1 = 0 \Rightarrow 2^3 - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 9 \end{cases}$$

۹ـ هرگاه f تابعی زوج باشد ($f(-x) = f(x)$, D_f متقارن) و α یک ریشه معادله‌ی $f(x) = 0$ باشد، آنگاه $-\alpha$ نیز ریشه‌ی دیگر معادله است و مجموع ضرائب چنین معادله‌ای همیشه صفر است.

تست: اگر یک ریشه‌ی معادله‌ی $x^{40} + 3x^2 - |x| - c = 0$، $x = 2$ باشد، ریشه‌ی دیگرش کدام است؟ (c یک عدد حقیقی ثابت است)

۱) ۱- ۲) ۱ ۳) ۲- ۴) $\sqrt{2}$

طبق نکته‌ی فوق، ریشه‌ی دیگر معادله، ۲- است.

۱۰) معادله‌ی معکوسه: هرگاه f تابعی باشد به طوریکه $\forall x \in D_f : f(x) = f(\frac{1}{x})$ و α یک ریشه‌ی f باشد، آنگاه $\frac{1}{\alpha}$ نیز یک ریشه‌ی آن است. در این حالت معادله‌ی $f(x) = 0$ را معادله‌ی معکوسه می‌گویند.

مثال: معادله‌ی $2x^2 - 5x + 2 = 0$، معادله‌ای معکوسه است، زیرا $x = 2$ و $x = \frac{1}{2}$ ریشه‌های آن هستند.

تست ۱:

۱ـ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+(a+b+c)x+b+c=0$ برابر است با:

۱) $-\frac{b+c}{a}$ ۲) $+1$ ۳) $\frac{c}{a}$ ۴) $-\frac{c}{a}$

۲ـ α و β ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-4x-1=0$ می‌باشند، حاصل $(\alpha^3-2\alpha^2)(\beta^3-2\beta^2)$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{-1}{4}$ ۳) $-\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۳ـ در معادلهٔ $x^2-3x+m+1=0$، رابطهٔ $x'^2+x'x''=3$ برقرار است، m کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 0 ۴) 2

۴ـ از حل معادلهٔ $(x^6-7)^{20}+(x^{12}-y+1)^{14}=0$ نتیجه می‌شود:

۱) $y=9$ ۲) $y=57$ ۳) $y=59$ ۴) $y=50$

۵ـ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $\sqrt{3}(x+5)^7-\sqrt{2}(x+5)^3-\sqrt{3}+\sqrt{2}=0$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 4 ۴) -4

۶ـ به ازاء چه مقداری از m، یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2+mx+27=0$ مربع ریشهٔ دیگر است؟

۱) 18 ۲) -12 ۳) -16 ۴) 21

۷ـ هرگاه $a^2+b^2+18=6(a+b)$، $2a-3b$ کدام است؟

۱) 6 ۲) -3 ۳) 3 ۴) -6

۸ـ هرگاه $4x^2+y^2+9z^2+4x-2y+12z+6=0$، $x+y-z$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{7}{6}$ ۴) $-\frac{7}{6}$

۹ـ هرگاه $a^2+b^2+c^2+3=2(a+b+c)$، $a+b$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 0 ۳) -2 ۴) 2

۱۰ـ هرگاه α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2+px+1=0$ باشند، معادله‌ای با ریشه‌های α^2+1 و β^2+1 کدام است؟

۱) $x^2-px+p=0$ ۲) $x^2-p^2x+p^2=0$ ۳) $x^2-p^2x+p=0$ ۴) $x^2-p^2x-p^2=0$

۱ـ (۱)
$$a+c=b\Rightarrow\begin{cases}x'=-۱\\ x''=-\frac{c}{a}=-\frac{b+c}{a}\end{cases}$$

۲ـ (۳)
$$۲x^{۲}-۴x-۱=۰\Rightarrow ۲\alpha^{۲}-۴\alpha-۱=۰\Rightarrow ۲\alpha^{۲}-۴\alpha=۱$$
$$(\alpha^{۳}-۲\alpha^{۲})(\beta^{۳}-۲\beta^{۲})=\frac{\alpha\beta}{۴}(۲\alpha^{۲}-۴\alpha)(۲\beta^{۲}-۴\beta)=\frac{-۱}{۸}(۱)(۱)=\frac{-۱}{۸}$$

۳ـ (۱)
$$x'(x'+x'')=۳\Rightarrow ۳x'=۳\Rightarrow x'=۱\Rightarrow ۱^{۲}-۳+m+۱=۰\Rightarrow m=۱$$

۴ـ (۴)
$$x^{۶}-۷=۰\Rightarrow x^{۶}=۷\Rightarrow x^{۱۲}-y+۱=۰\Rightarrow ۴۹-y+۱=۰\Rightarrow y=۵۰$$

۵ـ (۴) مجموع ضرائب معادله صفر است
$$x+۵=y\Rightarrow\sqrt{۳}y^{۷}-\sqrt{۲}y^{۳}-\sqrt{۳}+\sqrt{۲}=۰$$

لذا یکی از ریشه‌ها معادله y=۱ است و از آنجا $x+۵=۱$ و $x=-۴$

۶ـ (۲)
$$x'=x''^{۲}\Rightarrow x'x''=x''^{۳}\Rightarrow x''^{۳}=\frac{c}{a}=۲۷\Rightarrow x''=۳\Rightarrow ۹+۳m+۲۷=۰\Rightarrow m=-۱۲$$

۷ـ (۲)
$$(a^{۲}-۶a+۹)+(b^{۲}-۶b+۹)=۰\Rightarrow(a-۳)^{۲}+(b-۳)^{۲}=۰\Rightarrow a=b=۳\Rightarrow ۲a-۳b=-۳$$

۸ـ (۳)
$$(۲x+۱)^{۲}+(y-۱)^{۲}+(۳z+۲)^{۲}=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-\frac{۱}{۲}\\ y=۱\\ z=-\frac{۲}{۳}\end{cases}$$
$$\Rightarrow x+y-z=\frac{۷}{۶}$$

۹ـ (۴)
$$(a-۱)^{۲}+(b-۱)^{۲}+(c-۱)^{۲}=۰\Rightarrow a=b=c=۱\Rightarrow a+b=۲$$

۱۰ـ (۲)
$$s=\alpha^{۲}+\beta^{۲}+۲=s^{۲}-۲p+۲=p^{۲}-۲+۲=p^{۲}$$
$$p=\alpha^{۲}+\beta^{۲}+\alpha^{۲}\beta^{۲}+۱=p^{۲}-۲+۱+۱=p^{۲}$$
$$x^{۲}-sx+p=۰\Rightarrow x^{۲}-p^{۲}x+p^{۲}=۰$$

در قلب خود بنویسید که امروز بهترین روز سال است. (امرسون)

جوانی ستاره‌ای است که فقط یکبار در آسمان عمر طلوع می‌کند. (ژوبرت)

تست ۲:

۱ـ به فرض اینکه سه جمله‌ای $p = ۲x^۲ + ۶x + ۱ + k(x^۲+۲)$ همواره مثبت باشد، حدود k چیست؟

۱) $k < -۲$ ۲) $k > -۲$ ۳) $-۲ < k < ۱$ ۴) $-\frac{۷}{۲} < k < ۱$

۲ـ معادلهٔ $\frac{x^۲}{x+۲} + \frac{۲(x+۲)}{x^۲} = ۳$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۳ـ به ازاء چه مقادیری از m، سه جمله‌ای $۴x^۲ - ۴x + m$، به صورت مجموع دو مربع کامل نوشته می‌شود؟

۱) $m < ۲$ ۲) $m < -۳$ ۳) $m > ۱$ ۴) $m > -۳$

۴ـ معادلهٔ $x^۴ - x^۲ - ۶ = ۰$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۵ـ اگر $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۲mx - ۳ = ۰$ باشند و $\alpha + \beta = \frac{\pi}{۶}$، آنگاه:

۱) $m = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $m = \frac{۲}{۳}$ ۳) $m = \sqrt{۳}$ ۴) $m = -۱$

۶ـ اگر ریشه‌های معادلهٔ $(a-۲)x^۲ + x - ۲a = ۰$، عکس ریشه‌های معادلهٔ $(a-۳)x^۲ + (۲-a)x - ۱ = ۰$ باشند، a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۷ـ اگر به هر یک از جوابهای معادلهٔ $x^۲ - x - ۱ = ۰$، یک واحد اضافه کنیم، به حاصلضرب آنها چقدر اضافه می‌شود؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) $۱+\sqrt{۲}$ ۴) ۱

۸ـ اگر $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ - ۲mx + m = ۰$ باشند، حاصل $\frac{۲}{\sin ۲x}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ± ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۹ـ اگر معادلهٔ $x^۳ + px + q = ۰$ دارای ریشه مضاعف $x = -۱$ باشد، آنگاه داریم:

۱) $p = ۳, q = -۲$ ۲) $p = -۳, q = ۲$ ۳) $p = -۳, q = -۲$ ۴) $p = ۳, q = ۲$

۱۰ـ معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌های آن $۲ - \sqrt{۴-a}$, $۲ + \sqrt{۴-a}$ باشد، کدام است؟

۱) $x^۲ - ۴x + a = ۰$ ۲) $x^۲ + ax - ۴ = ۰$ ۳) $x^۲ + ۴x - a = ۰$ ۴) $x^۲ - ax + ۴ = ۰$

۱ـ (۳) $P=(۲+k)x^۲+۶x+۲k+۱$

$$\begin{cases} a>۰\Rightarrow ۲+k>۰\Rightarrow k>-۲\\ \Delta'<۰\Rightarrow \Delta'=۲k^۲+۵k-۷>۰\Rightarrow -\frac{۷}{۲}<k<۱\end{cases}$$

اشتراک می‌گیریم، $-۲<k<۱$ می‌شود.

۲ـ (۴) $\frac{x^۲}{x+۲}=y\Rightarrow y+\frac{۲}{y}=۳\Rightarrow y^۲-۳y+۲=۰\Rightarrow \begin{cases}y=۱\\ y=۲\end{cases}$

$$\begin{cases}\frac{x^۲}{x+۲}=۱\Rightarrow x^۲-x-۲=۰\Rightarrow \text{ریشه ۲}\\ \frac{x^۲}{x+۲}=۲\Rightarrow x^۲-۲x-۴=۰\Rightarrow \text{ریشه ۲}\end{cases}$$

۳ـ (۳) $\Delta'<۰\Rightarrow ۴-۴m<۰\Rightarrow m>۱$

۴ـ (۳) $x^۴-x^۲-۶=۰\Rightarrow (x^۲-۳)(x^۲+۲)=۰\Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}$

۵ـ (۱) $\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{۶}\Rightarrow \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow \frac{s}{۱-p}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

$\frac{۲m}{۱+۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow m=\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۶ـ (۲) $\frac{a}{c'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{a'}\Rightarrow \frac{a-۲}{-۱}=\frac{۱}{۲-a}=\frac{-۲a}{a-۳}$

چون با توجه به گزینه‌های داده شده، دستگاه فوق جواب دارد لذا کافی است.

$\frac{a-۲}{-۱}=\frac{۱}{۲-a}\Rightarrow \begin{cases}a=۱ & \text{قابل قبول}\\ a=۳ & \text{غیرقابل‌قبول}\end{cases}$ $\rightarrow \frac{۳-۲}{-۱}=\frac{۱}{۲-۳}\neq\frac{-۶}{۰}$

۷ـ (۲) راه اول: $\begin{cases}x'\\ x''\end{cases}\rightarrow \begin{cases}y'=x'+۱\\ y''=x''+۱\end{cases}\Rightarrow p'=y'y''=x'x''+x'+x''+۱=p+s+۱=p+۲$

راه دوم: x را بـه $x-۱$ تـبدیل مـی‌کنیم لذا: $x^۲-x-۱=۰\Rightarrow p=-۱$, $(x-۱)^۲-(x-۱)-۱=۰\Rightarrow x^۲-۳x+۱=۰$

$\Rightarrow p'=۱\Rightarrow p'=p+۲$

۸ـ (۲) $\begin{cases}\frac{۲}{\sin ۲\alpha}=\tan\alpha+\cot\alpha=s=۲m\\ p=\tan\alpha.\tan\beta=\frac{c}{a}\Rightarrow ۱=m\end{cases}\Rightarrow \frac{۲}{\sin ۲\alpha}=۲(۱)=۲$

۹ـ (۳) $f'(x)=۳x^۲+p\Rightarrow f'(-۱)=۰\Rightarrow ۳+p=۰\Rightarrow p=-۳$

$f(-۱)=۰\Rightarrow -۱-p+q=۰\Rightarrow q=-۲$

۱۰ـ (۱) $\begin{cases}s=۴\\ p=a\end{cases}\Rightarrow x^۲-sx+p=۰\Rightarrow x^۲-۴x+a=۰$

تست ۳:

۱ـ معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌هایش در دستگاه $\begin{cases} x' + x'' - 2x'x'' = 5 \\ 2x' + 2x'' + x'x'' = 6 \end{cases}$ صدق کنند کدام است؟

۱) $5x^2 - 17x - 2 = 0$ ۲) $5x^2 + 17x - 4 = 0$ ۳) $5x^2 - 17x + 2 = 0$ ۴) $5x^2 - 17x - 4 = 0$

۲ـ هرگاه x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 2x - 10 = 0$ باشند حاصل $A = \frac{x'+1}{x''+1} + \frac{x''+1}{x'+1}$ کدام است؟

۱) $\frac{10}{7}$ ۲) $\frac{-30}{7}$ ۳) $\frac{30}{7}$ ۴) $\frac{-10}{7}$

۳ـ اگر در معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2 - 8x + m + 8 = 0$، یکی از ریشه‌ها، ۳ برابر ریشهٔ دیگر باشد، m برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۵− ۳) ۵ ۴) ۰

۴ـ ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + (\tan\alpha + \cot\alpha)x + 1 = 0$ عبارتند از:

۱) $-\cot\alpha, -\tan\alpha$ ۲) $\cot\alpha, \tan\alpha$ ۳) $\cos\alpha, \sin\alpha$ ۴) $-\cos\alpha, -\sin\alpha$

۵ـ جوابهای معادلهٔ $(\cos^2\alpha)x^2 + x + \sin^2\alpha = 0$ عبارتند از:

۱) ۱ و $\tan^2\alpha$ ۲) ۱− و $-\tan^2\alpha$ ۳) $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ ۴) ۱ و $\tan\alpha$

۶ـ اگر x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + 2(m+1)x + 2m - 1 = 0$ باشند و x' و m و x'' به ترتیب جملات متوالی یک تصاعد هندسی باشند، m برابر است با:

۱) ۲− ۲) ۱− ۳) ۲ ۴) ۱

۷ـ اگر در معادلهٔ $x^2 + (m-1)x + 4 = 0$ رابطهٔ $\log(x' + x'') - \log x' = \log x''$ برقرار باشد m برابر است با:

۱) ۱− ۲) ۲ ۳) ۲− ۴) ۳−

۸ـ به ازاء چه مقدار m، معادلهٔ $(2m+1)x^2 - (m^2-1)x + 4m^2 - 1 = 0$، دو ریشهٔ حقیقی قرینه دارد؟

۱) ± 1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\pm\frac{1}{2}$ ۴) ۱−

۹ـ معادلهٔ درجه دومی که ریشه‌هایش به ترتیب ۳ واحد کمتر از ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + x - 2 = 0$ باشد، کدام است؟

۱) $x^2 + 7x + 10 = 0$ ۲) $x^2 - 7x + 10 = 0$ ۳) $x^2 + 7x - 10 = 0$ ۴) $x^2 - 7x - 10 = 0$

۱۰ـ به ازاء چه مقدار k، رابطهٔ $x' + 3x'' = 7$ بین ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 5x + k - 1 = 0$ برقرار است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱ـ (۴)

$$\begin{cases} s-2p=5 \\ 2s+p=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=\frac{17}{5} \\ p=-\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow x^2-\frac{17}{5}x-\frac{4}{5}=0 \Rightarrow 5x^2-17x-4=0$$

۲ـ (۲)

$$A=\frac{(x'+1)^2+(x''+1)^2}{(x'+1)(x''+1)}=\frac{s^2-2p+2s+2}{p+s+1}=-\frac{30}{7} \qquad s=2\ ,\ p=-10$$

۳ـ (۱)

$$\frac{b^2}{ac}=\frac{(k+1)^2}{k} \Rightarrow \frac{64}{m+8}=\frac{16}{3} \Rightarrow m=4$$

۴ـ (۱)

$$x^2+(\tan\alpha+\cot\alpha)x+1=(x+\tan\alpha)(x+\cot\alpha)=0 \begin{cases} x=-\tan\alpha \\ x=-\cot\alpha \end{cases}$$

۵ـ (۲)

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \Rightarrow a+c=b \Rightarrow \begin{cases} x'=-1 \\ x''=-\tan^2\alpha \end{cases}$$

۶ـ (۴)

$$x'x''=m^2 \Rightarrow \frac{c}{a}=m^2 \Rightarrow m^2=2m-1 \Rightarrow (m-1)^2=0 \Rightarrow m=1$$

۷ـ (۴)

$$\log s=\log p \Rightarrow s=p \Rightarrow 1-m=4 \Rightarrow m=-3$$

۸ـ (۴) فقط به ازاء $m=-1$، a و c مختلف العلامه می‌شوند.

$$\begin{cases} b=0 \Rightarrow m=\pm 1 \\ \text{a و c مختلف العلامه} \end{cases}$$

۹ـ (۱) x را به $x+3$ تبدیل می‌کنیم.

$$(x+3)^2+(x+3)-2=0$$

$$x^2+7x+10=0$$

۱۰ـ (۴)

$$\begin{cases} x'+3x''=7 \\ x'+x''=5 \\ x'x''=k-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=4 \\ x''=1 \end{cases}$$

$$x'x''=k-1 \Rightarrow (1)(4)=k-1 \Rightarrow k=5$$

امید در زندگانی بشر، آنقدر اهمیت دارد، که بال برای پرندگان. (ویکتور هوگو)

از انجام آنچه دیگران را به خاطر آن سرزنش می‌کنیم، خودداری کنیم. (تالس)

تست ۴:

۱ـ درصورتی که منحنی $y = ax^2 + 2x + 1 - a$، محور xها را در طرفین محور yها قطع کرده باشد، حدود a کدام است؟

۱) $(-\infty, 0)$ ۲) $(1, +\infty)$ ۳) $(-3, 3)$ ۴) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

۲ـ محیط مستطیلی $4\sqrt{2}$ و مساحت آن ۱ است، قطر این مستطیل چند است؟

۱) $\sqrt{6}$ ۲) $3\sqrt{2}$ ۳) $2\sqrt{6}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۳ـ هرگاه $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشد، حاصل کسر $\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) ۴ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

۴ـ اگر x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ $3x^2 + 4x - 9 = 0$ باشند، دو برابر مجموع معکوس ریشه‌ها، کدام است؟

۱) $-\frac{8}{9}$ ۲) $\frac{8}{9}$ ۳) ۸ ۴) $-\frac{4}{9}$

۵ـ در معادلهٔ $x^2 - 4x + 1 = 0$، حاصل $A = \sqrt{\frac{x'}{x''}} + \sqrt{\frac{x''}{x'}}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۲ ۴) ۳

۶ـ هرگاه x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 26x - 27 = 0$ باشند، حاصل $\sqrt[3]{x'} + \sqrt[3]{x''}$ کدام است؟

۱) $2\sqrt[3]{4}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -2

۷ـ معادلهٔ $x^3 + x - 2 = 0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۸ـ معادلهٔ $2x^3 - 3x^2 - 36x + 5 = 0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹ـ معادلهٔ $x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = 0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

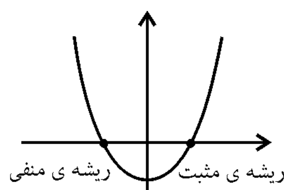
۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰ـ به ازاء چه مقادیری از m، عدد ۲ بین ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + (m-1)x - m = 0$ قرار می‌گیرد؟

۱) $m < -2$ ۲) $m < 2$ ۳) $m > 2$ ۴) $m > -2$

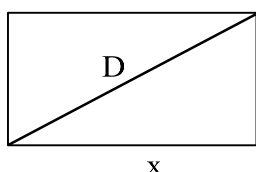
۱ـ (۴) واضح است که معادلهٔ داده شده بایستی دو ریشهٔ مختلف العلامه داشته باشد:

لذا: $\frac{c}{a} < 0$ ، $x'x'' =$ یعنی: $\frac{1-a}{a} < 0$ و از آنجا $a > 1$ یا $a < 0$



۲ـ (۱) $\begin{cases} x+y = 2\sqrt{2} \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow D^2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 8 - 2 = 6$

قطر $= D = \sqrt{6}$



۳ـ (۱) $x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 3x - 1$

$$\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{3x-1}{(3x-1)^2 + 3x - 1 + 1} = \frac{3x-1}{9(3x-1) - 6x + 1 + 3x} = \frac{3x-1}{24x-8} = \frac{3x-1}{8(3x-1)} = \frac{1}{8}$$

۴ـ (۲) $2(\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}) = \frac{2s}{p} = \frac{8}{9} \quad ,(s = \frac{-4}{3} \quad , p = -3)$

۵ـ (۱) $A^2 = \frac{x'}{x''} + \frac{x''}{x'} + 2 = \frac{s^2 - 2p}{p} + 2 = 16 \overset{A>0}{\Rightarrow} A = 4 \quad (s = 4 \quad , p = 1)$

۶ـ (۳) $x^2 - 26x - 27 = 0 \Rightarrow a + c = b \Rightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ x'' = 27 \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{x'} + \sqrt[3]{x''} = \sqrt[3]{-1} + \sqrt[3]{27} = 2$

۷ـ (۲) پس تابع محور xها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند و لذا معادله فقط یک ریشه دارد. $y' = 3x^2 + 1 > 0$

۸ـ (۴) $y' = 6x^2 - 6x - 36 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} f(-2) = 49 > 0 \\ f(3) = -76 < 0 \end{cases} \Rightarrow$ پس طبق نکتهٔ بیان شده در جزوه، معادله دارای ۳ ریشه است.

۹ـ (۳) $y' = 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = 4 \end{cases}$

$f(2) = 0$ پس طبق نکتهٔ بیان شده در جزوه معادله دارای ۲ ریشه است یکی ساده و دیگری مضاعف.

۱۰ـ (۱) $af(\alpha) < 0 \Rightarrow f(2) < 0 \Rightarrow \quad m + 2 < 0 \Rightarrow m < -2$

تجربه مدرسه‌ی خوبی است ولی افسوس که خرجش سنگین است. **«هانریش هانیه»**

فصل سوم

قدر مطلق و ویژگیهای آن

قدر مطلق هر عدد حقیقی x را با نماد |x| نمایش داده و آنرا به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$|x| = \begin{cases} x & ,(x > \circ) \\ \circ & ,(x = \circ) \\ -x & ,(x < \circ) \end{cases}$$

و یا $|x| = \begin{cases} x & ,(x \geq \circ) \\ -x & ,(x < \circ) \end{cases}$، به عبارت فارسی ساده‌تر می‌توان گفت:

$$\begin{cases} \text{خودش} = |\text{هر عدد مثبت}| \\ \text{خودش} = |\circ| \\ \text{قرینه‌اش} = |\text{هر عدد منفی}| \end{cases}$$

به مثالهای زیر توجه کنید:

۱) $|۴| = ۴$

۲) $|\circ| = \circ$

۳) $|x^۲ + ۱\circ\circ| = \text{خودش} = x^۲ + ۱\circ\circ$

۴) $|-۲\sqrt{۳}| = \text{قرینه‌اش} = -(-۲\sqrt{۳}) = ۲\sqrt{۳}$

۵) $|۳ - \sqrt{۵}| = \text{خودش} = ۳ - \sqrt{۵}$

۶) $|۱ - \sqrt{۲}| = \text{قرینه‌اش} = -(۱ - \sqrt{۲}) = \sqrt{۲} - ۱$

۷) $|-۸ - \sqrt{۲}| = \text{قرینه‌اش} = -(-۸ - \sqrt{۲}) = ۸ + \sqrt{۲}$

۸) $|-x^۴ - ۱| = \text{قرینه‌اش} = -(-x^۴ - ۱) = x^۴ + ۱$

۹) $|x^۲| = \text{خودش} = x^۲$

۱۰) $|۲ + \sqrt{۱۵}| = \text{خودش} = ۲ + \sqrt{۱۵}$

۱۱) $|\circ^+| = \circ^+ \quad \text{و} \quad |\circ^-| = \circ^+ \quad \text{و} \quad |\circ| = \circ$

۱۲) $|\cos ۱۵\circ^\circ| = \text{قرینه‌اش} = -\cos ۱۵\circ^\circ = +\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۱۳) $|۱ - \sqrt{۵}| - |\sqrt{۵} - ۲| = \sqrt{۵} - ۱ - (\sqrt{۵} - ۲) = ۱$

۱۴) $|\sin x - ۱| = \text{قرینه‌اش} = -(\sin x - ۱) = ۱ - \sin x \quad , (\sin x \leq ۱)$

۱۵) $|x - a| + |x - b| = \text{خودش} + \text{قرینه‌اش} \quad , (a < x < b)$

$= x - a - (x - b) = b - a$

۱۶) $|x - y| + |x| - |y| =$ قرینه‌اش − خودش + خودش , $(y < 0 < x)$
منفی مثبت مثبت

$= x - y + x - (-y) = 2x$

ویژگیهای قدر مطلق:

۱) $\forall x \in R : |x| \geq 0$

۲) $\forall x \in R : |x| \geq x$

۳) $|x| = x \Leftrightarrow x \geq 0$

۴) $|x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0$

۵) $|x| > x \Leftrightarrow x < 0$ ، (قدر مطلق اعداد منفی، از خودشان بزرگتر است)

۶) $|x| < x \Rightarrow x \in \{\ \}$ جواب ندارد. (قدر مطلق هیچ عددی از خودش کوچکتر نیست)،

تست: مجموعه جواب معادلهٔ $|x^2-4| + x^2 = 4$ برابر است با:

۱) $x \geq 2$ یا $x \leq -2$ ۲) $-2 \leq x \leq 2$ ۳) $0 \leq x \leq 2$ ۴) $-2 \leq x \leq 0$

حل: $|x^2-4| = 4 - x^2 \Rightarrow |x^2-4| = -(x^2-4) \Rightarrow x^2-4 \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

۷) $|x| \geq x \Rightarrow x \in R$ و (قدر مطلق هر عدد همیشه از خودش بزرگتر یا مساوی است)

۸) $|x| \leq x \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x \geq 0$

۹) $|x| = a , a > 0 \Rightarrow x = +a$ یا $x = -a$

۱۰) $|x| = a , a < 0$ غیرممکن

۱۱) $|x| = |-x|$ ، (قدر مطلق هر عدد با قدر مطلق قرینه‌اش برابر است)

۱۲) $x = y \Rightarrow |x| = |y|$

۱۳) $|x| = |y| \Rightarrow x = +y$ یا $x = -y$

خاصیت جابجایی چهار عمل اصلی در قدر مطلق:

$$14)\begin{cases} |x+y| = |y+x| \\ |x-y| = |y-x| \\ |xy| = |yx| \\ \left|\frac{x}{y}\right| \neq \left|\frac{y}{x}\right| , (x,y \neq 0) \end{cases}$$

تذکر: خاصیت جابجایی عمل تقسیم در قدر مطلق در حالت کلی وجود ندارد.

خاصیت تفکیک کردن چهار عمل اصلی در قدر مطلق:

۱۵) $|x+y| \neq |x| + |y|$

$|x-y| \neq |x| - |y|$

$|xy| = |x|\,|y|$

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, (y \neq 0)$

۱۶) $|x|^2 = |x|^2 = x^2$

$|x|^3 = |x|^3 \neq x^3$

$|x|^n = |x^n|$

۱۷) $|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow$ $xy \geq 0 \Leftrightarrow$ x و y هم علامت باشند و یا حداقل یکی از آنها ۰ باشد

تست: مجموعه جواب معادلهٔ $|x-1| + |x+4| = |2x+3|$ کدام است؟

۱) $-4 \leq x \leq 1$　۲) $-\frac{3}{2} \leq x \leq 1$　۳) $x \geq 1$ یا $x \leq -4$　۴) $x \geq 1$ یا $x \leq -\frac{3}{2}$

حل: طبق نکتهٔ ۱۷ بایستی داشته باشیم:

$(x-1)(x+4) \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ یا $x \leq -4$

۱۸) $|x+y| < |x| + |y| \Leftrightarrow$ x و y مختلف العلامه باشند. $\Leftrightarrow xy < 0$

تست: نامعادله‌ی $|2x-1| + |x-5| > |3x-6|$، به ازاء چه مقادیری از x برقرار است؟

۱) $x > 5$ یا $x < \frac{1}{2}$　۲) $\frac{1}{2} < x < 5$　۳) $x \geq 5$ یا $x \leq \frac{1}{2}$　۴) $\frac{1}{2} \leq x \leq 5$

حل: $2x-1 + x-5 = 3x-6 \Rightarrow (2x-1)(x-5) < 0$ تعیین علامت $\Rightarrow \frac{1}{2} < x < 5$

یادآوری: $|x-y| = |y-x|$

۱۹) $|x+y| \leq |x| + |y|$ یا $|x| + |y| \geq |x+y|$

تذکر: این نامساوی را نامساوی مثلثی می‌گویند.

۲۰) $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$ یا $|x-z| + |z-y| \geq |x-y|$

تست: تابع $f(x) = |x+1| + |x-9|$ مفروض است، کدام گزینه راجع به این تابع، درست است؟

۱) $f(x) \geq 8$　۲) $8 \leq f(x) \leq 10$　۳) $f(x) \geq 10$　۴) $-1 \leq f(x) \leq 9$

حل: طبق نکتهٔ ۱۶ داریم: $|x+1| + |x-9| \geq |-1-9| = 10 \Rightarrow f(x) \geq 10$

۲۱) $|x-y| \geq |x| - |y|$

۲۲) $|x| - |y| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$

۲۳) $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$

یا

$-|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$

تست: برد تابع $f(x) = |x+1| - |x+5|$ **کدام است؟**

۱) $-6 \le f(x) \le 6$　۲) $-4 \le f(x) \le 4$　۳) $f(x) \ge 4$ یا $f(x) \le -4$　۴) $f(x) \ge 6$

حل: طبق نکتهٔ ۱۸ داریم:

$$-|x+1-x-5| \le |x+1| - |x+5| \le |x+1-x-5|$$

$$-4 \le f(x) \le 4$$

۲۴) $|x| \le 0 \Rightarrow |x| = 0 \Rightarrow x = 0$

۲۵) $|x| \le a, (a > 0) \Rightarrow -a \le x \le a \Leftrightarrow x^2 \le a^2$

۲۶) $|x| \ge a, (a > 0) \Rightarrow x \le -a$ یا $x \ge a \Leftrightarrow x^2 \ge a^2$

۲۷) $|x| \ge a, (a < 0) \Rightarrow x \in R$

۲۸) $|x| \le a, (a < 0) \Rightarrow$ غیرممکن

۲۹) $a \le |x| \le b, (a, b > 0, a < b) \Leftrightarrow -b \le x \le -a$ یا $a \le x \le b$

۳۰) $a < x < b \Leftrightarrow \left| x - \frac{a+b}{2} \right| < \left| \frac{b-a}{2} \right|$

۳۱) $\begin{cases} \sqrt{x^2} = \sqrt[4]{x^4} = \dots = \sqrt[2n]{x^{2n}} = |x| \\ \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[5]{x^5} = \dots = \sqrt[2n+1]{x^{2n+1}} = x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x|$

تست: مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\sqrt{x^2 - 4|x| + 4} \le 1$ **کدام است؟**

۱) $-3 \le x \le 3$　۲) $-1 \le x \le 1$　۳) $1 \le x \le 3$　۴) $1 \le x \le 3$ یا $-3 \le x \le -1$

حل:

$\sqrt{|x|^2 - 4|x| + 4} \le 1 \Rightarrow \sqrt{(|x| - 2)^2} \le 1$

$\Rightarrow \big| |x| - 2 \big| \le 1 \Rightarrow -1 \le |x| - 2 \le 1$

$1 \le |x| \le 3 \Rightarrow -3 \le x \le -1$ یا $1 \le x \le 3$

۳۲) $\forall x \in R : -|x| \le x \le |x|$

۳۳) $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ یا $\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

تذکر: این نامساوی، همان نامساوی مثلثی، در حالت کلی می‌باشد.

در عبارتهائی به صورت کلی: ۳۴) $y = A|x-a| + B|x-b| + \dots + Z|x-z|$

با فرض A و B و... $Z > 0$، Min تابع به ازاء ریشه‌های داخل قدر مطلق در عبارت، حاصل شود. یعنی:

$$\text{Min}y = \text{Min}\{f(a), f(b), \dots, f(z)\}$$

و در نتیجه برد تابع می‌شود: برد $= [\text{Min}(y), +\infty)$

تست: Min **تابع** $y = |x-۱| + |x+۲| + |x+۳|$**، کدام است؟**

۱) ۵   ۲) ۴   ۳) ۶   ۴) ۹

$$\begin{cases} f(۱) = ۷ \\ f(-۲) = ۴ \\ f(-۳) = ۵ \end{cases} \Rightarrow \quad \text{Min}(y) = ۴$$

$۳۵) |x| < a \Rightarrow |x| \le a$

$۳۶) |a| + |b| + ... + |z| = ۰ \Rightarrow a = b = c = ... = z = ۰$

تست: اگر $a > ۰ > b$ **و** $|a| > |b|$**، حاصل عبارت** $B = |a+b| + |a| + |b|$ **کدام است؟**

۱) $-۲b$ ۲) $-۲a$ ۳) $۲b$ ۴) $۲a$

حل:

$$b < ۰ < a \Rightarrow \begin{cases} a > ۰ \Rightarrow |a| = a \\ b < ۰ \Rightarrow |b| = -b \\ |a| > |b| \Rightarrow a > -b \Rightarrow a + b > ۰ \Rightarrow |a+b| = a+b \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = a + b + a - b = ۲a$$

روش دوم: عدد گذاری:

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = -۱ \end{cases} \Rightarrow ۱ + ۲ + ۱ = ۴ = ۲a$$

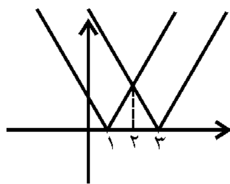
تست: معادلهٔ $|x-۱| = |۳-x|$ **چند ریشه دارد؟**

۱) ۲   ۲) ۰   ۳) ۱   ۴) ۳

حل:

$$|x-۱| = |۳-x| \Rightarrow \begin{cases} x - ۱ = ۳ - x \\ x - ۱ = -(۳-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ ۱ = ۳ \ \text{غیرممکن} \end{cases}$$

روش دوم: از طریق رسم نمودار: چون نمودار دو تابع، یک نقطهٔ مشترک دارند لذا تابع یک ریشه دارد، همانطوری که دیده می‌شود، این ریشه از روی شکل نیز برابر ۲ است.



تست: معادلهٔ $||x-۲| - ۳| = ۲$ **چند ریشه دارد؟**

۱) ۴   ۲) ۲   ۳) ۱   ۴) ۰

حل:

$$\begin{cases} |x-۲| - ۳ = ۲ \\ |x-۲| - ۳ = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-۲| = ۵ \to \begin{cases} x-۲ = ۵ \\ x-۲ = -۵ \end{cases} \\ |x-۲| = ۱ \to \begin{cases} x-۲ = ۱ \\ x-۲ = -۱ \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x = ۷ \\ x = -۳ \\ x = ۳ \\ x = ۱ \end{cases}$$

مثال: معادلهٔ $|x-۱| + ۲x = ۵$ **را حل کنید؟**

$$\begin{cases} \text{if } x \ge ۱ \Rightarrow x - ۱ + ۲x = ۵ \Rightarrow x = ۲ \ \text{قابل قبول} \\ \text{if } x < ۱ \Rightarrow -x + ۱ + ۲x = ۵ \Rightarrow x = ۴ \ \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

مثال: معادلهٔ $|x-۱|+|x-۲|=۳$ را حل کنید؟

$$\begin{cases} \text{if } x<۱ \Rightarrow -x+۱-x+۲=۳ \Rightarrow x=۰ & \text{قابل قبول} \\ \text{if } ۱\le x<۲ \Rightarrow x-۱-x+۲=۳ \Rightarrow ۱=۳ & \text{غیرممکن} \\ \text{if } ۲\le x \Rightarrow x-۱+x-۲=۳ \Rightarrow x=۳ & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

(لذا تابع در فاصلهٔ [۱,۲) جواب ندارد)

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=\{۰,۳\}$

تذکر: در قسمتهای بعدی، روشی سریعتر برای یافتن ریشه‌های معادلهٔ فوق بیان خواهیم کرد.

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید؟

الف) $|۲x-۳|\le ۵ \Rightarrow -۵\le ۲x-۳\le ۵ \Rightarrow -۲\le ۲x\le ۸ \Rightarrow -۱\le x\le ۴$

ب) $|x+۱|\ge|x-۲| \Rightarrow |x+۱|^۲\ge|x-۲|^۲ \Rightarrow$

$x^۲+۲x+۱\ge x^۲-۴x+۴ \Rightarrow x\ge \frac{۱}{۲}$

ج) $-۱\le\frac{x+۲}{x-۲}\le۱ \Rightarrow \left|\frac{x+۲}{x-۲}\right|\le۱ \Rightarrow \frac{|x+۲|}{|x-۲|}\le۱ \overset{x\ne۲}{\Rightarrow} |x+۲|\le|x-۲|$

$\Rightarrow |x+۲|^۲\le|x-۲|^۲ \Rightarrow x\le۰$

د) $\big||x+۱|-۴\big|\ge۵ \Rightarrow \begin{cases} |x+۱|-۴\le-۵ \\ \text{یا} \\ |x+۱|-۴\ge۵ \end{cases}$

$$\begin{cases} |x+۱|\le-۱ & \text{غیرممکن} \\ |x+۱|\ge۹ \Rightarrow \begin{cases} x+۱\le-۹ \\ \text{یا} \\ x+۱\ge۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le-۱۰ \\ \text{یا} \\ x\ge۸ \end{cases} \end{cases}$$

مثال: عبارات زیر را ساده کنید؟

الف) $\sqrt[۶]{x^۶}+\sqrt{x^۲-۶x+۹} \qquad (x<۰)$

$|x|+|x-۳|=-x-(x-۳)=۳-۲x$

ب) $\sqrt{\left(x-\frac{۱}{x}\right)^۲+۴}-\sqrt{\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲-۴} \qquad ,(۰<x<۱)$

$=\sqrt{\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲}-\sqrt{\left(x-\frac{۱}{x}\right)^۲}=\left|x+\frac{۱}{x}\right|-\left|x-\frac{۱}{x}\right|=$ قرینه‌اش + خودش

$=x+\frac{۱}{x}+x-\frac{۱}{x}=۲x \quad \left(۰<x<۱\Rightarrow\frac{۱}{x}>۱\Rightarrow x-\frac{۱}{x}<۰\right)$

ج) $A=\sqrt{a+۲\sqrt{a-۱}}+\sqrt{a-۲\sqrt{a-۱}},(۱\le a\le۲)$

$=\sqrt{\left(\sqrt{a-۱}+۱\right)^۲}+\sqrt{\left(\sqrt{a-۱}-۱\right)^۲}$

$=\left|\sqrt{a-۱}+۱\right|+\left|\sqrt{a-۱}-۱\right|$

$=$ قرینه‌اش + خودش $=\sqrt{a-۱}+۱-\sqrt{a-۱}+۱=۲$

راه حل دوم: طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$A^{۲} = a + ۲\sqrt{a-۱} + ۲\sqrt{a+۲\sqrt{a-۱}}.\sqrt{a-۲\sqrt{a-۱}} + a - ۲\sqrt{a-۱}$$

$$A^{۲} = ۲a + ۲\sqrt{a^{۲} - ۴(a-۱)} = ۲a + ۲|a-۲|$$

$$A^{۲} = ۲a - ۲a + ۴ \Rightarrow |A| = ۲ \overset{a>۰}{\Rightarrow} A = ۲$$

د) $$\frac{۱}{\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}} + \frac{۱}{\sqrt{x-۲\sqrt{x-۱}}} \quad ,(۱<x<۲)$$

$$= \frac{۱}{\sqrt{(\sqrt{x-۱}+۱)^{۲}}} + \frac{۱}{\sqrt{(\sqrt{x-۱}-۱)^{۲}}} \Rightarrow \frac{۱}{|\sqrt{x-۱}+۱|} + \frac{۱}{|\sqrt{x-۱}-۱|}$$

$$\frac{۱}{\text{خودش}} + \frac{۱}{\text{قرینه‌اش}} = \frac{۱}{\sqrt{x-۱}+۱} - \frac{۱}{\sqrt{x-۱}-۱} = \frac{\sqrt{x-۱}-۱-\sqrt{x-۱}-۱}{x-۱-۱} = \frac{۲}{۲-x}$$

تست: مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{\sqrt{x-۲}+۴}{|x-۱|-۲} < ۰$ **کدام است؟**

۱) $x > ۳$ یا $x \leq ۲$ ۲) $۱ \leq x < ۳$ ۳) $-۱ \leq x < ۳$ ۴) $۲ \leq x < ۳$

حل: $x - ۲ \geq ۰ \Rightarrow D = [۲, +\infty)$

چون صورت طرف چپ نامعادله، همواره مثبت است لذا، مخرج بایستی منفی باشد.

$$|x-۱| - ۲ < ۰ \Rightarrow -۲ < x - ۱ < ۲ \Rightarrow -۱ < x < ۳ \xrightarrow{\text{با توجه به دامنه}} ۲ \leq x < ۳$$

تست: مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x-۲| \geq \sqrt{x}$ **کدام است؟**

۱) $x \geq ۴$ یا $x \leq ۰$ ۲) $x \geq ۴$ یا $۰ \leq x \leq ۱$ ۳) $x \geq ۴$ ۴) $۰ \leq x \leq ۴$

حل: $x \geq ۰ \Rightarrow D = [۰, +\infty)$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^{۲} - ۴x + ۴ \geq x \Rightarrow x^{۲} - ۵x + ۴ \geq ۰$$

x	$-\infty$	۱		۴	$+\infty$
$\Rightarrow$	+	۰	−	۰	+

$\Rightarrow x \leq ۱$ یا $x \geq ۴$

$$\xrightarrow{\text{با توجه به دامنه}} ۰ \leq x \leq ۱ \text{ یا } x \geq ۴$$

اگر کتاب و مطالعه نبود من هیچ بودم.	**(نیوتن)**

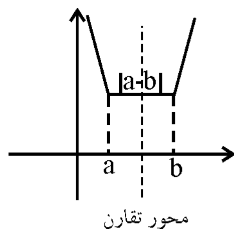
نام نیک، پیراهنی است که هرگز کهنه نمی‌شود.	**(ادیسون)**

رسم نمودار تابع $|x-b| + |x-a| = y$ $(a < b)$ **(تابع گلدان)**

نمایش هندسی این گونه توابع مطابق شکل از دو نیم خط و یک پاره‌خط موازی محور طولها تشکیل شده است و در واقع داریم:

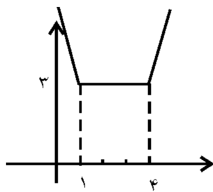
$$y = \begin{cases} -۲x + a + b & ,(x < a) \\ b - a & ,(a \le x < b) \\ ۲x - a - b & ,(b \le x) \end{cases}$$

چون نمودار این تابع به صورت یک گلدان (____/) می‌باشد این تابع را تابع گلدان نیز می‌گویند. به شکل این تابع توجه کنید.

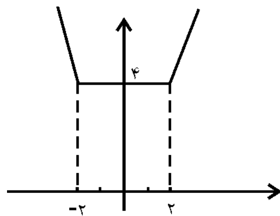


مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید؟

الف) $y = |x-۱| + |x-۴|$



ب) $y = |x - ۲| + |x + ۲|$



ویژگیهای تابع گلدان

۱) $D_f = R$ دامنه

۲) $R_f = [|a - b| , +\infty)$ یا $y \ge |a - b|$ برد

۳) $Min(y) = |a - b|$

۴) $x = \frac{a+b}{۲}$ محور تقارن

۵) $y = |x - a| + |x + a|$ تابع زوج $\rightarrow x = \frac{-a+a}{۲} = ۰$ محور تقارن

در واقع هرگاه a و b قرینه باشند، تابع زوج می‌شود.

۶) تابع در a و b مشتق‌پذیر نیست.

۷) $\begin{cases} x > b \Rightarrow y' = +2 \\ a < x < b \Rightarrow y' = 0 \\ x < a \Rightarrow y' = -2 \end{cases}$

۸) $\begin{cases} y'^{+}(b) = +2 \quad , \quad y'^{-}(b) = 0 \\ y'^{+}(a) = 0 \quad , \quad y'^{-}(a) = -2 \end{cases}$

یا درست حرف بزن یا عاقلانه سکوت کن. **«ژوزف هربرت»**

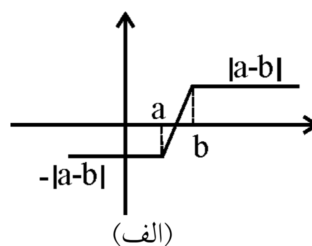
رسم نمودار توابع به صورت $\begin{cases} (a < b) \quad , \quad y = |x - a| - |x - b| \\ (a > b) \quad , \quad y = |x - a| - |x - b| \end{cases}$ **(تابع صندلی):**

نمایش هندسی این گونه توابع از دو نیم خط موازی محور طولها و یک پاره‌خط تشکیل شده است. در واقع در حالت (الف) داریم:

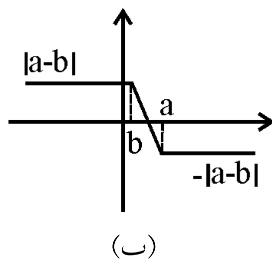
$$y = \begin{cases} a - b \quad , \quad (x < a) \\ 2x - a - b \quad , (a \le x < b) \\ b - a \quad , \quad (b < x) \end{cases}$$

چون نمودار این تابع به صورت یک صندلی (یا) می‌باشد، این تابع را تابع صندلی نیز می‌گویند.

به شکل این تابع در حالت (الف) و (ب) توجه کنید.



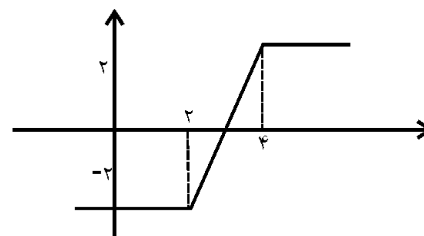
(الف)



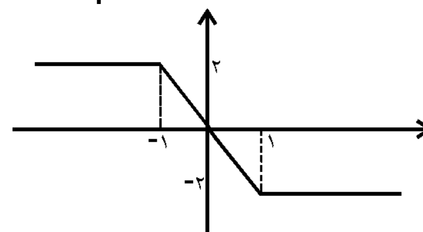
(ب)

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید؟

الف) $y = |x - 2| - |x - 4|$



ب) $y = |x - 1| - |x + 1|$



ویژگیهای تابع صندلی (در شکل الف)

۱) $D_f = R$

۲) $R_f = [-|a-b| \;,\; +|a-b|]$ یا $-|a-b| \le y \le |a-b|$

۳) $Min(y) = -|a-b| \quad , \quad Max(y) = |a-b|$

۴) $\omega \left| \begin{array}{l} \frac{a+b}{۲} \\ ۰ \end{array} \right.$ مرکز تقارن

۵) $y = |x-a| - |x+a|$ تابع فرد $\Rightarrow \omega \left| \begin{array}{l} x = \frac{a+(-a)}{۲} = ۰ \\ ۰ \end{array} \right.$ مرکز تقارن

۶) تابع در a و b مشتق‌پذیر نیست.

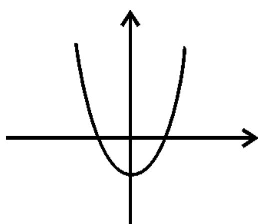
۷) $\begin{cases} x > b \text{ یا } x < a \Rightarrow y' = ۰ \\ a < x < b \Rightarrow y' = +۲ \end{cases}$

۸) $\begin{cases} y'^{+}(b) = y'^{-}(a) = ۰ \\ y'^{+}(a) = y'^{-}(b) = ۲ \end{cases}$

بحث در وجود، علامت و تعداد ریشه‌های یک معادله از طریق ترسیم:

یکی از روشهای حل یک معادله، روش ترسیم است. در این روش می‌توان به هر یک از دو صورت زیر، عمل کرد.

روش اول: برای یافتن ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$، کافی است نمودار تابع f را رسم کرده، طولهای نقاط برخورد منحنی با محور xها (در صورت وجود) همان ریشه‌های معادله خواهند بود البته در این روش می‌توان مقدار تقریبی ریشه‌ها و در بعضی از موارد، خود ریشه‌های معادله را به دست آورد.

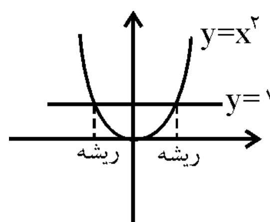


مثال: مطلوبست تعداد و علامت ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۱ = ۰$ از طریق ترسیم؟

حل: با توجه به نمودار $y = x^۲-۱$ دیده می‌شود که این معادله دارای دو ریشه، یکی مثبت و دیگری منفی است.

روش دوم: در این روش قسمتی از معادلهٔ $f(x) = ۰$ را به طرف راست برده و طولهای نقاط برخورد دو معادله را به دست آورده، این طولها ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$ می‌باشند.

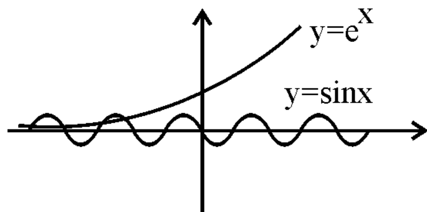
مثال: مطلوبست تعداد و علامت ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۱ = ۰$ از طریق ترسیم؟



حل: با توجه به نمودار، دیده می‌شود که معادله دارای دو ریشه، یکی مثبت و دیگری منفی است.

$x^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} y = x^۲ \\ y = ۱ \end{cases}$

مثال: مطلوبست تعداد و علامت ریشه‌های معادلهٔ $e^x - \sin x = 0$ ؟



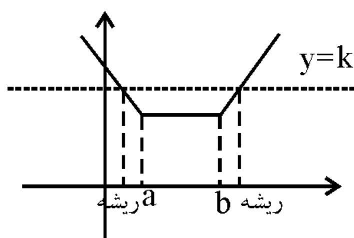
حل: $e^x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} y = e^x \\ y = \sin x \end{cases}$

با توجه به نمودار دیده می‌شود که معادله بیشمار ریشه منفی دارد.

تجربه معلم سختگیری است، اول امتحان می‌کند و بعد درس می‌دهد.　　«اسپودی تمز»

بحث در وجود و تعداد ریشه‌های معادلهٔ $|x - a| + |x - b| = k \quad (k > 0)$

برطبق روش دوم فوق کافی است نمودار دو تابع $\begin{cases} y = |x - a| + |x - b| \\ y = k \end{cases}$ را رسم کرده و بر اساس تعداد نقاط برخوردشان بحث کنیم، خلاصهٔ بحث چنین است.

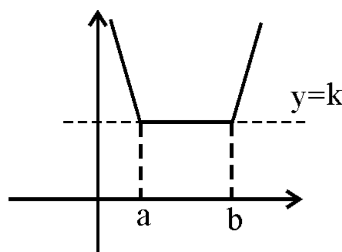


۱) اگر $k > |a - b|$ باشد معادله دو ریشه خواهد داشت در این حالت یکی از دو ریشه بزرگتر از b و دیگری کوچکتر از a است.

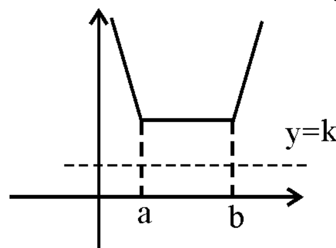
مقدار این دو ریشه از فرمول زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} x = \frac{a+b+k}{2} \text{ (ریشهٔ بزرگتر از b)} \\ x = \frac{a+b-k}{2} \text{ (ریشهٔ کوچکتر از a)} \end{cases}$$

ب) هرگاه $k = |a - b|$ باشد، مطابق شکل معادله بیشمار جواب خواهد داشت در این حالت ریشه‌های معادله عبارتند از کلیهٔ اعداد بازهٔ $[a , b]$



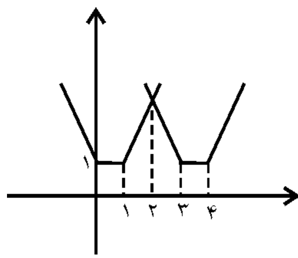
ج) هرگاه $k < |a - b|$ باشد معادله ریشه نخواهد داشت. به شکل توجه کنید.



تست: معادلهٔ $|x - 1| + |x + 9| = 10$ **چند ریشه دارد؟**

۱) ۰　　۲) ۲　　۳) ۱　　۴) بیشمار

حل: چون $\begin{cases} k = 10 \\ |a - b| = |1 - (-9)| = 10 \end{cases}$ لذا بیشمار ریشه دارد، ریشه‌های این معادله عبارتند از کلیه‌ی اعداد بازهٔ $[-9,1]$



تست: معادلهٔ $|x| + |x-1| - |x-4| = |x-3|$، چند ریشه دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) بیشمار ۴) ۲

حل: با توجه به شکل، $|x| + |x-1| = |x-3| + |x-4|$

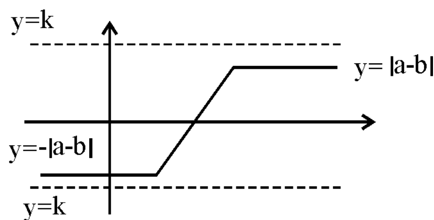
دیده می‌شود که معادله ۱ ریشه دارد.

البته همانطور که دیده می‌شود، این ریشه عدد ۲ می‌باشد.

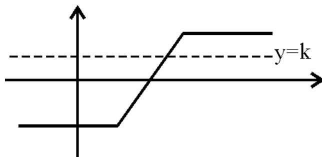
بحث در وجود و تعداد ریشه‌های معادلهٔ $|x-a| - |x-b| = k$ $(a < b)$,

در این حالت نیز با رسم نمودار $\begin{cases} y = |x-a| - |x-b| \\ y = k \end{cases}$، خلاصهٔ بحث چنین است.

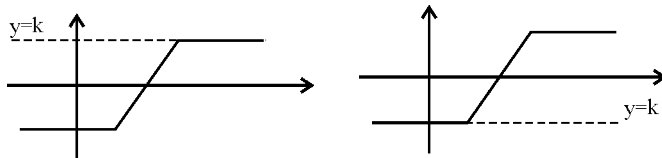
۱) $k > |a-b|$ یا $k < -|a-b|$، معادله ریشه ندارد.



۲) اگر $-|a-b| < k < |a-b|$، معادله ۱ ریشه دارد، در این حالت ریشه‌ی معادله از دستور $x = \frac{a+b+k}{۲}$ به دست می‌آید.



۳) اگر $k = |a-b|$ یا $k = -|a-b|$، معادله بی‌شمار جواب دارد. در حالت $k = |a-b|$، ریشه‌ها عبارتند از: کلیهٔ اعداد بازهٔ $[b, +\infty)$ و در حالت $k = -|a-b|$، ریشه‌ها عبارتند از کلیهٔ اعداد بازهٔ $(-\infty, a]$.



تست: معادلهٔ $|x-2| - |x-4| = 1$ چند ریشه دارد؟

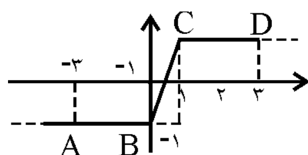
۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۲ ۴) بیشمار

حل: چون $\begin{cases} |a-b| = ۲ \\ k = ۱ \end{cases}$ و $-۲ < ۱ < ۲$، پس معادله ۱ ریشه دارد.

تست: طول خط شکسته‌ی نمودار تابع $y = |x| - |x-1|$، در فاصله‌ی $|x| \leq ۳$ کدام است؟

۱) $۳ - \sqrt{۳}$ ۲) $۳ + \sqrt{۳}$ ۳) $۵ - \sqrt{۵}$ ۴) $۵ + \sqrt{۵}$

حل: طول خط شکسته‌ی ABCD $= ۳ + BC + ۲ = ۵ + \sqrt{۵}$



تست: اگر خط افقی $y = k$ و قسمتی از نمودار $y = |x-2| - |x+5|$ بر هم منطبق باشند، k کدام است؟

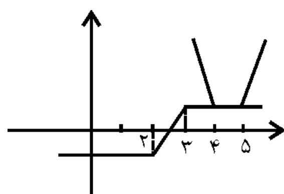
۱) ۳- یا ۳ = k	۲) $-3 < k < 3$	۳) ۷ یا ۷- = k	۴) $-7 < k < 7$

حل: چون $7 = |2-(-5)| = |a-b|$، لذا کافی است ۷- یا ۷ = k

تست: معادلهٔ $|x-2| = |x-3| + |x-4| + |x-5|$ چند ریشه دارد؟

۱) بیشمار	۲) ۱	۳) ۰	۴) ۲

حل: با توجه به نمودار، معادله بیشمار جواب دارد که عبارتند از کلیهٔ اعداد بازهٔ [۴,۵]	$|x-2| - |x-3| = |x-4| + |x-5|$



بدترین کلمات برای من اینهاست: «نمی‌دانم ـ نمی‌توانم ـ نمی‌شود» . «ناپلئون»

نمودار مربع: هر معادله به صورت $|x-a| + |y-b| = k$، $(k > 0)$، معادلهٔ یک مربع است، ویژگیهای این معادله عبارتند از:

۱) مربع تابع نیست.

۲) اقطار این مربع، موازی محورهای مختصات است.

۳) $\omega \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right.$ مرکز مربع و در واقع مرکز تقارن مربع است.

۴) عدد k نصف قطر مربع است و لذا قطر مربع برابر 2k است.

۵) عدد $k\sqrt{2}$، ضلع مربع است. (قضیهٔ فیثاغورث)

۶) محیط مربع عبارتست از: $4k\sqrt{2}$

۷) مساحت مربع عبارتست از: $(k\sqrt{2})^2 = 2k^2$

۸) خطوط $x = a$ و $y = b$ و $y = \pm(x-a)+b$ محورهای تقارن آن هستند.

۹) با توجه به شکل فوق، حدود x و y و لذا دامنه و برد مربع عبارتند از:

$$\begin{cases} a-k \le x \le a+k \\ b-k \le y \le b+k \end{cases}$$

دامنه $D = [a-k\ ,\ a+k]$

برد $R = [b-k\ ,\ b+k]$

۱۰) نقطهٔ $A \left| \begin{matrix} a \\ b+k \end{matrix} \right.$، نقطه Max و نقطهٔ $B \left| \begin{matrix} a \\ b-k \end{matrix} \right.$، نقطهٔ Min آن است.

۱۱) ماکزیمم و می‌نیمم y برابرند با:

$$\begin{cases} \text{Max}(y) = b+k \\ \text{Min}(y) = b-k \end{cases}$$

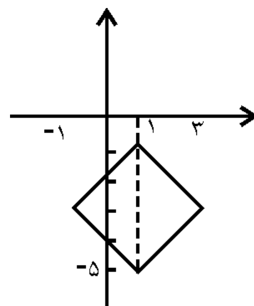
۱۲) برای رسم مربع در حالت کلی، بایستی چهار حالت زیر را در نظر گرفت و سپس با توجه به آنها، عبارات را از داخل قدر مطلق بیرون آورده و خطوط به دست آمده را رسم کرده و با توجه به:

$$\begin{cases} ۱) x \ge a , y \ge b \\ ۲) x \ge a , y \le b \\ ۳) x \le a , y \ge b \\ ۴) x \le a , y \le b \end{cases}$$

مربع را رسم کنیم.

اما برای رسم آسانتر مربع، ابتدا مرکزش را به دست آورده، سپس در مرکز دو خط عمود برهم و موازی محورهای مختصات رسم کرده، از هر طرف به اندازهٔ k جدا کرده، تا رئوس مربع به دست آمده و مربع رسم شود.

مثال: مربع $|x - ۱| + |y + ۳| = ۲$ را رسم کنید؟



تست: Max **مقدار y در رابطهٔ $|x - ۲| + |y + ۳| = ۴$ کدام است؟**

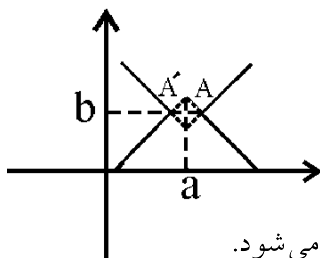
۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۷ ۴) ۷-

حل: $Max\ (y) = b + k = -۳ + ۴ = ۱$

نکته: در رابطهٔ $|x-a| + |y-b| = k$، اگر $k = ۰$ باشد، آنگاه $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ و نمودار یک نقطه به مختصات (a,b) خواهد بود.

نکته: بررسی نمودار رابطهٔ $|x - a| - |y - b| = k$

اگر $k > ۰$ باشد، نمودار رابطهٔ فوق، دو زاویهٔ قائمه است که رأس مشترک ندارند (به شکل توجه کنید) در این حالت امتداد اضلاع دو زاویه، تشکیل مربعی در مرکز $\omega \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right.$ و به طول قطر برابر ۲k می‌دهند که اقطار آن، موازی محورهای مختصات می‌باشند.

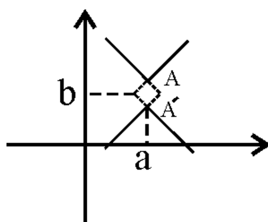


در این حالت $\omega \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right.$ مرکز تقارن و خطوط $x = a$ و $x = b$، محورهای تقارن نمودار رابطهٔ فوق می‌باشند.

تذکر: اگر $k = ۰$ باشد، نقاط A و A' برهم منطبق شده و نمودار، دو خط عمود بر هم می‌شود.

نکته: بررسی نمودار رابطهٔ $|y - b| - |x - a| = k$

اگر $k > ۰$ باشد، نمودار رابطهٔ فوق، دو زاویهٔ قائمه است که رأس مشترک ندارند (به شکل توجه کنید)، در این حالت امتداد اضلاع دو زاویه تشکیل مربعی می‌دهند که اقطارش موازی محورهای مختصات بوده و $\omega \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right.$ مرکز و ۲k طول قطرش می‌باشند. در این حالت $\omega \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right.$ مرکز تقارن و خطوط $x = a$ و $y = b$، محورهای تقارن نمودار رابطهٔ فوق می‌باشند.



تذکر: اگر $k = ۰$ باشد، نقاط A و A' برهم منطبق شده و نمودار، دو خط عمود برهم می‌شود.

نمودار لوزی: هر معادله به صورت $|ax - b| + |cy - d| = k \ , \ (k > ۰)$ معادلهٔ یک لوزی است، ویژگیهای این معادله عبارتست از:

۱) لوزی یک تابع نیست.

۲) اقطار این لوزی، موازی محورهای مختصات است.

۳) $\omega \left| \begin{matrix} \frac{b}{a} \\ \frac{d}{c} \end{matrix} \right.$ مرکز و در واقع مرکز تقارن لوزی است.

۴) طول اقطار آن عبارتست از: $\frac{۲k}{|a|} \ , \ \frac{۲k}{|c|}$

۵) مساحت لوزی عبارتست از: $\frac{۲k^۲}{ac} = \frac{\text{قطر بزرگ} \times \text{قطر کوچک}}{۲} = S$

۶) خطوط $x = \frac{b}{a}$ و $y = \frac{d}{c}$ محورهای تقارن آن می‌باشند.

تست: مساحت محدود به شکل $|۲x - ۱| + |y - ۱| = ۴$، کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۸ ۳) ۴ ۴) ۶۴

حل: $S = \frac{۲k^۲}{ac} = ۱۶$

نمودار متوازی الاضلاع:

هر معادله به صورت $|ax + by + c| + |a'x + b'y + c'| = k \ , \ (k > ۰ \ , \ \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'})$ معادلهٔ یک متوازی الاضلاع است که

معادلات اقطارش خطوط $\begin{cases} ax + by + c = ۰ \\ a'x + b'y + c' = ۰ \end{cases}$ می‌باشند.

ضمناً:

۱) هرگاه شرط $\frac{b}{a} = -\frac{a'}{b'}$ برقرار باشد، نمودار فوق، نمودار یک لوزی می‌شود.

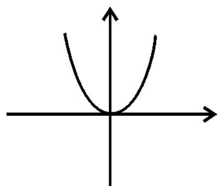
۲) هرگاه شرط $a^۲ + b^۲ = a'^۲ + b'^۲$ برقرار باشد، نمودار فوق، نمودار یک مستطیل می‌شود.

۳) هرگاه شرط $\begin{cases} b' = -a \\ a' = b \end{cases}$ یا $\begin{cases} b' = a \\ a' = -b \end{cases}$ برقرار باشد، نمودار فوق، نمودار یک مربع می‌شود.

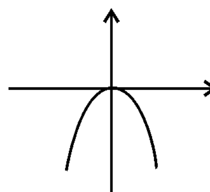
«دائماً یکسان نباشد حال دوران، غم مخور» . «حافظ»

یادآوری:
آشنائی با نمودار توابع و رابطه‌های مختلف

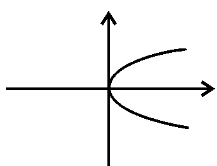
۱) $y = x^2$



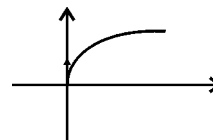
۲) $y = -x^2$



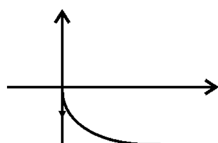
۳) $x = y^2$



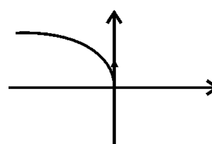
۴) $y = \sqrt{x}$



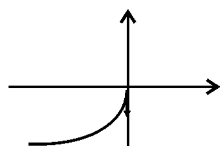
۵) $y = -\sqrt{x}$



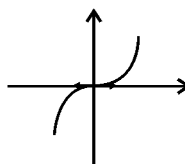
۶) $y = \sqrt{-x}$



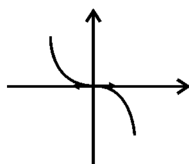
۷) $y = -\sqrt{-x}$



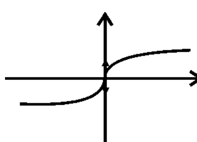
۸) $y = x^3$



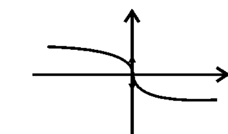
۹) $y = -x^3$



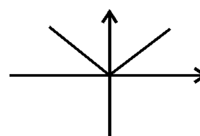
۱۰) $x = y^3$ یا $y = \sqrt[3]{x}$



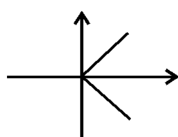
۱۱) $x = -y^3$ یا $y = -\sqrt[3]{x}$



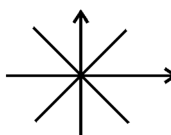
۱۲) $y = |x|$



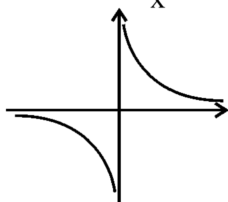
۱۳) $x = |y|$



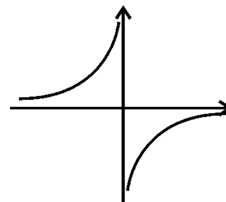
۱۴) $|x| = |y|$



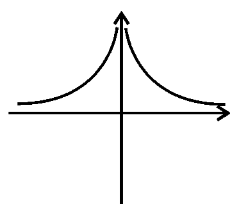
۱۵) $y = \frac{1}{x}$



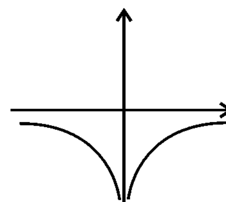
۱۶) $y = \frac{-1}{x}$



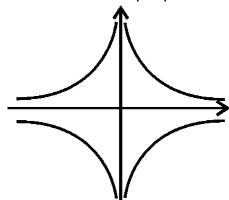
۱۷) $y = \frac{1}{x^2}$



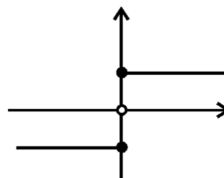
۱۸) $y = \frac{-1}{x^2}$



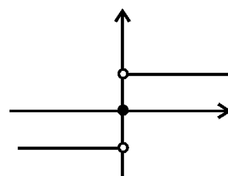
۱۹) $|y| = \frac{1}{|x|}$



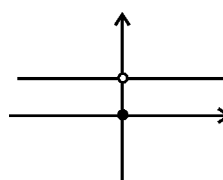
۲۰) $y = \frac{|x|}{x}$



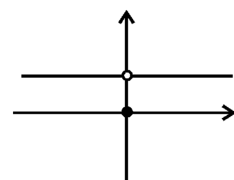
۲۱) $y = \text{sign}(x)$



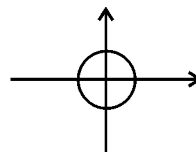
۲۲) $y = \text{sign}(|x|)$



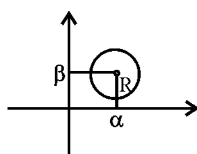
۲۳) $y = \text{sign}(x^2)$



۲۴) $x^2 + y^2 = R^2$

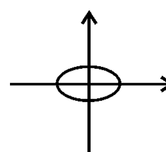


۲۵) $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$



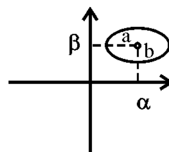
$w\left|\begin{matrix}\circ\\ \circ\end{matrix}\right.$ مرکز دایره و R شعاع دایره است.

۲۶) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



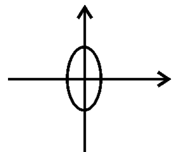
۲۸) $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$

$\omega \left| \begin{matrix} \circ \\ \circ \end{matrix} \right.$ مرکز بیضی، a نصف قطر بزرگ و b نصف قطر کوچک بیضی است.

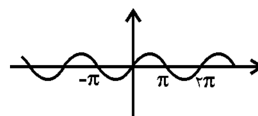


۲۷) $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

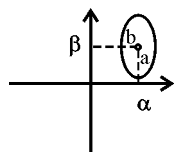
$\omega \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right.$ مرکز و R شعاع دایره است.



۳۰) $y = \sin x$

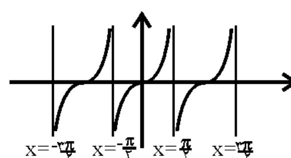


۲۹) $\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1$

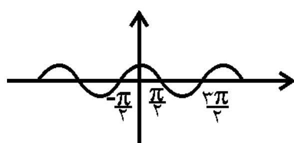


$\omega \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right.$ مرکز بیضی، a نصف قطر بزرگ و b نصف قطر کوچک بیضی است.

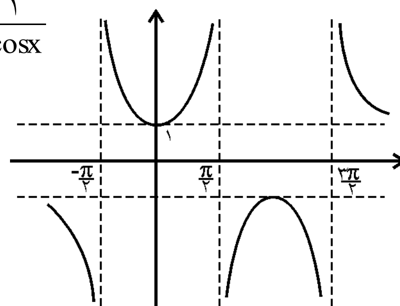
۳۲) $y = \tan x$



۳۱) $y = \cos x$

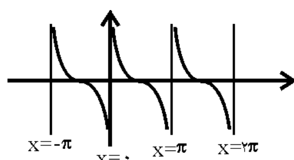


۳۴) $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$



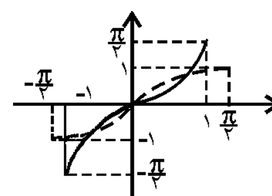
$-1 \le \cos x \le 1 \Leftrightarrow \sec x \le -1$ یا $\sec x \ge 1$

۳۳) $y = \cot x$

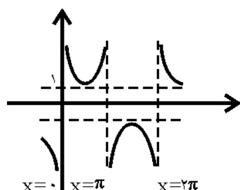


۳۶) $y = \text{Arc} \sin x$

$$\begin{cases} D_f=[-1,1] \\ R_f=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$



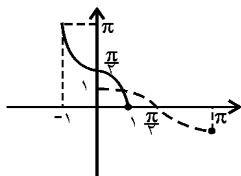
۳۵) $y = \text{cosec}x = \frac{1}{\sin x}$



$-1 \le \sin x \le 1 \Leftrightarrow \text{cosec}x \le -1$ یا $\text{cosec}x \ge 1$

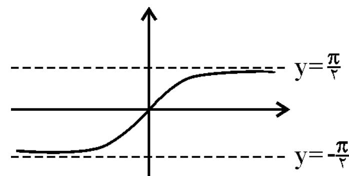
۳۷) $y = \mathrm{Arccos}x$

$\begin{cases} D_f = [-۱, ۱] \\ R_f = [۰, \pi] \end{cases}$



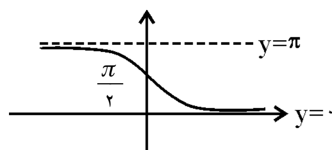
۳۸) $y = \mathrm{Arctan}x$

$\begin{cases} D_f = R \\ R_f = (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}) \end{cases}$



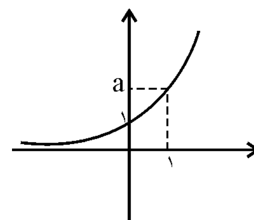
۳۹) $y = \mathrm{Arccot}\, x$

$\begin{cases} D_f = R \\ R_f = (۰, \pi) \end{cases}$



۴۰) $y = a^x, (a > ۱)$

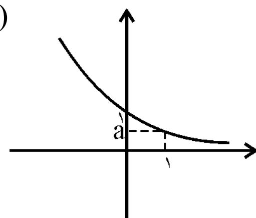
$\begin{cases} D_f = R \\ R_f = (۰, +\infty) \end{cases}$



نکته: دقت کنید چون $a > ۱$ است، لذا هرچه x بزرگتر شود، a^x یعنی y نیز بزرگتر می‌شود، بنابراین تابع در این حالت اکیداً صعودی است یعنی: $x_۱ < x_۲ \Rightarrow a^{x_۱} < a^{x_۲}$

۴۱) $y = a^x, (۰ < a < ۱)$

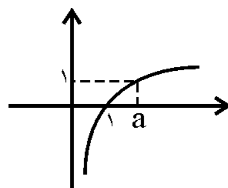
$\begin{cases} D_f = R \\ R_f = (۰, +\infty) \end{cases}$



نکته: دقت کنید چون $۱ > a > ۰$ است، لذا هرچه x بزرگتر شود، a^x یعنی y کوچکتر می‌شود، بنابراین تابع در این حالت اکیداً نزولی است. یعنی: $x_۱ < x_۲ \Rightarrow a^{x_۱} > a^{x_۲}$

۴۲) $y = \log_a^x \quad ,(a > ۱)$

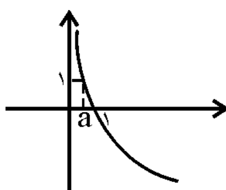
$\begin{cases} D_f = (۰, +\infty) \\ R_f = R \end{cases}$



نکته: توجه داشته باشید که چون $a > ۱$ است، لذا هرچه x بزرگتر شود، $\log_a^x$ یعنی y نیز بزرگتر می‌شود بنابراین در این حالت اکیداً صعودی است. یعنی: $۰ < x_۱ < x_۲ \Rightarrow \log_a^{x_۱} < \log_a^{x_۲}$

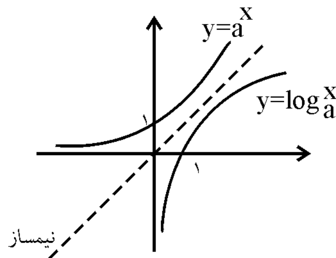
۴۳) $y = \log_a^x \quad ,(۰ < a < ۱)$

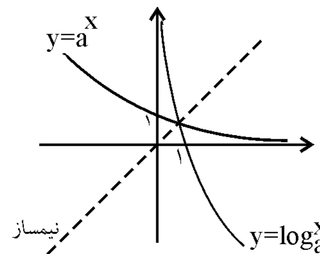
$\begin{cases} D_f = (۰, +\infty) \\ R_f = R \end{cases}$



نکته: توجه داشته باشید که چون $۰ < a < ۱$ است، لذا هرچه x بزرگتر شود، $\log_a^x$ یعنی y کوچکتر می‌شود، بنابراین تابع در این حالت اکیداً نزولی است. یعنی: $۰ < x_۱ < x_۲ \Rightarrow \log_a^{x_۱} > \log_a^{x_۲}$

نکته: توجه داشته باشید که توابع $y = \log_a^x$ و $y = a^x$، توابع معکوس یکدیگرند.



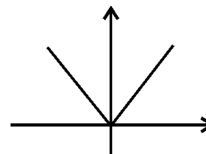


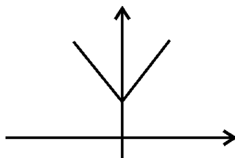
«نمی‌دانم چرا نوید بهار، از خود آن دلنشین‌تر است».	«لامارتین»

نکاتی راجع‌به رسم نمودارهای مختلف به روش انتقال و قرینه‌یابی و...از روی نمودار تابع مفروض $y = f(x)$

۱) برای رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، $(k > ۰)$، کافی است نمودار f را به اندازهٔ k به صرف بالا انتقال دهیم.

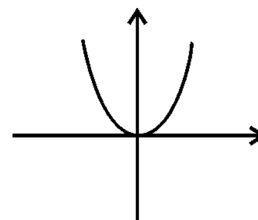
مثال: $y = |x|$ $\qquad$ $y = |x| + ۲$

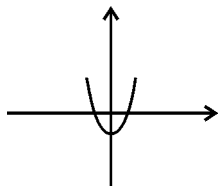




۲) برای رسم نمودار $y = f(x) - k$ ، $(k > ۰)$، کافی است نمودار f را به اندازهٔ k به طرف پائین انتقال دهیم.

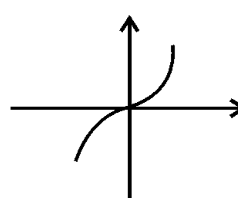
مثال: $y = x^۲$ $\qquad$ $y = x^۲ - ۱$

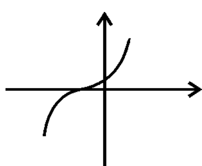




۳) برای رسم نمودار $y = f(x + k)$ ، $(k > ۰)$، کافی است نمودار f را به اندازهٔ k به سمت چپ (نه اشتباهاً به سمت راست) انتقال دهیم.

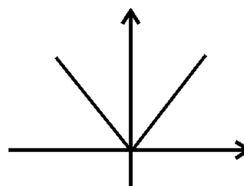
مثال: $y = x^۳$ $\qquad$ $y = (x + ۱)^۳$



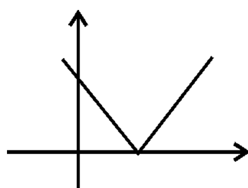


۴) برای رسم نمودار $y = f(x - k)$، $(k > ۰)$، کافی است نمودار f را به اندازهٔ k به سمت راست (نه اشتباهاً به سمت چپ) انتقال دهیم.

مثال:

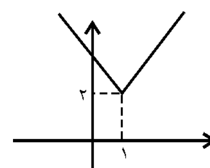


$y = |x|$

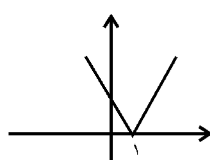


$y = |x - ۲|$

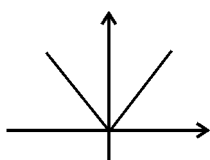
مثال ترکیبی: نمودار $y = |x - ۱| + ۲$ را رسم کنید؟



(۳) $y = |x - ۱| + ۲$



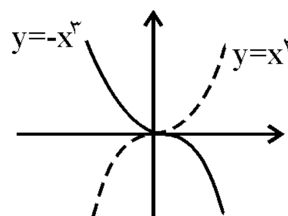
(۲) $y = |x - ۱|$



(۱) $y = |x|$

۵ـ برای رسم نمودار $y = f(-x)$، کافی است قرینهٔ نمودار f را نسبت به محورyها رسم کنیم.

مثال:

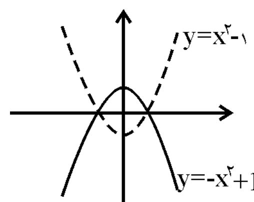


$y = x^۳$

$y = (-x)^۳ = -x^۳ \quad y = -x^۳$

۶ـ برای رسم نمودار $y = -f(x)$، کافی است قرینهٔ نمودار f را نسبت به محورxها رسم کنیم.

مثال:

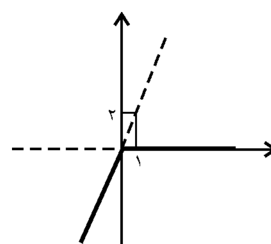


$y = x^۲ - ۱$

$y = -(x^۲ - ۱) = -x^۲ + ۱$

۷ـ برای رسم نمودار $y = -f(-x)$، کافی است قرینهٔ نمودار f را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم.

مثال:

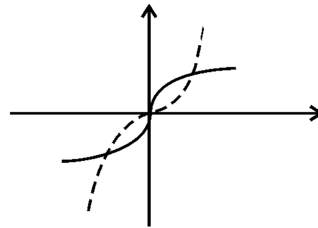


$$y = x + |x| = \begin{cases} ۲x & ,(x \geq ۰) \\ ۰ & ,(x < ۰) \end{cases}$$

$$y = -(-x + |-x|) = x - |x| = \begin{cases} ۰ & ,(x \geq ۰) \\ ۲x & ,(x < ۰) \end{cases}$$

۸ـ برای رسم نمودار $x = f(y)$، (وارون یا معکوس f)، کافی است قرینهٔ نمودار f را نسبت به خط نیمساز ربع اول و سوم (خط $y = x$) رسم کنیم.

مثال:

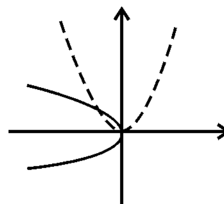


$y = x^3$

$x = f(y) \Rightarrow x = y^3$ یا $y = \sqrt[3]{x}$

۹ـ برای رسم نمودار $-x = f(-y)$ یا $x = -f(-y)$، کافی است قرینهٔ نمودار f را نسبت به خط نیمساز ربع دوم و چهارم (خط $y = -x$) رسم کنیم.

مثال:



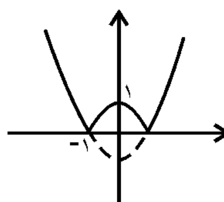
$y = x^2$

$-x = (-y)^2 \Rightarrow x = -y^2$

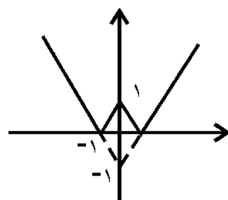
«با یک ارادهٔ قوی، به هر جا می‌توان رسید» . «گوته»

۱۰ـ برای رسم نمودار $y = |f(x)|$، کافی است، نمودار f را رسم کرده و سپس با توجه به اینکه $|f(x)| \geq 0$ است، قرینهٔ قسمتهائی را که زیر محور xها قرار گرفته‌اند را نسبت به محور xها (در بالای محور xها) رسم کنیم.

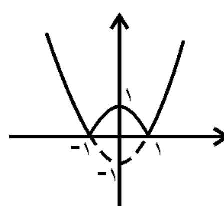
مثال: $y = x^2 - 1$ $\qquad$ $y = |x^2 - 1|$



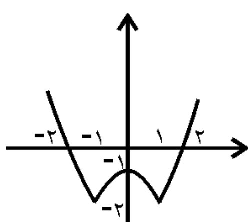
مثال: $y = |x| - 1$ $\qquad$ $y = ||x| - 1|$



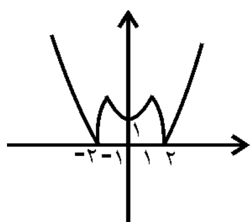
مثال: $y = |x^2 - 1| - 2$ $\qquad$ $y = ||x^2 - 1| - 2|$



(۱) $y = |x^2 - 1|$



(۲) $y = |x^2 - 1| - 2$



(۳) $y = \left|\,|x^2 - 1| - 2\,\right|$

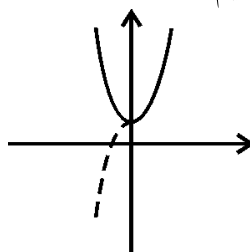
۱۱ـ برای رسم نمودار $y = f(|x|)$، با توجه به اینکه:

$$y = \begin{cases} f(x) & ,(x \geq 0) \\ -f(x) & ,(x < 0) \end{cases}$$

کافی است نمودار f را رسم کرده، قسمتهای سمت چپ محور y را حذف کرده، سپس قرینهٔ قسمتهای باقیمانده (سمت راست) را نسبت به محور yها، به آن اضافه کنیم.

مثال: $y = x^3 + 1$

$$y = |x|^3 + 1 = \begin{cases} x^3 + 1 & ,(x \geq 0) \\ -x^3 + 1 & ,(x < 0) \end{cases}$$



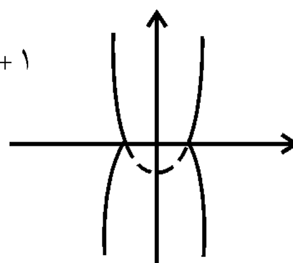
۱۲ـ برای رسم نمودار $|y| = f(x)$، با توجه به اینکه:

$$\begin{cases} y \geq 0 \Rightarrow y = f(x) \\ y < 0 \Rightarrow -y = f(x) \quad \text{یا} \quad y = -f(x) \end{cases}$$

کافی است نمودار f را رسم کرده، قسمتهای زیر محورxها را حذف کرده، سپس قرینهٔ قسمتهای باقیمانده (بالای محور xها) را نسبت به محور xها به آن اضافه کنیم.

مثال: $y = x^2 - 1$

$$|y| = x^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \Rightarrow y = x^2 - 1 \\ y < 0 \Rightarrow -y = x^2 - 1 \quad \text{یا} \quad y = -x^2 + 1 \end{cases}$$



۱۳ـ برای رسم نمودار $|y| = f(|x|)$ با توجه به خواص قدر مطلق، چهار حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

۱) $x \geq 0\ ,\ y \geq 0 \ \Rightarrow y = f(x)$

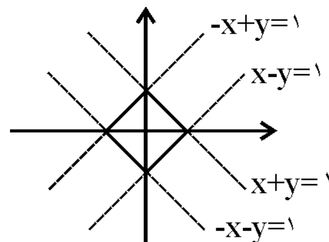
۲) $x \geq 0\ ,\ y \leq 0 \ \Rightarrow -y = f(x)$ یا $y = -f(x)$

۳) $x \leq 0\ ,\ y \geq 0 \ \Rightarrow y = f(-x)$

۴) $x \leq 0\ ,\ y \leq 0 \ \Rightarrow -y = f(-x)$ یا $y = -f(-x)$

حال برای رسم نمودار $|y| = f(|x|)$، کافی است از نمودار $y = f(x)$، قسمتهائی را انتخاب کنیم که در ربع اول است. $(x \geq 0 , y \geq 0)$، از نمودار $y = -f(x)$، قسمتهائی را انتخاب کنیم که در ربع چهارم است. $(x \geq 0 , y \leq 0)$، از نمودار $y = f(-x)$، قسمتهائی را انتخاب کنیم که در ربع دوم است و بالاخره از نمودار $y = -f(-x)$، قسمتهائی را انتخاب کنیم که در ربع سوم است.

مثال: $y = -x + 1$ یا $x + y = 1$



$|y| = -|x| + 1$
یا
$|x| + |y| = 1$

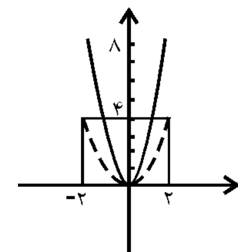
«اتلاف وقت، خودکشی واقعی است» . «ابوسعید»

۱۴ـ برای رسم نمودار $y = kf(x)$، $(k > 0)$ ابتدا توجه داشته باشید که اگر نقطهٔ $M \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right.$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطهٔ $M' \left| \begin{matrix} x_0 \\ ky_0 \end{matrix} \right.$ روی نمودار $y = kf(x)$ است و بالعکس. لذا برای رسم نمودار $y = kf(x)$، کافی است عرض هر نقطه از نمودار f را (با حفظ طول آن) در عدد k ضرب کنیم، در این حالت اگر برد تابع $y = f(x)$، بازهٔ $[c,d]$ باشد، برد تابع $y = k f(x)$، بازهٔ $[kc , kd]$ خواهد بود.

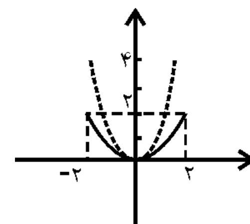
تذکر مهم:
- الف) اگر $k > 1$ باشد، نمودار در همان دامنه، در جهت قائم کشیده‌تر (جمع‌تر) می‌شود. (یعنی برد تابع بزرگتر می‌شود).
- ب) اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار در همان دامنه، در جهت قائم، بازتر می‌شود. (یعنی برد تابع، کوچکتر می‌شود.)

مثال: $y = x^2 , (-2 \leq x \leq 2)$

الف) $y = 2f(x) = 2x^2 \rightarrow \begin{cases} D = [-2,2] & \text{دامنه} \\ R = [0,8] & \text{برد} \end{cases}$



ب) $y = \frac{1}{2} f(x) = \frac{1}{2}x^2 \rightarrow \begin{cases} D = [-2,2] & \text{دامنه} \\ R = [0,2] & \text{برد} \end{cases}$



۱۵ـ برای رسم نمودار $y = f(kx)$, $(k > 0)$، ابتدا توجه داشته باشید که اگر نقطهٔ $M \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right.$ روی نمودار $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطهٔ $M' \left| \begin{matrix} \frac{x_0}{k} \\ y_0 \end{matrix} \right.$ روی نمودار $y = f(kx)$ است و بالعکس. لذا برای رسم نمودار $y = f(kx)$، کافی است طول هر نقطهٔ منحنی f را (با حفظ عرض آن) بر عدد k تقسیم کنیم، در این حالت اگر دامنهٔ تابع $y = f(x)$، بازهٔ $[a,b]$ باشد، دامنهٔ تابع $y = f(kx)$، بازهٔ $[\frac{a}{k}, \frac{b}{k}]$ خواهد بود.

تذکر مهم:
- الف) اگر $k > 1$ باشد، دامنه‌ی نمودار با همان برد، بسته‌تر می‌شود.
- ب) اگر $0 < k < 1$ باشد، دامنه‌ی نمودار با همان برد، بازتر می‌شود.

مثال: $y = |x|$, $(-2 \le x \le 2)$

الف) $y = f(2x) = |2x| \rightarrow \begin{cases} D = [-1, 1] & \text{دامنه} \\ R = [0, 2] & \text{برد} \end{cases}$

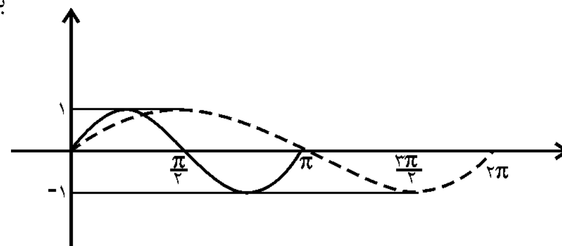
$\overset{\text{دامنه}}{\Rightarrow} -2 \le 2x \le 2 \Rightarrow -1 \le x \le 1$

ب) $y = f(\frac{1}{2}x) = |\frac{x}{2}| \Rightarrow \begin{cases} D = [-4, 4] & \text{دامنه} \\ R = [0, 2] & \text{برد} \end{cases}$

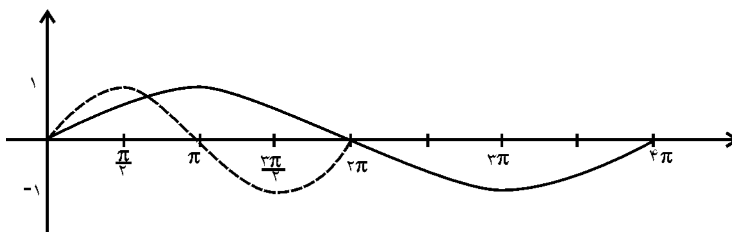
$\overset{\text{دامنه}}{\Rightarrow} -2 \le \frac{1}{2}x \le 2 \Rightarrow -4 \le x \le 4$

مثال:

الف) $y = f(2x) = \sin 2x \rightarrow \begin{cases} D = [0, \pi] & \text{دامنه} \\ R = [-1, 1] & \text{برد} \end{cases}$

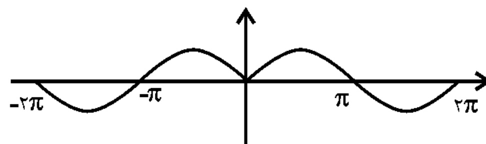


ب) $y = f(\frac{x}{2}) = \sin\frac{x}{2} \rightarrow \begin{cases} D = [0, 4\pi] & \text{دامنه} \\ R = [-1, 1] & \text{برد} \end{cases}$



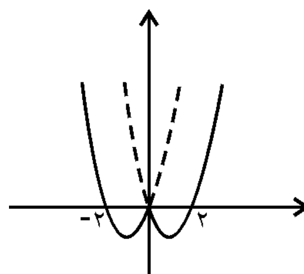
چند مثال متنوع:

۱) $y = \sin|x| \quad , \quad (-۲\pi \le x \le ۲\pi)$

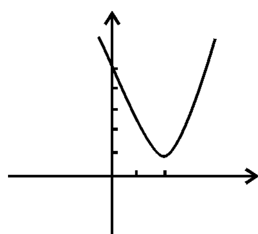


۲) $y = |x|^۲ - ۲|x| = \begin{cases} x^۲ - ۲x, (x \ge ۰) \\ x^۲ + ۲x, (x < ۰) \end{cases}$

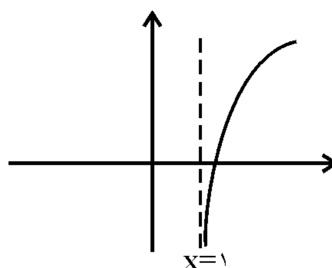
$y = \begin{cases} (x-۱)^۲ - ۱ & ,(x \ge ۰) \\ (x+۱)^۲ - ۱ & ,(x < ۰) \end{cases}$



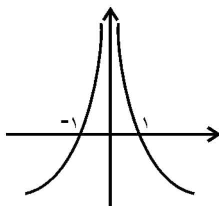
۳) $y = x^۲ - ۴x + ۵ = (x-۲)^۲ + ۱$



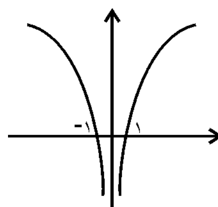
۴) $y = Ln(x-۱)$



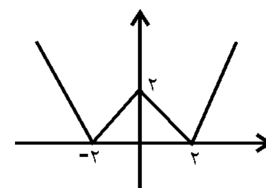
۵) $y = \log_{۰/۱}^{x^۲}$



۶) $y = \log^{x^۲}$

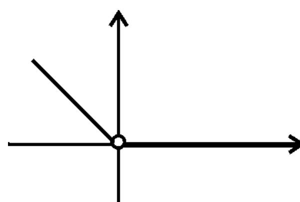


۷) $y = \sqrt{x^۲ - ۴|x| + ۴} = \sqrt{|x|^۲ - ۴|x| + ۴} = \sqrt{(|x| - ۲)^۲} = ||x| - ۲|$

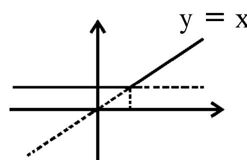


۸) $y = x \left\lfloor \dfrac{۱}{x + \frac{۱}{x}} \right\rfloor = \begin{cases} ۰ & ,(x > ۰) \\ \text{تعریف نشده} & ,(x = ۰) \\ -x & ,(x < ۰) \end{cases}$

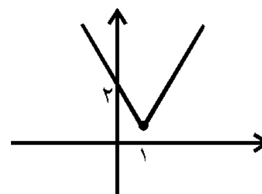
یادآوری: $\begin{cases} a > ۰ \Rightarrow a + \frac{۱}{a} \ge ۲ \\ a < ۰ \Rightarrow a + \frac{۱}{a} \le -۲ \end{cases}$



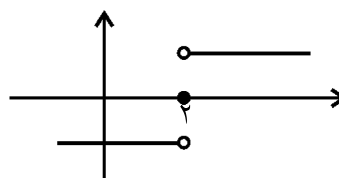
۹) $y = \mathrm{Max}\{1, x\} = \begin{cases} x & ,(x \geq 1) \\ 1 & ,(x < 1) \end{cases}$



۱۰) $y = \mathrm{Max}\{x, 2-x\} = \frac{x+2-x}{2} + \frac{|x-2+x|}{2} = 1 + |x-1|$

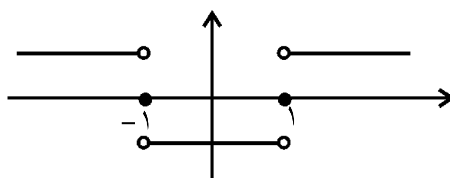


۱۱) $y = \mathrm{sign}(x-2) = \begin{cases} 1 & ,(x > 2) \\ 0 & ,(x = 2) \\ -1 & ,(x < 2) \end{cases}$



در واقع، نمودار $y = \mathrm{sign}(x)$ را ۲ واحد به سمت راست انتقال داده‌ایم.

۱۲) $y = \mathrm{sign}(x^2-1) = \begin{cases} 1 & ,(x^2-1 > 0) \\ 0 & ,(x^2-1 = 0) \\ -1 & ,(x^2-1 < 0) \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} 1 & ,(x < -1 \text{ یا } x > 1) \\ 0 & ,(x = \pm 1) \\ -1 & ,(-1 < x < 1) \end{cases}$



«مرگ حقیقی برای انسان، مرگ امید است» . «ناپلئون»

«استعداد چیزی است که بیشتر در جوانی آشکار می‌شود. «دکارت»

انسان دانا به جای اینکه در انتظار رسیدن یک فرصت خوب در زندگی خود باشد، خود آن فرصت را بوجود می‌آورد. «فرانسیس بیکن»

تست ۱:

۱ـ اگر $x \geq ۳$ باشد، مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x - ۳| ۲ - x^{۲} > ۲$ کدام خواهد بود؟

۱) $۲ \leq x < ۴$ ۲) $۳ \leq x < ۵$ ۳) $۳ \leq x \leq \frac{۷}{۲}$ ۴) $x \geq ۵$

۲ـ مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x^{۲} - ۹| + |x - ۳| < ۰$ کدام است؟

۱) $\{۳\}$ ۲) $\varnothing$ ۳) R^{-} ۴) R

۳ـ هرگاه $۰ < x < ۱$ باشد، حاصل عبارت $A = \sqrt{(x + \frac{۱}{x})^{۲} - ۴} - \sqrt{(x - \frac{۱}{x})^{۲} + ۴}$ کدام است؟

۱) $۲x$ ۲) $\frac{۲}{x}$ ۳) ۰ ۴) $۲(x + \frac{۱}{x})$

۴ـ حاصلضرب ریشه‌های طبیعی معادلهٔ $x + |x - ۵| = ۵$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۸۴ ۳) ۶۰ ۴) ۱۲۰

۵ـ مجموع ریشه‌های معادلهٔ $|x - ۲| + |x - ۵| = ۹$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۷ ۴) ۶

۶ـ اگر $\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۲}$، حاصل $|\cos x - \sin x|$ برابر است با:

۱) $\cos x + \sin x$ ۲) $\cos x - \sin x$ ۳) $\sin x - \cos x$ ۴) ۰

۷ـ مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x - ۱| + |x - ۵| < ۸$ کدام است؟

۱) $(-۱,۷)$ ۲) $(-\infty,۷)$ ۳) $(۷,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۱)$

۸ـ مجموعه جواب نامعادلهٔ $\left| |x^{۲}+۱| - ۱ \right| \leq ۱$ کدام است؟

۱) $|x| \leq ۱$ ۲) ۰ ۳) $[۰,۱]$ ۴) $|x| \geq ۱$

۹ـ مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x| - |x - ۲| < ۴$ کدام است؟

۱) $[۰,۲]$ ۲) R ۳) $(-\infty,۰)$ ۴) $(-\infty,۲]$

۱۰ـ مجموعه جواب دستگاه $\begin{cases} \frac{۲}{|x|} \leq ۱ \\ ۹ - x^{۲} \geq ۰ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $۲ \leq x \leq ۳$ ۲) $-۳ \leq x \leq ۳$ ۳) $-۳ \leq x \leq -۲$ ۴) $۲ \leq x \leq ۳$ یا $-۳ \leq x \leq -۲$

۱ـ (۲) $x \geq ۳ \Rightarrow |x-۳| = |۳-x| = x-۳$

$x^۲ - ۲|۳-x| - ۲۱ < ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲(x-۳) - ۲۱ < ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۱۵ < ۰$

$(x-۵)(x+۳) < ۰ \Rightarrow -۳ < x < ۵ \overset{x\geq ۳}{\Rightarrow} ۳ \leq x < ۵$

۲ـ (۲) $|x-۳|(|x+۳|+۱) < ۰ \Rightarrow$ مجموعه جواب $= \{\ \}$

۳ـ (۱) $۰ < x < ۱ \Rightarrow \frac{۱}{x} > ۱ \Rightarrow \frac{۱}{x} > x$

$A = \underbrace{\left|x+\frac{۱}{x}\right|}_{\text{مثبت}} - \underbrace{\left|x-\frac{۱}{x}\right|}_{\text{منفی}} = x+\frac{۱}{x} - (\frac{۱}{x} - x) = ۲x,$

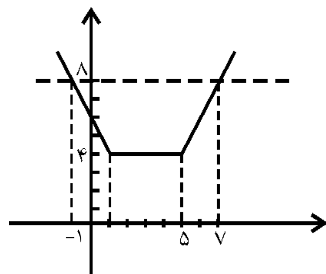
۴ـ (۲) $|x-۵| = ۵-x \Rightarrow |x-۵| = -(x-۵) \Rightarrow x-۵ \leq ۰$

$\Rightarrow x \leq ۵ \overset{x\in N}{\Rightarrow} x =$ ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ $\Rightarrow$ حاصلضرب ریشه‌ها $= ۵!$

۵ـ (۳) $\begin{cases} k = ۹ \\ |a-b| = ۳ \end{cases} \Rightarrow k > |a-b| \Rightarrow$ دو ریشه $\begin{cases} x_۱ = \frac{a+b+k}{۲} = ۸ \\ x_۲ = \frac{a+b-k}{۲} = -۱ \end{cases} \Rightarrow x_۱ + x_۲ = ۷$

۶ـ (۳) $\frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \sin x > \cos x \Rightarrow \cos x - \sin x < ۰ \Rightarrow |\cos x - \sin x| = \sin x - \cos x$

۷ـ (۱) $|x-۱| + |x-۵| = ۸$



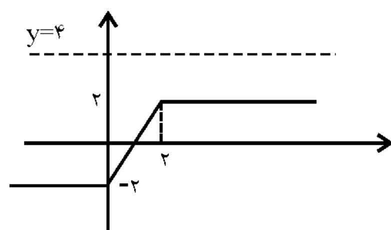
$\begin{cases} x_۱ = ۷ \\ x_۲ = -۱ \end{cases} \Rightarrow |x-۱| + |x-۵| < ۸ \Rightarrow -۱ < x < ۷$

با توجه به شکل دیده می‌شود که به ازاء xهای بین ۱– و ۷، عرض نقاط نمودار $y = |x-۱| + |x-۵|$ از عرض نقاط خط $y = ۸$ کمتر است.

۸ـ (۱) $-۱ \leq |x^۲+۱| - ۱ \leq ۱ \Rightarrow ۰ \leq |x^۲+۱| \leq ۲ \Rightarrow |x^۲+۱| \leq ۲$

$-۲ \leq x^۲ + ۱ \leq ۲ \Rightarrow -۳ \leq x^۲ \leq ۱ \Rightarrow x^۲ \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۱$

۹ـ (۲) $|x-۰| - |x-۲| < |۰| + |۲| = ۲ < ۴$



$\Rightarrow \forall x \in R : |x| - |x-۲| < ۴$

با رسم شکل نیز دیده می‌شود که به ازاء هر عدد حقیقی x، نمودار $y = |x| - |x-۲|$ از نمودار $y = ۴$ پایینتر است.

۱۰ـ (۴) $\left.\begin{array}{l} \frac{۲}{|x|} \leq ۱ \overset{x\neq ۰}{\Rightarrow} |x| \geq ۲ \Rightarrow x \leq -۲ \text{ یا } x \geq ۲ \\ ۹ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۹ \Rightarrow -۳ \leq x \leq ۳ \end{array}\right\} \overset{\text{اشتراک}}{\Rightarrow} -۳ \leq x \leq -۲ \quad ۲ \leq x \leq ۳$

تست ۲:

۱ـ با فرض $0 < x < \frac{\pi}{2}$، حاصل عبارت $A=\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}$ برابر است با:

۱) $\cos\frac{x}{2}$ ۲) $2\cos\frac{x}{2}$ ۳) $2\sin\frac{x}{2}$ ۴) $-\sin\frac{x}{2}$

۲ـ مرکز تقارن در کدام گزینه نادرست نوشته شده است؟

۱) $\begin{cases} x^2+(y+1)^2=9 \\ \omega\begin{vmatrix}0\\-1\end{vmatrix}\end{cases}$ ۲) $\begin{cases} |x+3|+|2y-4|=1 \\ \omega\begin{vmatrix}-3\\2\end{vmatrix}\end{cases}$

۳) $\begin{cases} |x|+|y|=1 \\ \omega\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}\end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x^3+y^3=x \\ \omega\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}\end{cases}$

۳ـ مجموعه جواب نامعادلهٔ $4|x|-|x^2-x|-5|x-1|+20 \geq 0$ کدام است؟

۱) $-4 \leq x \leq 4$ ۲) $-5 \leq x \leq 5$ ۳) $x \in R$ ۴) $-3 \leq x \leq 5$

۴ـ نمودار معادلهٔ $x^2+y^2=2|xy|$ کدام است؟

۱) دایره ۲) بیضی ۳) لوزی ۴) دو خط عمود برهم

۵ـ تعداد ریشه‌های معادلهٔ $2|x|+|x-1|=|x+2|$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) بیشمار ۳) ۲ ۴) ۰

۶ـ مساحت ناحیهٔ محصور بین نمودار $y=||x-2|-1|$ با محورهای مختصات برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{2}$

۷ـ اگر $|x|+|y-1|=2$، حدود تغییرات x (دامنهٔ این رابطه) کدام است؟

۱) $-2 \leq x \leq 2$ ۲) $x \geq 2$ یا $x \leq -2$ ۳) $0 \leq x \leq 2$ ۴) $2 \leq x \leq 4$

۸ـ مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x^3+1| < x^2-x+1$ عبارتست از:

۱) $0 < x < 1$ ۲) $-1 < x < 0$ ۳) $-2 < x < 0$ ۴) $-1 < x < 1$

۹ـ حاصل عبارت $A=\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۱۰ـ مجموعه جواب نامعادلهٔ $|x^2-4| < 2|x-2|$ کدام است؟

۱) $[-4,4]$ ۲) $(-4,4)$ ۳) $(-4,0)$ ۴) $(-2,2)$

۱ـ (۲) $A^2 = 1 + \sin x + 1 - \sin x - 2\sqrt{1 - \sin^2 x} = 2 - 2|\cos x| = 2 - 2\cos x$
$= 2(1 - \cos x) = 4\cos^2\frac{x}{2} \Rightarrow A = 2|\cos\frac{x}{2}| = 2\cos\frac{x}{2}$

روش دیگر: $A = \sqrt{(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})^2} - \sqrt{(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2} = \left|\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right| - \left|\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right| =$

$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\frac{x}{2} < \cos\frac{x}{2}$ و $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 2\cos\frac{x}{2}$

۲ـ (۴) تابع $x^3 + y^3 = x$ تابعی فرد است و لذا مرکز تقارنش مبدأ مختصات می‌باشد.

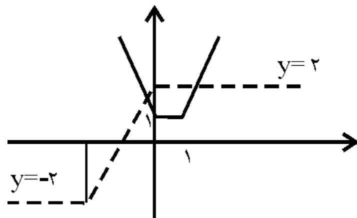
۳ـ (۴) $4|x| - |x||x - 1| - 5|x - 1| + 20 \geq 0 \Rightarrow |x|(4 - |x - 1|) + 5(4 - |x - 1|) \geq 0$

$\Rightarrow (|x| + 5)(4 - |x - 1|) \geq 0 \Rightarrow |x - 1| \leq 4 \Rightarrow -3 \leq x \leq 5$

۴ـ (۴) $x^2 + y^2 = 2|xy| \Rightarrow |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| = 0$

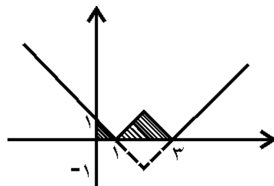
$\Rightarrow (|x| - |y|)^2 = 0 \Rightarrow |x| - |y| = 0 \Rightarrow |y| = |x| \Rightarrow y = \pm x$

۵ـ (۳) $|x| + |x - 1| = |x + 2| - |x|$



با توجه به شکل، ۲ ریشه دارد.

۶ـ (۴)



$S = \frac{1\times1}{2} + \frac{2\times1}{2} = \frac{3}{2}$

۷ـ (۱) $|x| + |y - 1| = 2 \Rightarrow |x| = 2 - |y - 1| \Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

روش دیگر $|x - a| + |y - b| = k > 0 \Rightarrow$ مربع $\Rightarrow$ حدود x $= [a-k, a+k] = [-2,2]$

۸ـ (۳) $|x^3 + 1| < x^2 - x + 1 \Rightarrow |x + 1|\,|\underbrace{x^2 - x + 1}_{\text{همواره مثبت}}| < (x^2 - x + 1)$

$|x + 1|(x^2 - x + 1) < x^2 - x + 1 \Rightarrow |x + 1| < 1 \Rightarrow -1 < x + 1 < 1 \Rightarrow -2 < x < 0$

۹ـ (۱) $A = \frac{\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} - \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2}}{2\sqrt{3}} = \frac{|2 + \sqrt{3}| - |2 - \sqrt{3}|}{2\sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3} - 2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1$

۱۰ـ (۳) $|x - 2|(|x + 2| - 2) < 0 \Rightarrow |x + 2| - 2 < 0 \Rightarrow -2 < x + 2 < 2 \Rightarrow -4 < x < 0$

تست ۳:

۱ـ نمودار رابطه‌ی $|y-x| = x-|x|$، کدام است؟

۱) نیمساز ربع اول ۲) نیمساز ربع دوم ۳) نیمساز ربع اول و سوم ۴) نیمساز ربع دوم و چهارم

۲ـ هرگاه $|y-2| + (x^2+y^2-9)^{100} + \sqrt[20]{z-1} = 0$، حاصل $x+y+3$ کدام است؟

۱) $5+\sqrt{5}$ ۲) $5-\sqrt{5}$ ۳) $5+\sqrt{5}$ یا $5-\sqrt{5}$ ۴) 10 یا -10

۳ـ مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x-1| + |x-2| > x$ کدام است؟

۱) $(-\infty,3)$ ۲) $(1,3)$ ۳) $[0,+\infty)$ ۴) $(-\infty,1) \cup (3,+\infty)$

۴ـ هرگاه $\frac{2-x}{x+2} = \left|\frac{x-2}{x+2}\right|$، آنگاه:

۱) $x \geq 2$ یا $x < -2$ ۲) $-2 < x \leq 2$ ۳) $x = 8$ یا $x = -4$ ۴) $x = 8$ یا $x = 0$

۵ـ هرگاه $a \leq x \leq b$ باشد، کدام گزینه همیشه درست است؟

۱) $|x| \leq b$ ۲) $|x| \leq |b|$ ۳) $|x| \leq |a|$ ۴) $|x| \leq Max\{|a|,|b|\}$

۶ـ معادله‌ی $\left|\frac{2x-3}{x-1}\right| + \left|\frac{x}{x-1}\right| = 3$ چند جواب دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بیشمار

۷ـ معادله‌ی $|2x| - |2x-2| + |4x-5| = 2$ در فاصله‌ی $(0,1)$ یک جواب دارد، این جواب کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{5}$

۸ـ برای آنکه نامعادله‌ی $|x| < x^2$ برقرار باشد، لازم است که:

۱) $x > 1$ یا $x < -1$ ۲) $-1 < x < 0$ ۳) $0 < x < 1$ ۴) $-1 < x < 1 \,,\, x \neq 0$

۹ـ هرگاه $\big||2x| - |x|\big| < 2$، حاصل $|x-2| - |x-3|$ کدام است؟

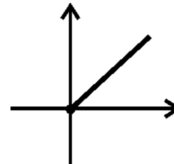
۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) $2x+1$

۱۰ـ مجموعه جواب نامعادله‌ی $(x-2)^2 - 3|x-2| - 4 < 0$ کدام است؟

۱) $0 < x < 8$ ۲) $-4 < x < 2$ ۳) $-2 < x < 4$ ۴) $-2 < x < 6$

۱ـ (۱)

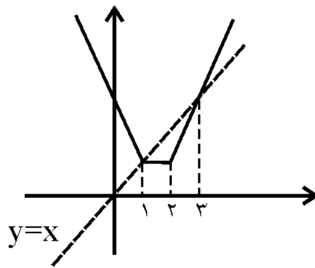
$$\begin{cases} x \geq ۰ \Rightarrow |y-x| = ۰ \Rightarrow y = x \\ x < ۰ \Rightarrow |y-x| = \underbrace{۲x}_{\text{منفی}} \Rightarrow \text{غیرممکن} \end{cases}$$



۲ـ (۳) هرگاه مجموع چند عبارت نامنفی صفر شود، همگی بایستی صفر باشند لذا:

$$\begin{cases} x^{۲} + y^{۲} - ۹ = ۰ \\ |y-۲| = ۰ \Rightarrow y = ۲ \end{cases} \Rightarrow x = \pm\sqrt{۵} \Rightarrow x + y + ۳ = ۵ \pm \sqrt{۵}$$

۳ـ (۴) با توجه به شکل دیده می‌شود که در فاصله‌ی $x > ۳$ یا $x < ۱$ عرض نقاط نمودار $y = |x-۱| + |x-۲|$ از عرض نقاط خط $y = x$ بیشتر است.



راه حل دیگر:

$$\begin{cases} x \leq ۱ \Rightarrow -x + ۱ - x + ۲ > x \Rightarrow x < ۱ \\ ۱ \leq x < ۲ \Rightarrow x - ۱ + ۲ - x > x \Rightarrow x < ۱ \Rightarrow \{\} \\ ۲ \leq x \Rightarrow x - ۱ + x - ۲ > x \Rightarrow x > ۳ \end{cases} \Rightarrow^{\text{مجموعه جواب}} = x < ۱ \text{ یا } x > ۳$$

۴ـ (۲) $|x| = -x \Rightarrow x \leq ۰ \Rightarrow \left|\frac{x-۲}{x+۲}\right| = -\frac{x-۲}{x+۲} \Rightarrow \frac{x-۲}{x+۲} \leq ۰ \Rightarrow -۲ < x \leq ۲$

۵ـ (۴) $a \leq x \leq b \Rightarrow -\text{Max}\{|a|, |b|\} \leq -|a| \leq a \leq x \leq b \leq |b| \leq \text{Max}\{|a|, |b|\} \Rightarrow |x| \leq \text{Max}\{|a|, |b|\}$

۶ـ (۴) $\left|\frac{x-۱+۱}{x-۱}\right| + \left|\frac{۲x-۲-۱}{x-۱}\right| = ۳ \Rightarrow \left|۱ + \frac{۱}{x-۱}\right| + \left|۲ - \frac{۱}{x-۱}\right| = ۳$

$y = \frac{۱}{x-۱} \Rightarrow |y+۱| + |y-۲| = ۳ \Rightarrow |a-b| = k \Rightarrow$ بی‌شمار جواب برای y و در نتیجه برای x وجود دارد.

۷ـ (۳) $۰ < x < ۱ \Rightarrow -\overbrace{|۲x|}^{\text{مثبت}} - \overbrace{|۲x-۲|}^{\text{منفی}} + \overbrace{|۴x-۵|}^{\text{منفی}} = ۲$

$-۲x + ۲x - ۲ - ۴x + ۵ = ۲ \Rightarrow x = \frac{۱}{۴}$

۸ـ (۴) $|x| > x^{۲} \Rightarrow |x| > |x|^{۲} \Rightarrow |x|^{۲} - |x| < ۰ \Rightarrow |x|(|x|-۱) < ۰$

$\Rightarrow \begin{cases} x \neq ۰ \\ |x| < ۱ \end{cases} \Rightarrow -۱ < x < ۱ \quad , \quad x \neq ۰$

۹ـ (۲) $||x| - ۲|x|| < ۲ \Rightarrow |-|x|| < ۲ \Rightarrow |x| < ۲ \Rightarrow -۲ < x < ۲$

$\Rightarrow |x-۲| - |x-۳| = -(x-۲) + (x-۳) = -۱$

۱۰ـ (۴) $|x-۲|^{۲} - ۳|x-۲| - ۴ < ۰ \Rightarrow (|x-۲| - ۴)(|x-۲| + ۱) < ۰$

$\Rightarrow |x-۲| - ۴ < ۰ \Rightarrow -۴ < x - ۲ < ۴ \Rightarrow -۲ < x < ۶$

تست ۴:

۱ـ مجموعه جواب نامعادله‌ی $\left|\,\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\,\right| < \frac{1}{2}$ **عبارتست از:**

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $(-\infty,0]$ ۳) $(0,+\infty)-\{1\}$ ۴) $(-\infty,0)-\{-1\}$

۲ـ در تابع $y=\frac{5}{|x+1|+|x-2|}$، $Max(y)$ **کدام است؟**

۱) ۵ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) ۵ ۴) $\frac{5}{2}$

۳ـ هرگاه $|a| < 1$ **و** $x=|a-1|$ **و** $y=|a+1|$**، حاصل** $x^3+6xy+y^3$ **کدام است؟**

۱) a^2-1 ۲) a^2+a+1 ۳) ۶ ۴) ۸

۴ـ عبارت $x \notin [3,15]$ **معادله کدام حکم زیر است؟**

۱) $|x-9| < 6$ ۲) $|x-9| \geq 6$ ۳) $|x-9| \leq 6$ ۴) $|x-9| > 6$

۵ـ کدام حکم زیر به ازاء هر $x \in R$**، درست نیست؟**

۱) $|x-2|+|x+2| \geq 4$ ۲) $-10 \leq |x-1|-|x+9| \leq 10$

۳) $\lfloor x \rfloor \leq x \leq |x|$ ۴) $\big||x+1|-|x-11|\big| \leq 10$

۶ـ مجموعه جواب نامعادله‌ی $|x|(x^2-3x+2) \leq 0$ **کدام است؟**

۱) $[1,2]$ ۲) $[-2,-1]$ ۳) $[1,2]\cup\{0\}$ ۴) $[-2,-1]\cup\{0\}$

۷ـ مجموعه جواب نامعادله‌ی $\big||x|-6\big| < 5$ **کدام است؟**

۱) $(1,11)$ ۲) $(-11,1)$ ۳) $(-11,-1)\cup(1,11)$ ۴) $[-11,-1]$

۸ـ هرگاه $|x-3|+|x+3| = |2x|$**، مجموعه جواب معادله کدام است؟**

۱) $[-3,3]$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$ ۴) $[6,+\infty)$

۹ـ هرگاه $-1 < x < 0$**، حاصل** $A=\sqrt{x^2-2\sqrt{x^2}+1}+\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2}+1}+9$ **کدام است؟**

۱) ۱۱ ۲) $2|x|$ ۳) $1-2x$ ۴) $2|x|+9$

۱۰ـ معادله‌ی $|x^2-225|+x^2-225=0$**، چند جواب صحیح دارد؟**

۱) ۲۹ ۲) ۳۱ ۳) ۲۷ ۴) ریشه صحیح ندارد

۱ـ (۳) $-\frac{۱}{۲} < \left|\frac{x-۱}{x+۱}\right| - \frac{۱}{۲} < \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۰ < \left|\frac{x-۱}{x+۱}\right| < ۱ \overset{x\neq ۱}{\Rightarrow} \frac{|x-۱|}{|x+۱|} < ۱$

$\Rightarrow |x-۱| < |x+۱| \Rightarrow x^{۲} - ۲x + ۱ < x^{۲} + ۲x + ۱ \Rightarrow x > ۰ \quad , \quad x \neq ۱$

۲ـ (۲) $|x+۱| + |x-۲| \geq |-۱-۲| = ۳ \Rightarrow \text{Min}(|x+۱| + |x-۲|) = ۳ \quad \Rightarrow \text{Max}(y) = \frac{۵}{۳}$

یادآوری: $|x-a| + |x-b| \geq |b-a|$

۳ـ (۴) $(x^{۳} + y^{۳}) + ۶xy = (x+y)^{۳} - ۳xy(x+y) + ۶xy \quad , \quad |a| < ۱ \Rightarrow -۱ < a < ۱ \Rightarrow \begin{cases} a-۱ < ۰ \\ a+۱ > ۰ \end{cases}$

$= ۲^{۳} - ۶(xy) + ۶xy = ۸, \qquad \begin{cases} x = ۱-a \\ y = a+۱ \end{cases} \Rightarrow x+y = ۲$

۴ـ (۴) $x \in [۳,۱۵] \Rightarrow |x-۹| \leq ۶$

$x \notin [۳,۱۵] \Rightarrow |x-۹| > ۶$

۵ـ (۴) $\left| |x+۱| - |x-۱۱| \right| \leq |-۱-۱۱| = ۱۲$

یادآوری: $-|a-b| \leq |x-a| - |x-b| \leq |a-b|$

۶ـ (۳) $|x|(x^{۲} - ۳x + ۲) \leq ۰ \overset{|x|\geq ۰}{\Rightarrow} \begin{cases} x^{۲} - ۳x + ۲ \leq ۰ \Rightarrow ۱ \leq x \leq ۲ \\ |x| = ۰ \Rightarrow x = ۰ \end{cases} \Rightarrow$

مجموعه جواب = $[۱,۲] \cup \{۰\}$

۷ـ (۳) $-۵ < |x| - ۶ < ۵ \Rightarrow ۱ < |x| < ۱۱ \Rightarrow -۱۱ < x < -۱$ یا $۱ < x < ۱۱$

۸ـ (۳) $|a+b| = |a| + |b| \quad \Leftrightarrow ab \geq ۰$

$(x-۳)(x+۳) \geq ۰ \quad \Rightarrow x^{۲} - ۹ \geq ۰ \quad \Rightarrow x \leq -۳$ یا $x \geq ۳$

۹ـ (۱) $A = \sqrt{|x|^{۲} - ۲|x| + ۱} + \sqrt{|x|^{۲} + ۲|x| + ۱} + ۹ = \sqrt{(|x|-۱)^{۲}} + \sqrt{(|x|+۱)^{۲}} + ۹$

$= \left| |x| - ۱ \right| + \left| |x| + ۱ \right| + ۹ \overset{x\leq ۰}{=} |-x-۱| + |-x+۱| + ۹ = |x+۱| + |x-۱| + ۹$

$= x + ۱ - x + ۱ + ۹ = ۱۱$

۱۰ـ (۱) $|x^{۲} - ۲۲۵| = -(x^{۲} - ۲۲۵) \Rightarrow x^{۲} - ۲۲۵ < ۰ \Rightarrow -۱۵ < x < ۱۵$

$\Rightarrow$ $(x = -۱۴$ و -۱۳ و ... و ۰ و ... و ۱۳ و ۱۴) ، ۲۹ جواب صحیح دارد.

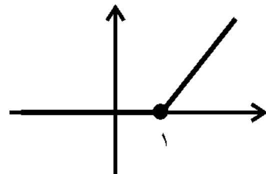
کتاب اساس و بنیان تمدن است. «ولتر»

تست ۶:

۱ـ معادله‌ی محور تقارن نمودار تابع $y = |x + 1| + |x - 1| + |3 - x|$ کدام است؟

۱) $x = 1$ ۲) $y = 1$ ۳) $x = 3$ ۴) $y = x$

۲ـ نمودار کدامیک از توابع زیر، شبیه شکل مقابل است؟



۱) $y = x + |x - 1|$

۲) $y = x - 1 + |x-1|$

۳) $y = x - 1 + |x|$

۴) $y = x - 1 - |x+1|$

۳ـ برد تابع $y = |x + 50| + |x - 150| + 300$ کدام است؟

۱) R ۲) $[400, +\infty)$ ۳) $[500, +\infty)$ ۴) $(500, +\infty)$

۴ـ مجموع ریشه‌های معادله‌ی قدر مطلقی $(x + \frac{1}{2})^2 - 5|x + \frac{1}{2}| = 50$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲

۵ـ مرکز تقارن نمودار رابطه‌ی $|x + 3| + |2y - 4| = 1$ کدام است؟

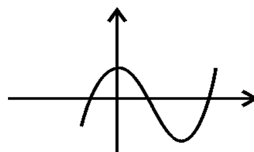
۱) $(-3,2)$ ۲) $(-3,4)$ ۳) $(2,-3)$ ۴) $(3,2)$

۶ـ معادله‌ی $|\sin x + \cos x| = |\sin x| + |\cos x|$، در فاصله‌ی $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ چند ریشه دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بیشمار

۷ـ بازه‌ی $(7,8)$ مجموعه جواب کدام نامعادله‌ی زیر است؟

۱) $|x - 1| < 15$ ۲) $|x - \frac{15}{2}| < 1$ ۳) $|2x - 15| < 1$ ۴) $|x + \frac{15}{2}| < \frac{1}{2}$

۸ـ هرگاه نمودار تابع $y = f(x)$، به صورت  **باشد، نمودار تابع $y = f(|x|)$، محور xها را در چند نقطه قطع می‌کند؟**

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

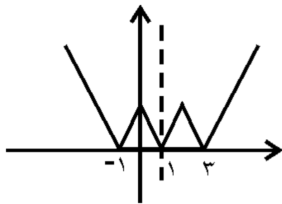
۹ـ هرگاه خط $y = k$ و قسمتی از منحنی نمایش $y = |x + 1| + |x - 5|$، برهم منطبق باشند، k کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶-

۱۰ـ نمودار $|x + y| = 1$ کدام است؟

۱) دو خط موازی ۲) دو خط عمود برهم ۳) دو خط متقاطع ۴) دو نیم خط

۱ـ (۱) با توجه به شکل، خط $x = ۱$، معادله‌ی محور تقارن تابع است.



نکته: به طور کلی در تابع $y = |x-a|+|x-b|+|x-c|$، هرگاه $a+c=۲b$ خط $x = b$ معادله‌ی محور تقارن تابع است.

۲ـ (۲) نقطه‌ی $(۱,۰)$ تنها در معادله‌ی گزینه‌ی (۲) صدق می‌کند.

۳ـ (۳) ***یادآوری:*** $|x - a| + |x - b| \geq |a - b|$

$y \geq |-۵۰-۱۵۰| + ۳۰۰ \Rightarrow y \geq ۵۰۰$

۴ـ (۳) $|x+\frac{۱}{۲}|^۲ - ۵|x+\frac{۱}{۲}| - ۵۰ = ۰ \Rightarrow (|x+\frac{۱}{۲}| - ۱۰)(|x+\frac{۱}{۲}|+۵) = ۰$

$\Rightarrow |x+\frac{۱}{۲}| = ۱۰ \Rightarrow x+\frac{۱}{۲} = \pm ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{۱۹}{۲} \\ x'' = \frac{-۲۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow x'+x'' = -۱$

۵ـ (۱) $|ax + b| + |cy + d| = k \ , k > ۰ \Rightarrow$ مرکز تقارن $\left| \begin{array}{l} -\frac{b}{a} \\ -\frac{d}{c} \end{array} \right.$

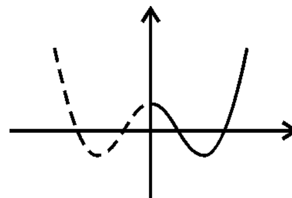
۶ـ (۴) $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq ۰$

تساوی داده شده وقتی برقرار است که sinx و cosx هم‌علامت و یا حداقل یکی از آنها صفر باشند، به عبارت معادل $\sin x \cos x \geq ۰$ باشد حال چون در فاصله‌ی $[\pi, \frac{۳\pi}{۲}]$، سینوس و کسینوس هر دو منفی‌اند، لذا حاصلضربشان مثبت می‌شود، بنابراین معادله بیشمار جواب دارد.

۷ـ (۳) $(۷,۸) \Rightarrow \left| x - \frac{۷+۸}{۲} \right| < \frac{|۷-۸|}{۲} \Rightarrow \left| x - \frac{۱۵}{۲} \right| < \frac{۱}{۲} \Rightarrow |۲x - ۱۵| < ۱$

۸ـ (۳)

$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & ,(x \geq ۰) \\ f(-x) & ,(x < ۰) \end{cases}$



۹ـ (۱) $\Rightarrow |x+۱| + |x-۵| = k \Rightarrow |-۱-۵| = k \Rightarrow k = ۶$

۱۰ـ (۱) $|x+y| = ۱ \Rightarrow x+y = \pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} y = -x+۱ \\ y = -x-۱ \end{cases}$

بزرگترین عیب آن است که از عیب خویش آگاه نباشیم. **«کارلایل»**

فصل چهارم

جزء صحیح

هر عدد حقیقی مانند x را می‌توان به صورت مجموع یک عدد صحیح n $(n \in z)$ و عدد دیگری مانند P، به طوریکه $۰ \le p < ۱$، نوشت. جزء صحیح هر عدد حقیقی مانند x را با نماد $\lfloor x \rfloor$ نمایش داده و آنرا به صورت زیر تعریف می‌کنند.

$$n \le x < n+۱, n \in Z \Rightarrow \lfloor x \rfloor = n$$

به عبارت دیگر، جزء صحیح x، عبارتست از عدد حقیقی بلافاصله کوچکتر یا مساوی x به زبان خیلی ساده می‌توان گفت.

⌊ هر عدد صحیح ⌋ = خودش

⌊ هر عدد غیرصحیح ⌋ = عدد صحیح بلافاصله کوچکتر از آن عدد

به مثالهای زیر توجه کنید.

۱) $\lfloor ۷ \rfloor = ۷$

۲) $\lfloor ۲/۸ \rfloor = ۲$

۳) $\lfloor -۱۸ \rfloor = -۱۸$

۴) $\lfloor -۲/۹ \rfloor = -۳$

۵) $\lfloor \sqrt{۲} \rfloor = \lfloor$ ۱/خورده‌ای $\rfloor = ۱$

۶) $\lfloor \frac{۷}{۸} \rfloor = ۰$

۷) $\lfloor -\sqrt{۵} \rfloor = \lfloor$ ۲/خورده‌ای- $\rfloor = -۳$

۸) $\lfloor \frac{۳}{\pi} \rfloor = ۰$

۹) $\lfloor \frac{\pi}{e} \rfloor = ۱$ (عدد نپر $e \approx ۲/۷۱۸$)

۱۰) $\lfloor ۱-\sqrt{۳} \rfloor = -۱$

۱۱) $\lfloor ۰^+ \rfloor = ۰$

۱۲) $\lfloor ۰^- \rfloor = -۱$

۱۳) $\lfloor ۰ \rfloor = ۰$

۱۴) $\lfloor ۶^+ \rfloor = ۶$

۱۵) $\lfloor ۶^- \rfloor = ۵$

۱۶) $\lfloor \sin ۹۰^+ \rfloor = \lfloor ۱^- \rfloor = ۰$

۱۷) $\lfloor \sin ۹۰^- \rfloor = \lfloor ۱^- \rfloor = ۰$

۱۸) $\lfloor \cos ۹۰^- \rfloor = \lfloor ۰^+ \rfloor = ۰$

۱۹) $\lfloor \cos ۹۰^+ \rfloor = \lfloor ۰^- \rfloor = -۱$

۲۰) $\lfloor \frac{x^۲+۱}{x^۲+۲} \rfloor = ۰$

۲۱) $\lfloor \log_۲^۵ \rfloor = \lfloor$ ۲/خورده‌ای $\rfloor = ۲$

۲۲) $\lfloor \cot(\frac{\pi}{۴})^+ \rfloor = \lfloor ۱^- \rfloor = ۰$

۲۳) $\lfloor \cot(\frac{\pi}{۴})^- \rfloor = \lfloor ۱^+ \rfloor = ۱$

۲۴) $۱ \le x < ۲ \Rightarrow \lfloor x \rfloor = ۱$

۲۵) $۱ \le x < ۳ \Rightarrow \lfloor x \rfloor =$ ۱ یا ۲

تذکر: لازم به ذکر است که در مواردی، مثلاً محاسبات رایانه‌ای، به کوچکترین عدد صحیح بلافاصله بزرگتر یا مساوی x، نیازمندیم، بنابر همین اصل، دو نوع جزء صحیح برای هر عدد صحیح مانند x تعریف کرده‌اند.

۱) بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x (عدد صحیح بلافاصله کوچکتر یا مساوی x) که آنرا با نماد $\lfloor x \rfloor$ یا $[x]$ نمایش می‌دهند.

تذکر: استفاده از نماد $\lfloor x \rfloor$ به جای نماد $[x]$، باعث می‌شود که نماد جزء صحیح با نماد کروشه اشتباه نشود.

۲) کوچکترین عدد صحیح ناکمتر از x (عدد صحیح بلافاصله بزرگتر یا مساوی x) که آنرا با نماد $\lceil x \rceil$ نمایش می‌دهند.

مثال:
$$\begin{cases} [۳/۵] = \lfloor ۳/۵ \rfloor = ۳ \\ \lceil ۳/۵ \rceil = ۴ \end{cases}$$

جزء کسری یا جزء ناصحیح x

به ازاء هر عدد حقیقی x، عدد $x - \lfloor x \rfloor$ را جزء کسری یا جزء ناصحیح x می‌گویند و آنرا با نماد ((x)) یا (x) نمایش می‌دهند و به آن براسهٔ (Brace) عدد x می‌گویند واضح است که $۰ \le (x) < ۱$

تابع جزء صحیح: تابع $f: R \to Z$ را تابع جزء صحیح می‌گویند.
$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

دامنه‌ی این تابع R و بردش Z است. در بعضی از کتب ریاضی، این تابع را با نماد $E(x) = \lfloor x \rfloor$ نیز نمایش می‌دهند.

ویژگیهای جزء صحیح:

۱) $\forall x \in R\ \exists n \in Z : n \le x < n + ۱ \Rightarrow \lfloor x \rfloor = x$ جزء صحیح x عدد سمت چپ می‌باشد.

۲) $\forall x \in R : \lfloor x \rfloor \le x$

۳) $\forall x \in R : \lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + ۱$

۴) $\forall x \in R : \lfloor x \rfloor \le x \le |x|$

۵) $\forall x \in R : x - ۱ < \lfloor x \rfloor \le x$

۶) $\forall x \in R : ۰ \le x - \lfloor x \rfloor < ۱$

۷) $\forall x \in R : \lfloor x - \lfloor x \rfloor \rfloor = ۰$

۸) $x \in Z \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = x$

۹) $x \notin Z \Rightarrow \lfloor x \rfloor < x$

۱۰) $\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor & ,(x \in Z) \\ -\lfloor x \rfloor - ۱ & ,(x \notin Z) \end{cases}$

۱۱) $x \in Z \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = ۰$

۱۲) $x \notin Z \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -۱$

۱۳) $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} ۰ & ,(x \in Z) \\ -۱ & ,(x \notin Z) \end{cases}$

۱۶) تست: مجموعه جواب معادله‌ی $۳\lfloor x \rfloor + \lfloor -x - ۵ \rfloor = ۰$ کدام است؟

۱) $۳ \le x < ۴$ ۲) $۲ \le x < ۳$ ۳) $۳ < x < ۴$ ۴) $۲ < x < ۳$

$۳\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor - ۵ = ۰$

$\Rightarrow \underbrace{(\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor)}_{۰ \text{ یا } -۱} + ۲\lfloor x\rfloor = ۵$

$\begin{cases} x \in Z \Rightarrow ۰ + ۲x = ۵ \Rightarrow x = \frac{۵}{۲} & \text{غیرقابل قبول} \\ x \notin Z \Rightarrow -۱ + ۲\lfloor x\rfloor = ۵ \Rightarrow \lfloor x\rfloor = ۳ \Rightarrow ۳ \le x < ۴ \overset{x \notin Z}{\Rightarrow} ۳ < x < ۴ \end{cases}$

بنابراین گزینه‌ی (۳)، درست می باشد.

۱۵) $x = y \Rightarrow \lfloor x\rfloor = \lfloor y\rfloor$

۱۶) $\lfloor x\rfloor = \lfloor y\rfloor \not\Rightarrow x = y$

این نکته نشان میدهد که تابع $f(x) = \lfloor x\rfloor$، تابعی یک به یک نیست.

به عنوان مثال $\lfloor ۲/۵\rfloor = \lfloor ۲/۷\rfloor = ۲$ ولی $۲/۵ \neq ۲/۷$

۱۷) $\lfloor x\rfloor = \lfloor y\rfloor \to \exists! n \in Z: \begin{cases} n \le x < n+۱ \\ n \le y < n+۱ \end{cases}$

۱۸) خاصیت جابجائی چهار عمل اصلی در جزء صحیح در حالت کلی:

الف) $\lfloor x + y\rfloor = \lfloor y + x\rfloor$

ب) $\lfloor x - y\rfloor \neq \lfloor y - x\rfloor$

ج) $\lfloor xy\rfloor = \lfloor yx\rfloor$

د) $\left\lfloor \frac{x}{y}\right\rfloor \neq \left\lfloor \frac{y}{x}\right\rfloor$

۱۹) خاصیت تفکیک کردن جزء صحیح در چهار عمل اصلی در حالت کلی:

الف) $\lfloor x + y\rfloor \neq \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$

ب) $\lfloor x - y\rfloor \neq \lfloor x\rfloor - \lfloor y\rfloor$

ج) $\lfloor xy\rfloor \neq \lfloor x\rfloor \lfloor y\rfloor$

د) $\left\lfloor \frac{x}{y}\right\rfloor \neq \frac{\lfloor x\rfloor}{\lfloor y\rfloor}$

۲۰) $\forall x, y \in R : \lfloor x + y\rfloor \ge \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$

ضمناً اگر حداقل یکی از x و y صحیح باشند و یا جمع خورده‌هایشان از ۱ بیشتر نشود، تساوی برقرار است به عنوان مثال:

$\lfloor ۲ + ۳/۵\rfloor = \lfloor ۲\rfloor + \lfloor ۳/۵\rfloor$

$\lfloor ۳/۸ + ۴/۱\rfloor = \lfloor ۳/۸\rfloor + \lfloor ۴/۱\rfloor$

$\lfloor ۴/۵ + ۷/۹\rfloor \neq \lfloor ۴/۵\rfloor + \lfloor ۷/۹\rfloor$

در واقع، حاصل سمت چپ ۱۲ می‌شود در حالیکه حاصل سمت راست ۱۱ می‌شود.

۲۱) $\forall x, y \in R: \lfloor x + y\rfloor = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$ یا $\lfloor x + y\rfloor = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + ۱$

یعنی جزء صحیح مجموع دو عدد از مجموع جزء صحیحهای آن دو عدد، حداکثر یک واحد بیشتر است.

اثبات:

$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + ۱$

$\lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + ۱$

$+$ ------------------

$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x+y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + ۲ \Rightarrow \begin{cases} \lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \\ \lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + ۱ \end{cases}$

تست: هرگاه $\lfloor x \rfloor = ۷$ و $\lfloor y \rfloor = -۳$ باشد، حاصل $\lfloor x+y \rfloor$ کدام است؟

۱) ۴　　۲) ۴ یا ۵　　۳) ۴ یا ۳　　۴) ۴ یا ۲

حل: طبق نکته فوق، گزینه‌ی صحیح گزینه‌ی (۲) می‌باشد.

راه حل تشریحی:

$\lfloor x \rfloor = ۷ \Rightarrow ۷ \leq x < ۸$

$\lfloor y \rfloor = -۳ \Rightarrow -۳ \leq y < -۲$

$+$ ―――――――

$۴ \leq x+y < ۶ \Rightarrow \lfloor x+y \rfloor = ۴$ یا ۵

۲۲)

$$\forall x, y, z \in R: \begin{cases} \lfloor x+y+z \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor z \rfloor \\ \lfloor x+y+z \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor z \rfloor + ۱ \\ \lfloor x+y+z \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor z \rfloor + ۲ \end{cases}$$

۲۳) $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

$\lfloor x-n \rfloor = \lfloor x \rfloor - n$

$\lfloor nx \rfloor \neq n\lfloor x \rfloor \quad , (n \in z)$

$\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \neq \frac{\lfloor x \rfloor}{n}$

تذکر: عدد صحیح فقط در جمع و تفریق، از جزء صحیح بیرون می‌آید.

مثال:

$\lfloor x+۲ \rfloor = \lfloor x \rfloor + ۲$

$\lfloor ۳-x \rfloor = ۳ + \lfloor -x \rfloor$

$\lfloor x + \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor = ۲\lfloor x \rfloor$

$\lfloor x + \lfloor x + \lfloor x \rfloor \rfloor \rfloor = ۳\lfloor x \rfloor$

$\lfloor x \pm ۰/۴ \rfloor \neq \lfloor x \rfloor \pm ۰/۴$

$\lfloor ۲x \rfloor \neq ۲\lfloor x \rfloor$

$\left\lfloor \frac{x}{۳} \right\rfloor \neq \frac{\lfloor x \rfloor}{۳}$

تست: معکوس تابع $y = x + \lfloor x \rfloor$، کدام است؟

۱) $y = x - \lfloor x \rfloor$　　۲) $y = x - \frac{۱}{۲}\lfloor x \rfloor$　　۳) $y = x + \frac{۱}{۲}\lfloor x \rfloor$　　۴) $y = x + ۲\lfloor x \rfloor$

راه حل اول: $y = x + \lfloor x \rfloor \Rightarrow y = x + \frac{1}{2} \times 2 \lfloor x \rfloor \Rightarrow y = x + \frac{1}{2}(\lfloor x + \lfloor x \rfloor \rfloor \Rightarrow y = x + \frac{1}{2} \lfloor y \rfloor$

$\Rightarrow x = y - \frac{1}{2} \lfloor y \rfloor \Rightarrow y = x - \frac{1}{2} \lfloor x \rfloor$

راه حل دوم: می‌دانیم: $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ چون به ازاء $x = 2$، مقدار y در تابع اصلی ۴ می‌شود لذا، عدد $x = 4$ را در تک تک گزینه‌ها به جای x قرار می‌دهیم، تنها گزینه‌ای که در آن y برابر ۲ می‌شود، گزینه‌ی ۲ است، بنابراین گزینه‌ی صحیح، گزینه‌ی ۲ می‌باشد.

تست: حاصل $A = \lfloor -3/7 + \lfloor -3/7 + \lfloor -3/7 + \lfloor -3/7 \rfloor \rfloor \rfloor \rfloor$ **کدام است؟**

۱) -12 ۲) -2 ۳) -16 ۴) -8

حل: $A = 4\lfloor -3/7 \rfloor = -16$

البته اگر از داخل، مقدار جزء صحیحها را تک تک حساب می‌کردیم، باز هم به همین جواب می‌رسیدیم.

تست: مجموعه جواب معادله‌ی $\left\lfloor x - \frac{3}{4} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{4} \right\rfloor = 1$ **کدام است؟**

۱) $\frac{3}{4} \le x < \frac{7}{4}$ ۲) $\frac{1}{4} \le x < 1$ ۳) $\frac{7}{4} \le x < \frac{9}{4}$ ۴) $\frac{5}{4} \le x < \frac{9}{4}$

حل: $\left\lfloor x + \frac{1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{4} - 1 \right\rfloor = 1 \Rightarrow 2\left\lfloor x + \frac{1}{4} \right\rfloor = 2$

$1 \le x + \frac{1}{4} < 2 \Rightarrow \frac{3}{4} \le x < \frac{7}{4}$

۲۴) $\forall x \in R : x \ge n \Rightarrow \lfloor x \rfloor \ge n \quad (n \in z)$

۲۵) $\forall x \in R, \forall n \in N : \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor$

۲۶) $\forall x \in R^+ \cup \{0\}, \forall n \in N : \lfloor nx \rfloor \ge \lfloor x \rfloor$

۲۷) $\forall x \in R^- \cup \{0\}, \forall n \in N : \lfloor nx \rfloor \le \lfloor x \rfloor$

۲۸) $\forall x \in R^+ \cup \{0\}, \forall n \in Z^- : \lfloor nx \rfloor + \lfloor x \rfloor \le 0$

۲۹) $\forall x \in R^- \cup \{0\}, \forall n \in Z^- : \lfloor nx \rfloor + \lfloor x \rfloor \ge 0$

۳۰) $\forall x \in R : \lfloor x \rfloor \in Z$

تست: معادلهٔ $x + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 7x \rfloor = 30$ **چند جواب دارد؟**

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) ۱

حل: چون ۳۰ و $\lfloor 2x \rfloor$ و $\lfloor 7x \rfloor$ همگی صحیح هستند، لذا الزاماً x نیز باید صحیح باشد.

بنابراین $x \in Z$، در نتیجه $2x \in Z$ و $7x \in Z$، بنابراین می‌توان علامت جزء صحیح را برداشت.

یعنی: $x + 2x + 7x = 30 \Rightarrow x = 3$ قابل قبول

۳۱) $\forall x \in R : \lfloor x^2 \rfloor \ge \lfloor x \rfloor$ و $\lfloor x^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow x \in [0, \sqrt{2})$

۳۲) $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor = n \Rightarrow \left\lfloor \frac{x + y}{2} \right\rfloor = n$

تست: هرگاه $\lfloor x^۲ - ۳x + ۸ \rfloor = ۵$ = $\lfloor x^۲ + ۱۱x \rfloor$ ، حاصل $\left\lfloor (x+۲)^۲ \right\rfloor$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۱

حل: $\frac{x^۲ + ۱۱x + x^۲ - ۳x + ۸}{۲} = x^۲ + ۴x + ۴ = (x+۲)^۲$

لذا طبق نکته‌ی فوق، گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۳۳) $\forall x \in R, \forall n \in N: \lfloor nx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{۱}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{۲}{n} \right\rfloor + ... + \left\lfloor x + \frac{n-۱}{n} \right\rfloor$

در حالت خاص داریم: $\lfloor ۲x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{۱}{۲} \right\rfloor$

$\lfloor ۳x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{۱}{۳} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{۲}{۳} \right\rfloor$

تست: دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{x^۴ + ۱}{\lfloor ۲x \rfloor - \lfloor x + ۱ \rfloor}$، کدام است؟

۱) $۰ \leq x < \frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲} \leq x < \frac{۳}{۲}$ ۳) $x < \frac{۱}{۲}$ یا $x \geq \frac{۳}{۲}$ ۴) $x \leq \frac{۱}{۲}$ یا $x > \frac{۳}{۲}$

حل: $\lfloor ۲x \rfloor - \lfloor x + ۱ \rfloor = ۰ \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{۱}{۲} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - ۱ = ۰ \Rightarrow \left\lfloor x + \frac{۱}{۲} \right\rfloor = ۱$

$۱ \leq x + \frac{۱}{۲} < ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲} \leq x < \frac{۳}{۲} \Rightarrow D_f = R - [\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲}) = (-\infty, \frac{۱}{۲}) \cup [\frac{۳}{۲}, +\infty)$

۳۴) $\forall x \in R, \forall n \in N: \lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+۱}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+۲}{n} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \frac{x+n-۱}{n} \right\rfloor$

در حالت خاص داریم: $\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{۲} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+۱}{۲} \right\rfloor$

$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{۳} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+۱}{۳} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+۲}{۳} \right\rfloor$

۳۵) تعداد مضارب طبیعی عدد a که از عدد طبیعی n، کوچکتر یا مساوی‌اند برابر است با $\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$

مثال: چند عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۲۰۰ وجود دارند به طوریکه مضرب ۶ باشند؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۱ ۳) ۳۳ ۴) ۳۴

$\left\lfloor \frac{۲۰۰}{۶} \right\rfloor = \lfloor$ خورده‌ای ۳۳/ $\rfloor = ۳۳$

۳۶) تعداد صفرهای سمت راست عدد !n برابر است با: $\left\lfloor \frac{n}{۵} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{۲۵} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{۱۲۵} \right\rfloor + ...$

تست: تعداد صفرهای سمت راست !۸۵ برابر است با:

۱) ۲۰ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۱

$\left\lfloor \frac{۸۵}{۵} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۸۵}{۲۵} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{۸۵}{۱۲۵} \right\rfloor + ... = ۱۷ + ۳ + ۰ + ۰ + ... = ۲۰$

۳۷) جواب معادله‌ی $\lfloor x \rfloor + \lfloor ۲x \rfloor + \lfloor ۳x \rfloor + ... + \lfloor nx \rfloor = ۰$ $(n \in N)$، عبارتست از $x \in [۰, \frac{۱}{n})$

اثبات: ابتدا توجه کنید که در معادله‌ی فوق، x نمی‌تواند منفی باشد، زیرا در این صورت طرف چپ معادله منفی خواهد شد.

ضمناً اگر $x \geq 0$ باشد، آنگاه $\lfloor x \rfloor$ و $\lfloor 2x \rfloor$ و ... و $\lfloor nx \rfloor$، همگی نامنفی شده و می‌دانیم که هرگاه، مجموع چند عبارت نامنفی صفر شود، بایستی همگی آنها با هم، صفر شوند لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow 0 \leq x < 1 \\ \lfloor 2x \rfloor = 0 \Rightarrow 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \lfloor 3x \rfloor = 0 \Rightarrow 0 \leq 3x < 1 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \vdots \\ \lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow 0 \leq nx < 1 \Rightarrow 0 \leq x < \frac{1}{n} \end{array}\right\} \overset{\text{اشتراک}}{\Rightarrow} \text{مجموعه جواب} = [0,\frac{1}{n})$$

تست: مجموعه جواب معادله‌ی $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 0$، کدام است؟

۱) $[0,1)$ ۲) $[0,\frac{1}{2})$ ۳) $[-\frac{1}{2},0)$ ۴) $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

حل: طبق نکته‌ی فوق، گزینه‌ی (۲)، صحیح است.

۳۸) $\lfloor xy \rfloor \geq \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \quad ,(x,y \geq 0)$

۳۹) $\lfloor x+y+z \rfloor \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor z \rfloor$

۴۰) $n \leq x < n+2 \quad ,n \in z \Rightarrow \lfloor x \rfloor = n$ یا $n+1$

سؤال: جزء صحیح چه اعدادی، برابر ۴- است؟

$$\lfloor x \rfloor = -4 \Rightarrow -4 \leq x < -4+1 \Rightarrow -4 \leq x < -3$$

سؤال: با فرض $-2 \leq x \leq 1$، $[x]$، چه مقادیر مختلفی، می‌تواند داشته باشد؟

$$-2 \leq x < -1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -2$$

$$-1 \leq x < 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -1$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1$$

سؤال: هرگاه $-1 \leq x < 1$ باشد، $\lfloor 2x \rfloor$ چه مقادیر مختلفی می‌تواند داشته باشد؟

$-1 \leq x < 1 \Rightarrow -2 \leq 2x < 2 \Rightarrow$ طبق مثال قبل $\lfloor 2x \rfloor = -2$ یا -1 یا 0 یا 1

در واقع کافی است فاصله‌ی $[-1,1)$ را نصف، نصف تفکیک کنیم در این صورت داریم:

$$-1 \leq x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -2 \leq 2x < -1 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = -2$$

$$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \Rightarrow -1 \leq 2x < 0 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = -1$$

$$0 \leq x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq 2x < 1 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x < 1 \Rightarrow 1 \leq 2x < 2 \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = 1$$

سؤال: هرگاه $-۴ \le x \le ۲$ باشد، $\lfloor \frac{x}{۲} \rfloor$ چه مقادیر مختلفی می‌تواند داشته باشد؟

$$-۴ \le x < ۲ \Rightarrow -۲ \le \frac{x}{۲} < ۱ \Rightarrow \lfloor \frac{x}{۲} \rfloor = -۲ \text{ یا } -۱ \text{ یا } ۰$$

در واقع در این سؤال، کافی است فاصله‌ی فوق را دو تا دو تا تفکیک کنیم.

سؤال: هرگاه $۰ \le x < ۹$ باشد، $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ چه مقادیر مختلفی می‌تواند داشته باشد؟

$$۰ \le x < ۹ \Rightarrow ۰ \le \sqrt{x} < ۳ \Rightarrow \lfloor \sqrt{x} \rfloor = ۰ \text{ یا } ۱ \text{ یا } ۲$$

در واقع داریم:

$$\begin{cases} ۰ \le x < ۱ \Rightarrow ۰ \le \sqrt{x} < ۱ \Rightarrow \lfloor \sqrt{x} \rfloor = ۰ \\ ۱ \le x < ۴ \Rightarrow ۱ \le \sqrt{x} < ۲ \Rightarrow \lfloor \sqrt{x} \rfloor = ۱ \\ ۴ \le x < ۹ \Rightarrow ۲ \le \sqrt{x} < ۳ \Rightarrow \lfloor \sqrt{x} \rfloor = ۲ \end{cases}$$

سؤال: هرگاه $-۱ \le x < ۲$ باشد، $\lfloor x^۲ \rfloor$ چه مقادیر مختلفی می‌تواند داشته باشد؟

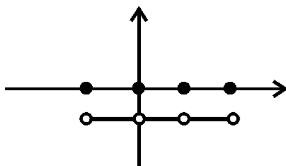
$$-۱ \le x < ۲ \Rightarrow ۰ \le x^۲ < ۴ \Rightarrow \lfloor x^۲ \rfloor = ۰ \text{ یا } ۱ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۳$$

در واقع داریم:

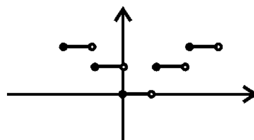
$$\begin{cases} -۱ < x \le ۰ \text{ یا } ۰ \le x < ۱ \Rightarrow ۰ \le x^۲ < ۱ \Rightarrow \lfloor x^۲ \rfloor = ۰ \\ \text{--------} \text{ یا } ۱ \le x < \sqrt{۲} \Rightarrow ۱ \le x^۲ < ۲ \Rightarrow \lfloor x^۲ \rfloor = ۱ \\ \text{-------} \text{ یا } \sqrt{۲} \le x < \sqrt{۳} \Rightarrow ۲ \le x^۲ < ۳ \Rightarrow \lfloor x^۲ \rfloor = ۲ \\ \text{-------} \text{ یا } \sqrt{۳} \le x < ۲ \Rightarrow ۳ \le x^۲ < ۴ \Rightarrow \lfloor x^۲ \rfloor = ۳ \end{cases}$$

اکنون نمودار چند تابع جزء صحیحی را رسم می‌کنیم، سعی کنید نمودار این توابع را به خاطر داشته باشید تا درک بخش‌های بعدی (تابع ـ حد ـ پیوستگی ـ مشتق پذیری و ...) برایتان راحت‌تر باشد.

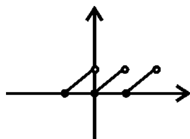
۱) $y = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$



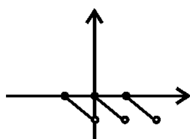
۲) $y = | \lfloor x \rfloor |$



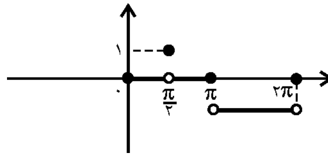
۳) $y = x - \lfloor x \rfloor$



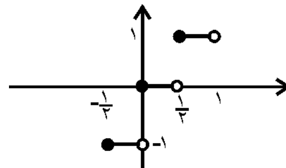
۴) $y = \lfloor x \rfloor - x$



۵) $y = \lfloor \sin x \rfloor \quad , (0 \in x \in 2\pi)$

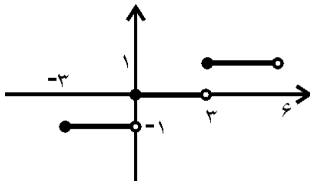


۶) $y = \lfloor 2x \rfloor \quad , (-\frac{1}{2} \le x < 1)$



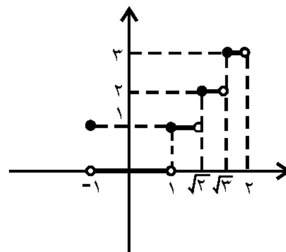
تذکر: به خاطر داشته باشید که تابع فوق در نقاط به صورت $\frac{n}{2}$ $(n \in Z)$، حد نداشته، پیوسته نبوده و لذا مشتق‌پذیر هم نیست.

۷) $y = \lfloor \frac{x}{3} \rfloor \quad , (-3 \le x < 6)$



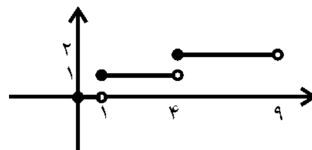
تذکر: به خاطر داشته باشید که تابع فوق در نقاط به صورت $3n$ $(n \in Z)$، حد نداشته، پیوسته نبوده و لذا مشتق‌پذیر هم نیست.

۸) $y = \lfloor x^2 \rfloor \; , (-1 \le x < 2)$



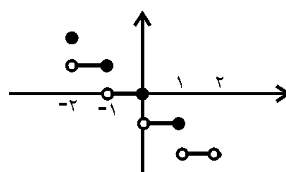
تذکر: به خاطر داشته باشید که تابع فوق در نقاط به صورت $\pm\sqrt{n}$ (به جز ۰)، $n \in N$، حد نداشته پیوسته نبوده و لذا مشتق‌پذیر هم نیست.

۹) $y = \lfloor \sqrt{x} \rfloor \; (0 \le x < 9)$



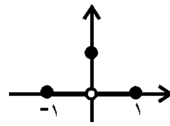
تذکر: به خاطر داشته باشید که تابع فوق در نقاط به صورت n^2 $(n \in N \cup \{0\})$ حد نداشته، پیوسته نبوده و لذا مشتق‌پذیر هم نیست (البته متذکر می‌شویم که تابع فوق در کلیه‌ی اعداد منفی نیز حد نداشته و پیوسته نبوده و لذا مشتق‌پذیرهم نخواهد بود)

۱۰) $y = \lfloor -x \rfloor \; , (-2 \le x < 2)$

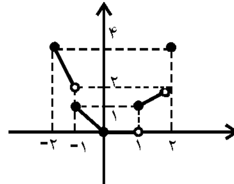


به خاطر بسپارید که تابع فوق در نقاط صحیح از چپ پیوسته است.

۱۱) $y = \lfloor \sqrt{1 - x^2} \rfloor \quad , D_f = [-1, 1]$

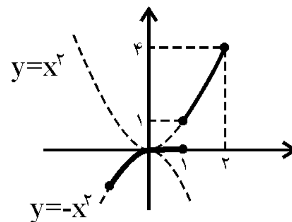


۱۲) $y = x\lfloor x \rfloor \ , (-2 \leq x \leq 2)$



به خاطر بسپارید که تابع فوق در نقطه‌ی به طول ۰، حد داشته، پیوسته بوده ولی مشتق‌پذیر نیست.

۱۳) $y = x^2 \lfloor -x \rfloor \ , (-1 \leq x < 2)$



$-1 \leq x < 0 \Rightarrow y = -x^2$

$0 \leq x < 1 \Rightarrow y = 0$

$1 \leq x < 2 \Rightarrow y = x^2$

به خاطر بسپارید که تابع فوق در نقطه‌ای به طول ۰، هم حد داشته هم پیوسته است ضمناً در این نقطه مشتق‌پذیر نیز می‌باشد و مشتق در این نقطه صفر است.

نکته: برای رسم نمودار $y = \lfloor f(x) \rfloor$ به صورت زیر عمل می‌کنیم.

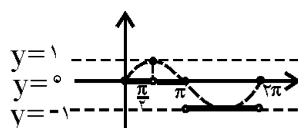
۱) نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم.

۲) خطوط افقی $y = k$ را که در آن k عددی صحیح است، رسم کرده تا نمودار $y = f(x)$ را قطع کنند.

۳) قسمتی از نمودار را که بین نقاط برخورد دو خط $y = k$ و $y = k + 1$ با نمودار $y = f(x)$ قرار دارد، برروی خط $y = k$ (برروی خط پائینی) تصویر می‌کنیم.

۴) نقاط ابتدا و انتهای این پاره خطهای به دست آمده را آزمایش کرده تا ببینیم باید تو خالی باشند یا توپر.

مثال: نمودار $y = \lfloor \sin x \rfloor$ را در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ رسم کنید.



تست ۱:

۱ـ حاصل $\lfloor (\sqrt{2}-\sqrt{3})^{99} \rfloor + \lfloor (1-\sqrt{2})^{30} \rfloor + \lfloor (\sqrt{3}-2)^{20} \rfloor$ **کدام است؟**

۱) ۰ ‏ ‏ ۲) ۲+ ‏ ‏ ۳) ۱ ‏ ‏ ۴) ۱-

۲ـ جواب معادلهٔ $\frac{\lfloor x \rfloor - x}{\lfloor x \rfloor + x} = 0$ **کدام است؟**

۱) R ‏ ‏ ۲) Z ‏ ‏ ۳) $Z - \{0\}$ ‏ ‏ ۴) N

۳ـ مجموعه مقادیر (برد) تابع $y = \lfloor \sin x - \sqrt{2}\cos x \rfloor$ **شامل چند عضو است؟**

۱) ۲ ‏ ‏ ۲) ۳ ‏ ‏ ۳) ۴ ‏ ‏ ۴) ۰

۴ـ اگر $\lfloor -x \rfloor + 7 = \lfloor x \rfloor$ **، آنگاه x در کدام بازه قرار دارد؟**

۱) $3 < x < 4$ ‏ ‏ ۲) $3 < x \le 4$ ‏ ‏ ۳) $3 \le x < 4$ ‏ ‏ ۴) $3 \le x \le 4$

۵ـ حاصل $\lfloor \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \rfloor + \lfloor -\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \rfloor + \lfloor -\sqrt{3} - 1 \rfloor$ **برابر است با:**

۱) ۲- ‏ ‏ ۲) ۳- ‏ ‏ ۳) ۱- ‏ ‏ ۴) ۰

۶ـ حاصل $\lfloor \log_5^{630} \rfloor + \lfloor -\log_2^{257} \rfloor$ **کدام است؟**

۱) ۵ ‏ ‏ ۲) ۵- ‏ ‏ ۳) ۴- ‏ ‏ ۴) ۴

۷ـ مساحت نمودار رابطهٔ ریاضی $\lfloor x \rfloor \cdot \lfloor y \rfloor = 4$ **چقدر است؟**

۱) ۶ ‏ ‏ ۲) ۸ ‏ ‏ ۳) ۴ ‏ ‏ ۴) ۱۲

۸ـ معادلات $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$ **و** $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 0$ **،** $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 4$ **، به ترتیب چند جواب دارند؟**

۱) ۱، ۱، ۱ ‏ ‏ ۲) ۰، ۰، بی‌شمار ‏ ‏ ۳) ۱، ۰، بیشمار ‏ ‏ ۴) ۰، بیشمار، بیشمار

۹ـ حاصل $\lfloor \sqrt{81} \rfloor + \lfloor \sqrt{82} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt{99} \rfloor$ **کدام است؟**

۱) ۱۹۰ ‏ ‏ ۲) ۱۷۳ ‏ ‏ ۳) ۱۸۴ ‏ ‏ ۴) ۱۷۱

۱۰ـ کلیهٔ جوابهای نامعادلهٔ $1 \le \lfloor |12x| \rfloor$ **کدام است؟**

۱) $[0, \frac{1}{2})$ ‏ ‏ ۲) $[0, 1)$ ‏ ‏ ۳) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ‏ ‏ ۴) $(-1, 1)$

۱ـ (۴)
$$\begin{cases} ۰ < (\sqrt{۳}-۲)^{۲۰} < ۱ \Rightarrow \lfloor (\sqrt{۳}-۲)^{۲۰} \rfloor = ۰ \\ ۰ < (۱-\sqrt{۲})^{۳۰} < ۱ \Rightarrow \lfloor (۱-\sqrt{۲})^{۳۰} \rfloor = ۰ \\ -۱ < (\sqrt{۲}-\sqrt{۳})^{۹۹} < ۰ \Rightarrow \lfloor (\sqrt{۲}-\sqrt{۳})^{۹۹} \rfloor = -۱ \end{cases} \Rightarrow ۰+۰-۱=-۱$$

۲ـ (۳) $\lfloor x \rfloor - x = ۰ \Rightarrow \lfloor x \rfloor = x \Rightarrow x \in Z \overset{x \neq ۰}{\Rightarrow} x \in Z - \{۰\}$

کسری صفر است که صورتش صفر باشد، ضمناً بایستی $x \neq ۰$ باشد، چون در این صورت مخرج صفر می‌شود.

۳ـ (۳) $-\sqrt{۳} \le \sin x - \sqrt{۲}\cos x \le \sqrt{۳} \Rightarrow y = -۲$ یا -۱ یا ۰ یا ۱

۴ـ (۱)
$$\begin{cases} x \in Z \Rightarrow x = ۷ - x \Rightarrow x = \frac{۷}{۲} & \text{غیرقابل قبول} \\ x \notin Z \Rightarrow \lfloor x \rfloor = ۷ - \lfloor x \rfloor - ۱ \Rightarrow \lfloor x \rfloor = ۳ \Rightarrow ۳ \le x < ۴ \overset{x \in z}{\Rightarrow} ۳ < x < ۴ \end{cases}$$

۵ـ (۲) $\lfloor -۲/۷ \rfloor + \lfloor -۰/\text{خورده‌ای} \rfloor + \lfloor ۱/\text{خورده‌ای} \rfloor = -۳ + (-۱) + ۱ = -۳$

۶ـ (۲) $\lfloor -۸/\text{خورده‌ای} \rfloor + \lfloor ۴/\text{خورده‌ای} \rfloor = -۹ + ۴ = -۵$

۷ـ (۱) یک مربع $\Leftarrow ۱ \le x < ۲ , ۴ \le y < ۵ \Leftarrow \lfloor x \rfloor = ۱ , \lfloor y \rfloor = ۴ \Leftarrow ۱ \times ۴ = ۴$

$$\lfloor x \rfloor . \lfloor y \rfloor = ۴ \Rightarrow \begin{cases} ۱ \times ۴ = ۴ \\ ۴ \times ۱ = ۴ \\ (-۱)(-۴) = ۴ \\ (-۴)(-۱) = ۴ \\ ۲ \times ۲ = ۴ \\ (-۲)(-۲) = ۴ \end{cases}$$

۶ مربع می‌شود به ابعاد ۱ × ۱ $\Rightarrow S = ۶ \times ۱ = ۶$

۸ـ (۴) $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = ۴$ غیرممکن $\Rightarrow$ ۰

$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = ۰ \Rightarrow x \in Z$ بیشمار جواب $\Rightarrow$ بیشمار

$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -۱ \Rightarrow x \in R - Z$ بیشمار جواب $\Rightarrow$ بیشمار

۹ـ (۴) $\lfloor ۹ \rfloor + \lfloor ۹/\text{خورده‌ای} \rfloor + \dots + \lfloor ۹/\text{خورده‌ای} \rfloor = ۹ + ۹ + \dots + ۹ = ۱۹ \times ۹ = ۱۷۱$

۱۰ـ (۴)
$$\begin{cases} \lfloor |۲x| \rfloor \in Z \\ \lfloor |۲x| \rfloor \ge ۰ \end{cases} \Rightarrow ۰ \le \lfloor |۲x| \rfloor \le ۱ \Rightarrow \begin{cases} \lfloor |۲x| \rfloor = ۰ \Rightarrow ۰ \le |۲x| < ۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} < x \le ۰ \text{ یا } ۰ \le x < \frac{۱}{۲} \\ \lfloor |۲x| \rfloor = ۱ \Rightarrow ۱ \le |۲x| < ۲ \Rightarrow -۱ < x \le -\frac{۱}{۲} \text{ یا } \frac{۱}{۲} < x \le ۱ \end{cases}$$

حال جوابها را اجتماع می‌کنیم.

ریاضیات بازتاب کنندهٔ واقعیتهاست. **«ز ـ دورینگ»**

تست ۲:

۱ـ حاصل $[\sin 87^\circ + \sin 88^\circ + \sin 90^\circ]$ **کدام است؟**

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

۲ـ معادلهٔ $|x| + |x-1| = [x]$ **چند جواب دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) ۰

۳ـ معادلهٔ $[\frac{1}{x}] + [\frac{-1}{x}] = 0$ **چند جواب دارد؟**

۱) ۰ ۲) بی‌شمار ۳) ۱ ۴) ۲

۴ـ مجموعه جواب معادلهٔ $|[x + 2[x]]| = 6$ **کدام است؟**

۱) $[2,3]$ ۲) $[2,3) \cup (-1,-2]$ ۳) $[-2,3)$ ۴) $[-2,2)$

۵ـ مجموعه جواب معادلهٔ $[x] + [x-1] + [x+2] = 7$ **برابر است با:**

۱) $(5,6)$ ۲) $[5,6]$ ۳) $(5,6) \cup \{4\}$ ۴) $[5,6] \cup \{4\}$

۶ـ اگر $E(x^2 - 10x) = E(x^2 - 4x) = n$**، آنگاه** $E(x^2 - 7x)$ **برابر است با: (**$E(x)$ **به معنای جزء صحیح x است)**

۱) $n+1$ ۲) $n+3$ ۳) $n-3$ ۴) n

۷ـ معادلهٔ $[x] - \frac{1}{9} = [3x] + [5x] + [7x]$**، چند ریشهٔ حقیقی دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) ۰

۸ـ به ازاء کدام مقدار m، رابطه‌ی $x^2 - 2x > [m]$**، همواره برقرار است؟**

۱) $m \leq -2$ ۲) $m < -1$ ۳) $-1 < m \leq 2$ ۴) $m = -1$

۹ـ مساحت نمودار رابطه‌ی ریاضی $\lfloor x^2 + y^2 \rfloor = 4$ **چقدر است؟**

۱) π ۲) 2π ۳) 5π ۴) 9π

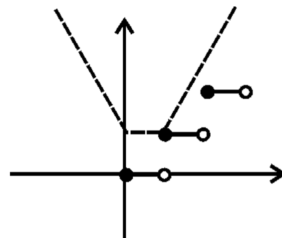
۱۰ـ مساحت نمودار رابطه‌ی ریاضی $\lfloor |x| + |y| \rfloor = 4$ **برابر است با:**

۱) ۱۸ ۲) ۳۲ ۳) ۱۲ ۴) ۳۶

۱ـ (۲) $\lfloor ۱ + \text{عددی مثبت بین } ۰/۸۵ \text{ و } ۱ + \text{عددی مثبت بین } ۰/۸۵ \text{ و } ۱ + \text{عددی مثبت بین } ۰/۸۵ \text{ و } ۱\rfloor = \lfloor ۲/\text{خورده‌ای}\rfloor = ۲$

توجه کنید که: $۰/۸۵ \simeq \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin ۶۰^\circ$

۲ـ (۱) با توجه به شکل، فقط یک جواب دارد.



۳ـ (۲) **یادآوری:** $\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor = ۰ \Leftrightarrow x \in z$

$\Rightarrow \frac{۱}{x} \in z \Rightarrow x = \frac{۱}{k}, k \in z$ بیشمار جواب

۴ـ (۲) $|۳\lfloor x\rfloor| = ۶ \Rightarrow |\lfloor x\rfloor| = ۲ \Rightarrow \begin{cases} \lfloor x\rfloor = -۲ \Rightarrow -۲ \le x < -۱ \\ \text{یا} \qquad\qquad \text{یا} \\ \lfloor x\rfloor = ۲ \Rightarrow ۲ \le x < ۳ \end{cases}$

۵ـ (۳) $\lfloor x\rfloor + ۱ + \lfloor -x\rfloor + ۲ + \lfloor x\rfloor = ۷$

$$\begin{cases} x \in z \Rightarrow x + ۱ - x + ۲ + x = ۷ \Rightarrow x = ۴ \\ x \notin z \Rightarrow -۱ + ۳ + \lfloor x\rfloor = ۷ \Rightarrow \lfloor x\rfloor = ۵ \Rightarrow ۵ \le x < ۶ \overset{x \notin z}{\Rightarrow} ۵ < x < ۶ \Rightarrow (۵,۶) \cup \{۴\} \end{cases}$$

۶ـ (۴) $\frac{x^۲ - ۴x + x^۲ - ۱۰x}{۲} = x^۲ - ۷x \Rightarrow E(x^۲ - ۷x) = n$

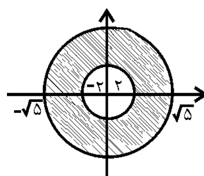
یادآوری: $\lfloor x\rfloor = \lfloor y\rfloor = n \Rightarrow \left\lfloor \frac{x+y}{۲} \right\rfloor = n$

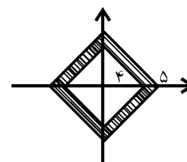
۷ـ (۴) $\underbrace{\lfloor x\rfloor + \lfloor ۳x\rfloor + \lfloor ۵x\rfloor + \lfloor ۹x\rfloor}_{\text{صحیح}} = \underbrace{\frac{۱}{۹}}_{\text{غیرصحیح}} \Rightarrow$ جواب ندارد.

۸ـ (۲) $x^۲ - ۲x - \lfloor m\rfloor > ۰$

$$\begin{cases} a = ۱ > ۰ \\ \Delta < ۰ \Rightarrow ۴ + ۴\lfloor m\rfloor < ۰ \Rightarrow \lfloor m\rfloor < -۱ \Rightarrow \lfloor m\rfloor = -۲, -۳, \dots \Rightarrow m < -۱ \end{cases}$$

۹ـ (۱) $S = ۵\pi - ۴\pi = \pi$ $\qquad ۴ \le x^۲ + y^۲ < ۵ \Rightarrow$





۱۰ـ (۱) $S = ۵۰ - ۳۲ = ۱۸$ $\qquad ۴ \le |x| + |y| < ۵$

یادآوری: مساحت مربع $|x - a| + |x - b| = k \Rightarrow S = ۲k^۲$

مردان کامیاب، غالباً از شکست میوهٔ پیروزی چیده‌اند. «گوته»

تست ۳:

۱ـ حدود تغییرات y از رابطه‌ی $y = 2x^3 - \lfloor x^3 + \lfloor x^3 \rfloor \rfloor$، کدام است؟

۱) $0 \le y < 2$ ۲) $0 \le y < 1$ ۳) $1 \le y < 2$ ۴) $0 < y \le 2$

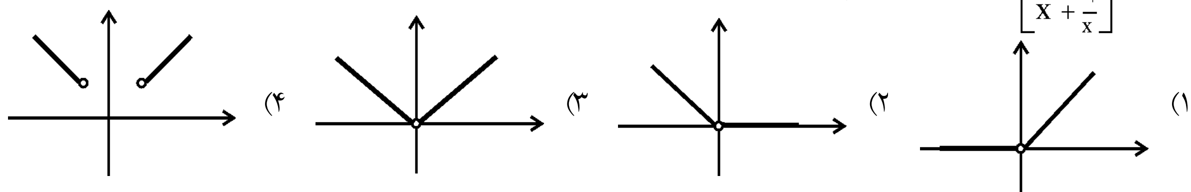
۲ـ عبارت $\left\lfloor \frac{2x^2+3}{x^2+3} \right\rfloor$ به ازاء جمیع مقادیر x، برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

۳ـ مساحت رابطه‌ی ریاضی $\lfloor x + y \rfloor = 5$، محصور به ناحیه‌ی اول محورهای مختصات چقدر است؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۶ ۳) ۱۱ ۴) $\frac{11}{2}$

۴ـ نمودار $y = x \left\lfloor \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \right\rfloor$، به کدام صورت زیر است؟



۵ـ هرگاه $\lfloor 2(x^2+1) \rfloor = \lfloor 4x \rfloor$ باشد، آنگاه $\lfloor (x+1)^2 \rfloor$ کدام است؟

۱) $\lfloor x^2 \rfloor + 1$ ۲) $\lfloor 4x \rfloor$ ۳) $(\lfloor 4x \rfloor)^2$ ۴) $\sqrt{\lfloor 4x \rfloor}$

۶ـ هرگاه $\lfloor x \rfloor = -3$ و $\lfloor y \rfloor = 4$ باشد، حاصل $\lfloor x + y \rfloor$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱ یا ۲ ۳) ۳ یا ۴ ۴) ۲

۷ـ حاصل $\left\lfloor \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{10}} \right\rfloor$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۳

۸ـ معادله‌ی $\frac{x}{2} = \lfloor \frac{x}{3} \rfloor$، چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹ـ معادله‌ی $5x = 6\lfloor x \rfloor$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

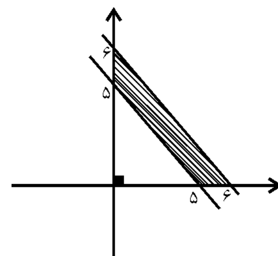
۱۰ـ هرگاه $\lfloor -\sin x \rfloor = 1$، حاصل $\left\lfloor \tan \frac{x}{2} \right\rfloor$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) تعریف نشده

۱ـ (۱) $y = 2x^3 - 2\lfloor x^3 \rfloor = 2(x^3 - \lfloor x^3 \rfloor)$, $0 \le x^3 - \lfloor x^3 \rfloor < 1$ $\Rightarrow 0 \le y < 2$

۲ـ (۱) $\left\lfloor \frac{2x^3+6-3}{x^2+3} \right\rfloor = 2 + \left\lfloor \frac{-3}{x^2+3} \right\rfloor = 2 + (-1) = 1$

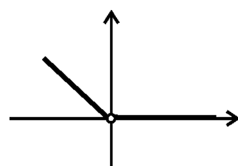
۳ـ (۴)



$\lfloor x+y \rfloor = 5 \Rightarrow 5 \le x+y < 6$

مساحت قسمت هاشورخورده $= \frac{6\times 6}{2} - \frac{5\times 5}{2} = \frac{11}{2}$

۴ـ (۲) **یادآوری:** $\begin{cases} a > 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \ge 2 \\ a < 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \le -2 \end{cases}$



$y = \begin{cases} 0 & ,(x > 0) \\ \text{تعریف نشده} & ,(x = 0) \\ -x & ,(x < 0) \end{cases}$

۵ـ (۲) $\frac{2(x^2+1)+4x}{2} = (x+1)^2 \Rightarrow \lfloor (x+1)^2 \rfloor = \lfloor 4x \rfloor$

یادآوری: $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor = n \Rightarrow \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor = n$

۶ـ (۲) $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ یا $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

$\Rightarrow \lfloor x+y \rfloor = -3+4$ یا $-3+4+1 \Rightarrow \lfloor x+y \rfloor = 1$ یا ۲

۷ـ (۱) **نکته:** $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1$

$\lfloor \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \dots + \sqrt{10} - \sqrt{9} \rfloor = \lfloor \sqrt{10} - 1 \rfloor = \lfloor$خورده‌ای $2/ \rfloor = 2$

۸ـ (۳) $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = \frac{x}{2} = k, k \in z \Rightarrow x = 2k \Rightarrow \left\lfloor \frac{2k}{3} \right\rfloor = k$

$\Rightarrow k \le \frac{2k}{3} < k+1 \Rightarrow \begin{cases} k \le 0 \\ , \\ -3 < k \end{cases} \Rightarrow -3 < k \le 0$

$\Rightarrow k = -2$ یا -1 یا $0 \Rightarrow x = 2k = -4 ، -2 ، 0$ سه جواب دارد

۹ـ (۳) $\lfloor x \rfloor = \frac{5}{6} x = k, k \in Z \Rightarrow x = \frac{6k}{5} \Rightarrow \left\lfloor \frac{6k}{5} \right\rfloor = k$

$k \le \frac{6k}{5} < k+1 \Rightarrow \begin{cases} 0 \le k \\ k < 5 \end{cases} \Rightarrow 0 \le x < 5 \Rightarrow k = 0$ یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴

$x = 0 ، \frac{6}{5} ، \frac{12}{5} ، \frac{18}{5} ، \frac{24}{5}$ ۵جواب

۱۰ـ (۳) (چون sin هیچگاه بیشتر از ۱ نمی‌شود) $\lfloor -\sin x \rfloor = 1 \Rightarrow 1 \le -\sin x < 2 \Rightarrow -\sin x = 1$

$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left\lfloor \tan\frac{x}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \tan(-\frac{\pi}{4}) \right\rfloor = -1$

تست ۴:

۱ـ مساحت بین نمودار $y = \frac{-۱}{\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor}$ و محور xها، در فاصلهی $|x| \leq ۲$، برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۲ـ دامنهی تعریف تابع $f(x) = \sqrt{x + \lfloor -x \rfloor}$، کدام است؟

۱) R ۲) Z ۳) N ۴) Z^-

۳ـ هرگاه $f(x) = \left\lfloor \frac{\sqrt[۳]{\sin x}}{\sqrt{\cos x}} \right\rfloor$ باشد، حاصل $f(\frac{\pi}{۴})$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۴ـ هرگاه، $۷۲۴ = (۲ + \sqrt{۳})^۵ + (۲ - \sqrt{۳})^۵$ باشد، آنگاه جزء صحیح $(۲ + \sqrt{۳})^۵$ چقدر است؟

۱) ۷۲۵ ۲) ۷۲۴ ۳) ۷۲۳ ۴) ۷۲۶

۵ـ برد تابع $f(x) = \lfloor x+۴ \rfloor + \lfloor ۳-x \rfloor + ۱$، کدام است؟

۱) {۸,۹} ۲) [۷,۸) ۳) [۸,۹) ۴) {۷,۸}

۶ـ برد تابع $f(x) = ۲ + \sqrt{x - ۴\left\lfloor \frac{x}{۴} \right\rfloor}$ کدام است؟

۱) [۲,۶] ۲) [۲,۴] ۳) [۲,۴) ۴) [۲,۶)

۷ـ تابع $f(x) = \sin(\pi \lfloor x \rfloor)$ چه نوع تابعی است؟

۱) زوج ۲) فرد ۳) هم زوج و هم فرد ۴) نه زوج و نه فرد

۸ـ هرگاه $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ باشد، آنگاه برد تابع fof کدام است؟

۱) {۰,-۱} ۲) {۰,۱} ۳) {۰} ۴) {۱}

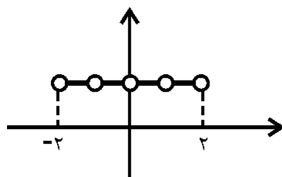
۹ـ مجموعه جواب معادلهی $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{۱}{۳} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{۲}{۳} \right\rfloor = ۵$، کدام است؟

۱) $[\frac{۵}{۲},۲]$ ۲) $[\frac{۵}{۳},۲)$ ۳) [۲,۳) ۴) [۲,۳]

۱۰ـ معادلهی $x + \sqrt{x} = \lfloor x \rfloor - ۲$، چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بیشمار ۴) جواب ندارد

۱ـ (۲) $y = \begin{cases} \text{تعریف نشده} & ,(x \in z) \\ ۱ & ,(x \notin z) \end{cases}$



مساحت مستطیل = ۴ × ۱ = ۴

۲ـ (۲) $f(x) = \begin{cases} ۰ & ,(x \in z) \\ \sqrt{x - \lfloor x \rfloor - ۱} & ,(x \notin z) \end{cases} \overset{۰ \le x - \lfloor x \rfloor < ۱}{\Rightarrow} f(x) = \begin{cases} ۰ & ,(x \in z) \\ \text{تعریف نشده} & ,(x \notin z) \end{cases} \Rightarrow D_f = z$

یادآوری: $x \notin z \Rightarrow \lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - ۱$

۳ـ (۲) $f(\frac{\pi}{۴}) = \left\lfloor \frac{\sqrt[۳]{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}}{\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt[۶]{\frac{\frac{۲}{۴}}{\frac{۲\sqrt{۲}}{۸}}} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt[۶]{\sqrt{۲}} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt[۱۲]{۲} \right\rfloor = \lfloor$ خورده‌ای /۱$\rfloor$ = ۱

۴ـ (۳) $(۲+\sqrt{۳})^۵ = ۷۲۴ - (۲-\sqrt{۳})^۵ = ۷۲۴ -$ خورده‌ای /۰ = خورده‌ای /۷۲۳

$\Rightarrow \left\lfloor (۲+\sqrt{۳})^۵ \right\rfloor = ۷۲۳$

۵ـ (۴) $f(x) = \lfloor x \rfloor + ۴ + ۳ + \lfloor -x \rfloor + ۱ = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor + ۸ = (-۱$ یا $۰) + ۸ = ۷$ یا ۸

۶ـ (۳) $f(x) = ۲ + \sqrt{۴(\frac{x}{۴} - \lfloor \frac{x}{۴} \rfloor)} = ۲ + ۲\sqrt{\frac{x}{۴} - \lfloor \frac{x}{۴} \rfloor}$

$۰ \le \underbrace{\frac{x}{۴} - \left\lfloor \frac{x}{۴} \right\rfloor}_{A} < ۱ \Rightarrow ۰ \le \sqrt{A} < ۱ \Rightarrow ۰ \le ۲\sqrt{A} < ۲ \Rightarrow ۲ \le ۲ + ۲\sqrt{A} < ۴$

۷ـ (۳) تابع هم زوج و هم فرد است. $\lfloor x \rfloor = k \in z \Rightarrow f(x) = \sin(k\pi) = ۰ \Rightarrow$

۸ـ (۳) $f(x) = \begin{cases} ۰ & ,(x \in z) \\ -۱ & ,(x \notin z) \end{cases} \Rightarrow (fof)(x) = f(f(x)) = \begin{cases} f(۰) & ,(x \in z) \\ f(-۱) & ,(x \notin z) \end{cases}$

$\Rightarrow (fof)(x) = \begin{cases} ۰ & ,(x \in z) \\ ۰ & ,(x \notin z) \end{cases} \Rightarrow y = (fof)(x) = \{۰\}$

۹ـ (۲) $\lfloor ۳x \rfloor = ۵ \Rightarrow ۵ \le ۳x < ۶ \Rightarrow \frac{۵}{۳} \le x < ۲$

۱۰ـ (۴) $x - \lfloor x \rfloor = -\sqrt{x} - ۲$

$\begin{cases} ۰ \le x - \lfloor x \rfloor < ۱ \\ -\sqrt{x} - ۲ \le -۲ \end{cases} \Rightarrow$ لذا تساوی فوق غیرممکن است.

مردم از فکر کردن بیش از همه چیز رنج می‌برند. «تولستوی»

تست ۵:

۱ـ هرگاه $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$ باشد، حاصل $a^{\lfloor \sin x \rfloor} + a^{\lfloor \cos x \rfloor}$، کدام است؟

۱) $a + \frac{۱}{a}$ ۲) $a - \frac{۱}{a}$ ۳) $۱ + \frac{۱}{a}$ ۴) $۱ - \frac{۱}{a}$

۲ـ مجموعه جواب معادله‌ی $۵^{\lfloor \log_۳^x \rfloor} = \frac{۱}{۱۲۵}$، کدام است؟

۱) $(\frac{۱}{۲۷},\frac{۱}{۹}]$ ۲) $[\frac{۱}{۹},\frac{۱}{۳}]$ ۳) $[\frac{۱}{۲۷},\frac{۱}{۹})$ ۴) $[۹,۲۷]$

۳ـ مجموعه جواب معادله‌ی $|\lfloor ۱ + x \rfloor - ۱| = ۱$، کدام است؟

۱) $(-۱,۰) \cup [۱,۲)$ ۲) $[-۱,۱] \cup [۲,۳)$ ۳) $[-۱,۰) \cup [۱,۲)$ ۴) $[-۱,۰] \cup [۱,۲)$

۴ـ هرگاه $f(x) = \lfloor x \rfloor - ۱/۵$، حاصل $(fofof)(۰)$ برابر است با:

۱) -۶ ۲) -۵ ۳) $-۵/۵$ ۴) $-۴/۵$

۵ـ نمودار رابطه‌ی $\lfloor x \rfloor ! + \lfloor y \rfloor ! = ۷$ عبارتست از:

۱) دو نیم خط ۲) دو مستطیل ۳) دو مربع ۴) یک مستطیل

۶ـ هرگاه $\left\lfloor \frac{۳x+۱}{x} \right\rfloor = ۵$ باشد، در آن صورت، حاصل $\lfloor -۶x \rfloor$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۳

۷ـ نمودار تابع $y = \frac{x}{\lfloor x - ۱ \rfloor}$ روی فاصله‌ی $(-۱,۲]$ چه شکلی است؟

۱) یک پاره خط ۲) دو پاره خط ۳) سه پاره خط ۴) دو نیم خط

۸ـ مجموعه جواب معادله‌ی $\lfloor x + ۰/۴ \rfloor + \lfloor x - ۲/۶ \rfloor = ۱$، کدام است؟

۱) $۱/۶ \le x < ۲/۶$ ۲) $۱/۴ \le x < ۲/۴$ ۳) $۲ \le x < ۳$ ۴) $۰/۴ \le x < ۱/۴$

۹ـ نامعادله‌ی $\lfloor ۳x + ۲ \rfloor + \lfloor ۲x - ۱ \rfloor \le ۵x + ۱$، چند جواب دارد؟

۱) بی‌شمار ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰ـ مجموعه جواب معادله‌ی $۲\left\lfloor x + \frac{۱}{۳} \right\rfloor - \left\lfloor x - \frac{۸}{۳} \right\rfloor = ۰$، کدام است؟

۱) $[-\frac{۱۳}{۳},\frac{-۱۰}{۳})$ ۲) $[-۳,\frac{-۸}{۳})$ ۳) $[-\frac{۱۰}{۳},\frac{-۷}{۳})$ ۴) $[-\frac{۵}{۳},\frac{۱}{۳}]$

۱ـ (۳) $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} 0 < \sin x < 1 \\ -1 < \cos x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lfloor \sin x \rfloor = 0 \\ \lfloor \cos x \rfloor = -1 \end{cases} \Rightarrow a^0 + a^{-1} = 1 + \frac{1}{a}$

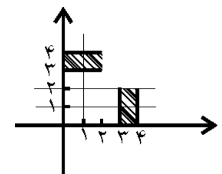
۲ـ (۳) $5^{\lfloor \log_3^x \rfloor} = 5^{-3} \Rightarrow \lfloor \log_3^x \rfloor = -3 \Rightarrow -3 \le \log_3^x < -2 \Rightarrow \frac{1}{27} \le x < \frac{1}{9}$

۳ـ (۳) $\lfloor x \rfloor + 1 - 1 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \lfloor x \rfloor = -1 \\ \text{یا} \\ \lfloor x \rfloor = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \le x < 0 \\ \text{یا} \\ 1 \le x < 2 \end{cases}$

۴ـ (۳) $f(0) = -1/5 \Rightarrow f(-1/5) = -3/5 \Rightarrow f(-3/5) = -5/5$

$(fofof)(0) = f(f(f(0))) = -5/5$

۵ـ (۲) $\lfloor x \rfloor ! + \lfloor y \rfloor ! = 7 \Rightarrow \begin{cases} 3! + 1! = 7 \quad \lfloor x \rfloor = 3, \lfloor y \rfloor = 1 \Rightarrow \begin{cases} 3 \le x < 4 \\ 1 \le y < 2 \end{cases} \\ 1! + 3! = 7 \Rightarrow \lfloor y \rfloor = 3, \lfloor x \rfloor = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 \le y < 2 \\ 3 \le x < 4 \end{cases} \end{cases}$



$\lfloor x \rfloor ! + \lfloor y \rfloor ! = 7 \Rightarrow \begin{cases} 3! + 0! = 7 \quad \lfloor y \rfloor = 3, \lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3 \le y < 4 \\ 0 \le x < 1 \end{cases} \\ 0! + 3! = 7 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 3, \lfloor y \rfloor = 1 \Rightarrow \begin{cases} 3 \le x < 4 \\ 0 \le y < 1 \end{cases} \end{cases}$

۶ـ (۴) $\left\lfloor \frac{3x}{x} + \frac{1}{x} \right\rfloor = 5 \Rightarrow 3 + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 5 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 2$

$\Rightarrow 2 \le \frac{1}{x} < 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < x \le \frac{1}{2} \Rightarrow -3 \le -6x < -2 \Rightarrow \lfloor -6x \rfloor = -3$

۷ـ (۲) $y = \frac{x}{\lfloor x \rfloor - 1} \begin{cases} -1 \le x < 0 \Rightarrow y = \frac{x}{-2} \text{ پاره‌خط} \\ 0 \le x < 1 \Rightarrow y = -x \text{ پاره‌خط} \Rightarrow \text{دو پاره‌خط} \\ 1 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow y = \text{تعریف نشده} \end{cases}$

۸ـ (۱) $\lfloor x + 0/4 \rfloor + \lfloor x + 0/4 - 3 \rfloor = 1 \Rightarrow 2 \lfloor x + 0/4 \rfloor = 4 \Rightarrow \lfloor x + 0/4 \rfloor = 2$

$2 \le x + 0/4 < 3 \Rightarrow 1/6 \le x < 2/6$

۹ـ (۱) $\forall x \in R: \lfloor x \rfloor \le x \Rightarrow \forall x \in R: \lfloor 5x + 1 \rfloor \le 5x + 1 \quad (1)$

$\forall x,y \in R: \lfloor x + y \rfloor \ge \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \Rightarrow \forall x \in R: \lfloor 5x + 1 \rfloor = \lfloor 3x + 2 + 2x - 1 \rfloor \ge \lfloor 3x + 2 \rfloor + \lfloor 2x - 1 \rfloor \quad (2)$

(۱) و (۲) $\Rightarrow \forall x \in R : 5x + 1 \ge \lfloor 3x + 2 \rfloor + \lfloor 2x - 1 \rfloor \Rightarrow$ پس بی‌شمار جواب دارد.

۱۰ـ (۳) $2 \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor - \left\lfloor x + \frac{1}{3} - 3 \right\rfloor = 0 \Rightarrow \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor = -3 \Rightarrow -3 \le x + \frac{1}{3} < -2 \Rightarrow -\frac{10}{3} \le x < -\frac{7}{3}$

فصل پنجم

تصاعد عددی (تصاعد حسابی)

تصاعد عددی رشته‌ای از اعداد حقیقی است که هر جمله‌اش با افزودن عدد ثابتی به جملهٔ ماقبلش به دست می‌آید. این عدد ثابت را که مخالف صفر می‌باشد، قدر نسبت تصاعد می‌گویند و آنرا با d یا r نمایش می‌دهند.

$a, a+d, a+2d, ..., a+9d, ..., a+(n-1)d, ...$

$t_1, t_2, t_3, ..., t_{10}, ..., t_n, ...$

t_n را جمله‌ی عمومی یا جمله‌ی nام تصاعد می‌گویند.

در تصاعد عددی فرمولها و روابط زیر برقرار ند.

۱) $d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = ... = t_n - t_{n-1}$

۲) $t_n = t_1 + (n-1)d = a + (n-1)d$

مثال: در یک تصاعد حسابی $t_n = 5n + 1$، جمله هفتم تصاعد را حساب کنید؟

$t_7 = 35 + 1 = 36$

تست: در یک تصاعد حسابی $t_n = 3n + 2$، کدام جمله‌ی تصاعد برابر ۲۹ است؟

۱) هفتم ۲) دهم ۳) نهم ۴) یازدهم

$29 = 3n + 2 \Rightarrow n = 9$

تست: بین دو عدد ۳۰ و ۵۰۰ چند مضرب ۷ وجود دارد؟

۱) ۶۸ ۲) ۶۹ ۳) ۶۷ ۴) ۶۶

۳۵ و ۴۲ و ۴۹ و .... و ۴۹۷ $t_n = a + (n-1)d \Rightarrow 497 = 35 + (n-1)7 \Rightarrow n = 66$

۳) هرگاه در یک تصاعد حسابی $t_n = kn + l$، آنگاه قدر نسبت تصاعد همان ضریب n، یعنی k است.

تست: در یک تصاعد عددی $t_n = 5n - 4$، قدر نسبت تصاعد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۴- ۴) ۵-

با توجه به نکته فوق گزینه ۲ صحیح است.

۴) در هر تصاعد حسابی، داریم، $t_m - t_n = (m-n)d$، به عبارت دیگر اگر t_m و t_n معلوم باشند، قدر نسبت تصاعد از رابطه‌ی $d = \frac{t_m - t_n}{m - n}$ بدست می‌آید.

تست: هرگاه جملات نهم و چهارم یک تصاعد حسابی به ترتیب ۲۲ و ۷ باشند، قدر نسبت تصاعد، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲-

$d = \frac{t_9 - t_4}{9-4} = \frac{22-7}{5} = 3$

۵) در هر تصاعد عددی، داریم:

$m+n=p+q \Leftrightarrow t_m+t_n=t_p+t_q$

$m-n=p-q \Leftrightarrow t_m-t_n=t_p-t_q$

تست: جملات پنجم و هشتم و چهاردهم یک تصاعد حسابی به ترتیب اعداد ۱۳ و ۲۵ و ۴۷ بوده، جملهٔ یازدهم این تصاعد برابر است با:

۱) ۳۵ ۲) ۳۹ ۳) ۳۳ ۴) ۳۷

$۵+۱۴=۸+۱۱ \Rightarrow t_۵+t_{۱۴}=t_۸+t_{۱۱} \Rightarrow t_{۱۱}=۳۵$

۶) در هر تصاعد حسابی، داریم:

$m+n=۲k \Leftrightarrow t_m+t_n=۲t_k$

به عبارت دیگر، اگر تعداد جملات یک تصاعد حسابی، عددی فرد باشد آنگاه دو برابر جمله‌ی وسطی، برابر است با مجموع دو جملهٔ اول و آخر.

۷) شرط اینکه سه عدد a و b و c تشکیل یک تصاعد عددی بدهند (یعنی سه جملهٔ متوالی یک تصاعد عددی باشند) آنستکه $a+c=۲b$ یا $b=\frac{a+c}{۲}$

در این حالت b را واسطهٔ عددی (واسطهٔ حسابی)، (میانگین حسابی) دو عدد a و c می‌گویند.

تست: اگر $x-۱$ و $۲x+۱$ و $۴x+۵$ سه جملهٔ متوالی یک تصاعد عددی باشند، x کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۳- ۴) ۲-

$(x-۱)+(۴x+۵)=۲(۲x+۱) \Rightarrow x=-۲$

تست: به ازاء چه مقداری از a، مجموع و حاصلضرب و تفاضل ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $x^۲-(۲a+۳)x+a=۰$ تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۳-

$۲p=s+D \Rightarrow ۲x'x''=(x'+x'')+(x'-x'') \Rightarrow ۲x'x''=۲x' \Rightarrow x''=۱$

این ریشه بایستی در معادله صدق کند لذا: $۱-۲a-۳+a=۰ \Rightarrow a=-۲$

تست: هرگاه a و b و c سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد حسابی با قدر نسبت q باشند، $\cos a+\cos c$ برابر است با:

۱) $۲\sin b\sin q$ ۲) $۲\cos b\sin q$ ۳) $۲\cos b\cos q$ ۴) $۲\sin b\cos q$

$a, b, c \Rightarrow a+c=۲b$

$\underbrace{a}_{a}\ ,\ \underbrace{a+q}_{b}\ ,\ \underbrace{a+۲q}_{c} \Rightarrow a-c=-۲q$ ، $\cos a+\cos c=۲\cos\frac{a+c}{۲}\cos\frac{a-c}{۲}=۲\cos b\cos q$

۸) هرگاه بین دو عدد a و b، m واسطه‌ی حسابی درج کنیم (قرار دهیم) قدر نسبت تصاعد از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$d=\frac{b-a}{m+۱}$

به عبارت دیگر، ما دنبال m عدد می‌گردیم تا آنها را بین a و b قرار داده و رشته‌ی حاصل، تصاعد حسابی گردد.

تست: بین دو عدد ۷ و ۲۵، پنج واسطهٔ عددی درج کرده‌ایم، قدر نسبت تصاعد کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) $\frac{۵}{۲}$

$d = \frac{b-a}{m+۱} = \frac{۲۵-۷}{۶} = ۳$

۷ , □ , □ , □ , □ , □ , ۲۵

$t_۱$ $t_۷$

یا $t_۷ = t_۱ + ۶d \Rightarrow ۲۵ = ۷ + ۶d \Rightarrow d = ۳$

۹) در تصاعد عددی، اگر $d > ۰$ باشد، تصاعد را صعودی و اگر $d < ۰$ باشد، تصاعد را نزولی می‌گویند.

۱۰) در تصاعد عددی، مجموع n جملهٔ اول از فرمولهای زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} S_n = \frac{n}{۲}[۲a + (n-۱)d] \\ S_n = \frac{n}{۲}(t_۱ + t_n) \end{cases}$$

s حرف اول کلمهٔ sum به معنای مجموع می‌باشد.

۱۱) به کمک فرمول فوق می‌توان فرمولهای مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n، مجموع اعداد طبیعی زوج و مجموع اعداد طبیعی فرد را به صورت زیر به دست آورد.

$$(۱۲) \begin{cases} ۱+۲+۳+...+n = \frac{n(n+۱)}{۲} = \frac{\text{عدد بعدیش} \times \text{آخرین عدد}}{۲} \\ ۲+۴+۶+۸+...+۲n = n(n+۱) = \text{(۱ + نصف آخرین عدد) نصف آخرین عدد} \\ ۱+۳+۵+...+۲n-۱ = n^۲ = (\frac{\text{آخرین عدد}+۱}{۲})^۲ \end{cases}$$

تست: حاصل ۱ + ۳ + ۵ + ... + ۴۹ کدام است؟

۱) ۵۲۵ ۲) ۶۲۵ ۳) ۵۷۵ ۴) ۶۷۵

حل: $(\frac{۴۹+۱}{۲})^۲ = ۶۲۵$

$$(۱۲ \begin{cases} s_۱ = t_۱ \\ s_۲ = t_۱ + t_۲ \\ s_۳ = t_۱ + t_۲ + t_۳ \\ \vdots \\ s_{n-۱} = t_۱ + t_۲ + ... + t_{n-۱} \\ s_n = t_۱ + t_۲ + ... + t_{n-۱} + t_n \end{cases}$$

$$(۱۳ \begin{cases} s_۲ - s_۱ = t_۲ \\ s_۳ - s_۲ = t_۳ \\ \vdots \\ s_n - s_{n-۱} = t_n \end{cases}$$

به طور کلی یعنی هرگاه، S_n معلوم باشد، جملهٔ عمومی از رابطه‌ی $t_n = S_n - S_{n-۱}$ به دست می‌آید.

تذکر: توجه داشته باشد که: $d = t_n - t_{n-۱}$

۱۴) در هر تصاعد حسابی، داریم: $d = s_n - ۲S_{n-۱} + S_{n-۲}$ زیرا:

$s_n - ۲s_{n-۱} + s_{n-۲} = (s_n - s_{n-۱}) - (s_{n-۱} - s_{n-۲}) = t_n - t_{n-۱} = d$

تست: در یک تصاعد عددی، مجموع n جملهٔ اول از دستور $s_n = n^۲ + ۲n$ به دست می‌آید، فرمول جملهٔ عمومی این تصاعد کدام است؟

۱) $t_n = ۲n + ۳$ ۲) $t_n = ۲n + ۱$ ۳) $t_n = ۲n + ۲$ ۴) $t_n = ۲n + ۴$

حل: $t_n = S_n - S_{n-۱} = n^۲ + ۲n - [(n-۱)^۲ + ۲(n-۱)] = ۲n + ۱$

تست: در یک تصاعد عددی، $s_n = n^۲ + ۳n$ (مجموع جملات)، قدر نسبت تصاعد کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

راه اول: $\begin{cases} s_۱ = t_۱ \\ s_۲ = t_۱ + t_۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴ = t_۱ \\ ۴ + ۶ = t_۱ + t_۲ \end{cases} \Rightarrow t_۲ = ۶ \Rightarrow d = t_۲ - t_۱ = ۲$

راه دوم: $d = t_n - ۲t_{n-۱} + t_{n-۲} = n^۲ + ۲n - ۲[(n-۱)^۲ + ۲(n-۱)] + (n-۲)^۲ + ۲(n-۲) = ۲$

۱۵) در یک تصاعد عددی با تعداد جملات متناهی و فرد، اگر جملهٔ وسطی معلوم باشد، آنگاه مجموع جملات تصاعد برابر است با: $s_n =$ تعداد جملات × جمله‌ی وسطی

مثال: در تصاعد عددی متناهی ۱۸ و ۱۳ و ۸ و ۳ و ۲-، مجموع جملات عبارتست از:

$S_۵ = ۵ \times ۸ = ۴۰$

تست: تعداد جملات یک تصاعد عددی $۲n + ۳$ می‌باشد هرگاه $t_{n+۲} = ۱۰۰$ باشد، $S_{۲n+۳}$ برابر است با:

۱) $۲۰۰n + ۱۰۰$ ۲) $۲۰۰n + ۳۰۰$ ۳) $۱۰۰n + ۱۰۰$ ۴) $۱۰۰n + ۳۰۰$

طبق نکته‌ی فوق، گزینه‌ی ۲ صحیح است.

۱۶) در هر تصاعد عددی، اگر $t_p = q$ و $t_q = p$، $(p \neq q)$، آنگاه $d = -۱$ و $a = p + q - ۱$ و $t_m = p + q - m$، بالاخص $t_{p+q} = ۰$.

تست: در یک تصاعد عددی $t_۵ = ۷$ و $t_۷ = ۵$، قدر نسبت و جملهٔ دوازدهم عبارتند از:

۱) $\begin{cases} d = ۱ \\ t_{۱۲} = ۱۲ \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} d = -۱ \\ t_{۱۲} = ۰ \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} d = -۱ \\ t_{۱۲} = ۱۲ \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} d = ۱ \\ t_{۱۲} = ۰ \end{cases}$

طبق نکتهٔ قبل، گزینهٔ ۲ درست است. $\begin{cases} t_۵ = a + ۴d \\ t_۷ = a + ۶d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + ۴d = ۷ \\ a + ۶d = ۵ \end{cases}$

دو معادله را از هم کم می‌کنیم. $۲d = -۲$ و لذا $d = -۱$، بسادگی دیده می‌شود که $t_{۱۲} = ۰$

۱۷) در یک تصاعد عددی، هرگاه $s_p = s_q$ باشد آنگاه $s_{p+q} = ۰$ $(p \neq q)$

۱۸) هرگاه مجموع یک تعداد فرد از جملات متوالی یک تصاعد حسابی (مثلاً مجموع سه جمله‌ی متوالی یا مجموع پنج جمله متوالی) معلوم باشند و قدر نسبت، جمله‌ی اول، جمله‌ی وسط و... از تصاعد را بخواهند، بهتر است این جملات را به

صورت: ۳ جمله متوالی ← $a-d, a, a+d$

۵ جمله‌ی متوالی ← $a-۲d, a-d, a, a+d, a+۲d$

در نظر بگیریم. در این حالت، به خاطر داشته باشید که a جمله‌ی وسط است.

تست: مجموع پنج جمله‌ی متوالی یک تصاعد حسابی برابر ۳۵ است جمله‌ی وسط تصاعد کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۱۱ ۴) ۲۲

$(a-۲d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+۲d)=۳۵$

$۵a=۳۵ \Rightarrow a=۷$

۱۹) هرگاه چهار عدد به تصاعد حسابی باشند، بهتر است آنها را به صورت $a-۳d, a-d, a+d, a+۳d$ انتخاب کنیم.

۲۰) هرگاه اضلاع یک مثلث قائم الزاویه تشکیل تصاعد حسابی بدهند، در این صورت، صورت کلی آنها به شکل ۳d و ۴d و ۵d خواهد بود.

۲۱) در یک تصاعد حسابی هرگاه p برابر جمله‌ی pام با q برابر جمله‌ی qام برابر باشد، آنگاه جمله‌ی (p+q)ام تصاعد صفر است. یعنی: $pt_p=qt_q \Rightarrow t_{p+q}=۰$

۲۲) اگر به جملات یک تصاعد حسابی، عدد ثابتی را اضافه کنیم، نتیجه، باز هم یک تصاعد حسابی با همان قدر نسبت خواهد بود.

۲۳) اگر از جملات یک تصاعد حسابی، عدد ثابتی را کم کنیم، نتیجه، باز هم یک تصاعد حسابی با همان قدر نسبت خواهد بود.

۲۴) اگر جملات یک تصاعد حسابی را در یک عدد ثابت مخالف صفر مانند k ضرب کنیم، نتیجه باز هم یک تصاعد حسابی خواهد بود که قدر نسبتش k برابر قدر نسبت تصاعد اول خواهد بود.

۲۵) اگر جملات یک تصاعد حسابی را بر یک عدد ثابت مخالف صفر مانند k تقسیم کنیم، نتیجه باز هم یک تصاعد حسابی خواهد بود که قدر نسبتش $\frac{۱}{k}$ برابر قدر نسبت تصاعد اول خواهد بود.

بسیار کسان هستند که نمی‌دانند که نمی‌دانند. «سقراط»

تربیت مادم عامل موفقیت من بود. «ادیسون»

تربیت طفل را بیست سال قبل شروع کن. «ناپلئون»

تست ۱:

۱ـ در یک تصاعد حسابی رابطه‌ی $t_{۳} + t_{۹} + t_{۱۱} + t_{۱۷} = ۴۰$ برقرار است، مجموع ۱۹ جمله‌ی اول کدام است؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۷۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۹۰

۲ـ بین دو عدد ۴ و $a-۱$ سه واسطه ی حسابی با قدر نسبت ۲- درج کرده‌ایم، $a^{۲}$ برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۹ ۴) ۱۶

۳ـ در دنباله‌ی ۵۴۰ و ... و ۸۰ و ۷۰ و ۶۰، جمله‌ی وسط کدام است؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۲۶۰ ۳) ۲۸۰ ۴) ۳۰۰

۴ـ تعداد جملات یک تصاعد حسابی ۳۹ و مجموع سه جمله‌ی وسط آن ۱۸ است، در این صورت مجموع همهٔ جملات چقدر است؟

۱) ۲۳۴ ۲) ۷۰۲ ۳) ۴۶۸ ۴) ۳۵۱

۵ـ در یک تصاعد عددی داریم: $S_n = ۲n^{۲} - n$، جمله‌ی چهارم این تصاعد، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۴

۶ـ در یک تصاعد حسابی رابطه‌ی $t_{n+۲} = ۳n + ۶$ برقرار است، مقدار $t_{۶} + t_{۱۰} + t_{۱۵}$ برابر است با:

۱) ۷۳ ۲) ۸۳ ۳) ۹۳ ۴) ۱۱۱

۷ـ حاصل $A = ۱۰۰^{۲} - ۹۹^{۲} + ۹۸^{۲} - ۹۷^{۲} + ... + ۲^{۲} - ۱^{۲}$ کدام است؟

۱) ۵۵۰۰ ۲) ۵۰۵۰ ۳) ۴۰۵۰ ۴) ۴۵۰۰

۸ـ در یک تصاعد حسابی جمله‌ی اول ۱۷ و قدر نسبت ۷ است، نخستین جمله‌ی بزرگتر از ۹۰۰ کدام است؟

۱) ۱۲۷ ۲) ۱۲۶ ۳) ۱۲۸ ۴) ۱۲۹

۹ـ مجموع چند جمله از تصاعد عددی با جمله‌ی عمومی $t_n = ۴n - ۱$ برابر ۷۸ می‌شود؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۰ـ اضلاع یک مثلث قائم الزاویه، تشکیل تصاعد عددی می‌دهند، اگر طول وتر این مثلث ۱۵ سانتی‌متر باشد، مجموع طول دو ضلع دیگر آن کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۱ ۳) ۲۳ ۴) ۲۵

۱ـ (۴)
$\begin{cases} t_۳+t_{۱۷}=t_۱+t_{۱۹} \\ t_۹+t_{۱۱}=t_۱+t_{۱۹} \end{cases} \Rightarrow t_۳+t_۹+t_{۱۱}+t_{۱۷}=۴۰ \Rightarrow ۲(t_۱+t_{۱۹})=۴۰$

$t_۱+t_{۱۹}=۲۰ \Rightarrow s_{۱۹}=\frac{n}{۲}\ (t_۱+t_{۱۹})=\frac{۱۹}{۲}\times ۲۰=۱۹۰$

۲ـ (۳)
$t_۱=۴ \qquad \Rightarrow \quad t_۵=t_۱+۴d \Rightarrow \ a-۱=۴+(-۸)$

$t_۵=a-۱ \qquad a=-۳ \ \Rightarrow \ a^۲=۹$

۳ـ (۴)
$t_n=t_۱+(n-۱)d \Rightarrow ۵۴۰=۶۰+(n-۱)(۱۰) \Rightarrow n=۴۹$

جمله‌ی وسط = جمله‌ی بیست و پنجم = $t_۱+(n-۱)d=۶۰+۲۴(۱۰)=۳۰۰$

۴ـ (۱)
$a+b+c=۱۸ \ \Rightarrow \ ۳b=۱۸ \ \Rightarrow \ b=۶$ جمله‌ی وسط

$S_{۳۹}=۳۹\times ۶=۲۳۴$

۵ـ (۲)
$t_۴=s_۴-s_۳=۲۸-۱۵=۱۳$

۶ـ (۳)
$t_{n+۲}=۳n+۶ \Rightarrow \begin{cases} n=۴ \Rightarrow t_۶=۱۸ \\ n=۸ \Rightarrow t_{۱۰}=۳۰ \Rightarrow t_۶+t_{۱۰}+t_{۱۵}=۹۳ \\ n=۱۳ \Rightarrow t_{۱۵}=۴۵ \end{cases}$

۷ـ (۲)
$A=(۱۰۰+۹۹)(۱۰۰-۹۹)+(۹۸+۹۷)(۹۸-۹۷)+\ldots+(۲+۱)(۲-۱)$

$=۱۰۰+۹۹+۹۸+۹۷+\ldots+۲+۱=\frac{۱۰۰\times۱۰۱}{۲}=۵۰۵۰$

۸ـ (۳)
$t_n>۹۰۰ \Rightarrow \ t_۱+(n-۱)d>۹۰۰ \Rightarrow ۱۷+۷(n-۱)>۹۰۰$

$n>۱۲۷/$ خورده‌ای $\Rightarrow \ n\geq ۱۲۸ \ \Rightarrow$ مطلوب $n=۱۲۸$

۹ـ (۲)
$t_n=۴n-۱ \Rightarrow \begin{cases} t_۱=۳ \\ d=۴ \end{cases}$

$S_n=\frac{n}{۲}[۲a+(n-۱)d] \Rightarrow ۷۸=\frac{n}{۲}(۶+۴(n-۱)) \quad \Rightarrow ۷۸=n(۲n+۱) \Rightarrow n=۶$

روش دوم: چون ۷۸، عدد خیلی بزرگی نیست، می‌توان با نوشتن جملات تصاعد، و محاسبهٔ مجموعشان تا اینکه ۷۸ شود نیز، به همین جواب رسید.
$۳+۷+۱۱+۱۵+۱۹+۲۳=۷۸$

۱۰ـ (۲)
$۳d\ ,\ ۴d\ ,\ ۵d \quad \Rightarrow \ ۵d=۱۵ \ \Rightarrow \ d=۳$

$۳d+۴d=۷d=۲۱$

بیا که نوبت صلح است و آشتی و عنایت — به شرط آنکه نگوئیم از گذشته حکایت.

«سعدی»

تست ۲:

۱ـ در یک تصاعد حسابی، مجموع جملات هفتم و بیست و هفتم، برابر ۱۰۰ می‌باشد، در این صورت مجموع سی‌و سه جمله‌ی اول تصاعد برابر است با:

۱) ۱۶۵۰ ۲) ۱۷۵۰ ۳) ۱۵۶۰ ۴) ۲۶۵۰

۲ـ زوایای مثلثی با قدر نسبت d به تصاعد عددی هستند، در این صورت $x + d$ برابر است با:

(x کوچکترین زاویه‌ی مثلث است)

۱) $50°$ ۲) $60°$ ۳) $70°$ ۴) $40°$

۳ـ ضرائب a و b و c در معادله‌ی $ax^2 + 2bx + c = 0$ تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند، یکی از ریشه‌ها کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{c}{a}$ ۳) $\frac{c}{a}$ ۴) $\frac{-b}{a}$

۴ـ جواب معادله‌ی $(x+1)+(x+4)+(x+7)+ ... +(x+28) = 155$ برابر است با:

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) ۳ ۳) ۹ ۴) ۱

۵ـ در یک تصاعد عددی با قدر نسبت ۵، تفاضل جملات دهم و نوزدهم چقدر است؟

۱) ۳۵ ۲) ۵۰ ۳) ۴۵ ۴) ۵۵

۶ـ در یک تصاعد حسابی داریم $t_{14}^2 - t_4^2 = 440$ و $t_9 = 11$، قدر نسبت تصاعد کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) ۳

۷ـ در یک تصاعد حسابی، دو برابر جمله‌ی ششم، سه برابر جمله‌ی چهارم است، نسبت جمله‌ی اول به قدر نسبت برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{2}{3}$

۸ـ t_n و t_m به ترتیب مجموع جملات nام و mام یک تصاعد عددی با قدر نسبت d هستند، کدام گزینه درست است؟

۱) $t_{m+n} = t_n + t_m$ ۲) $2t_{m+n} = t_m + t_n$ ۳) $t_{m+n} = t_n + md$ ۴) $t_{m+n} = t_n - md$

۹ـ در یک تصاعد عددی، که ۲۱ جمله دارد، جمله‌ی وسط برابر ۴۳ است، مجموع جملات این تصاعد، کدام است؟

۱) ۸۰۳ ۲) ۹۰۳ ۳) ۳۰۹ ۴) ۲۵۶

۱۰ـ در یک تصاعد حسابی $t_1 = 4$ و $t_{n+1} = t_n + 3$، جمله‌ی nام آن کدام است؟

۱) $n + 5$ ۲) $3n + 1$ ۳) $2n + 2$ ۴) $5n - 1$

۱ـ (۱) $t_۷ + t_{۲۷} = t_۱ + t_{۳۳} \Rightarrow t_۱ + t_{۳۳} = ۱۰۰$

$S_{۳۳} = \frac{۳۳}{۲}(t_۱ + t_{۳۳}) = ۱۶۵۰$

۲ـ (۲) $۳d , ۴d , ۵d \Rightarrow ۱۲d = ۱۸۰ \Rightarrow d = ۱۵^\circ$

$x = ۳d = ۴۵^\circ \Rightarrow d + x = ۶۰^\circ$

۳ـ (۲) $a + c = ۲b \Rightarrow \begin{cases} x' = -۱ \\ x'' = -\frac{c}{a} \end{cases}$

۴ـ (۴) واضح است که تعداد جملات ۱۰ تاست.

$t_n = \frac{n}{۲}(t_۱ + t_n) \Rightarrow ۱۵۵ = \frac{۱۰}{۲}(۱ + x + ۲۸ + x) \Rightarrow x = ۱$

۵ـ (۳) $t_{۱۹} - t_{۱۰} = ۹d = ۹(۵) = ۴۵$

۶ـ (۳) $(t_{۱۴} - t_۴)(t_{۱۴} + t_۴) = ۴۴۰ \Leftarrow \begin{cases} t_{۱۴} + t_۴ = ۲t_۹ = ۲۲ \\ t_{۱۴} - t_۴ = ۱۰d \end{cases}$

$(۱۰d)(۲۲) = ۴۴۰ \Rightarrow d = ۲$

۷ـ (۱) $۲t_۶ = ۳t_۴ \Rightarrow ۲a + ۱۰d = ۳a + ۹d \Rightarrow a = d \quad \frac{a}{d} = ۱$

۸ـ (۳) $t_{m+n} = a + (m + n - ۱)d = a + md + (n - ۱)d = t_n + md$

۹ـ (۲) $S_{۲۱} = ۲۱ \times ۴۳ = ۹۰۳$

۱۰ـ (۲) $t_{n+۱} = t_n + ۳ \Rightarrow t_{n+۱} - t_n = ۳ \Rightarrow d = ۳$

می‌دانیم، در فرمول جمله‌ی nام یعنی t_n، ضریب n، همان d است و چون $d = ۳$ است، لذا تنها گزینه‌ی صحیح، گزینه‌ی ۲ است.

فردا وقتی است که تنبل‌ها کار خواهند کرد. «کامبول»

گاهی سکوت بیش از تمام حرفها، مقصود را بیان می‌کند. «منستکیو»

نایاب‌ترین چیزها در جهان، دوست صمیمی است. «ناپلئون»

لذّتی بالاتر از مطالعه نیست. «تولستوی»

تست ۳:

۱ـ در یک تصاعد حسابی شامل ۵۰ جمله، مجموع ۱۰ جمله‌ی اول برابر ۱۰۰ و مجموع ۱۰ جمله‌ی آخر برابر ۴۰۰ است، مجموع جملات اول و آخر کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۲۵

۲ـ مجموع زوایای یک پنج ضلعی °۵۴۰ است، اندازهٔ زاویه‌ها یک تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند، اگر بزرگترین زاویه °۱۳۶ باشد، اندازهٔ زاویه‌ی کوچکتر کدام است؟

۱) °۹۴ ۲) °۷۸ ۳) °۸۰ ۴) °۸۴

۳ـ بین اعداد ۱۱ و ۵۱ چند واسطه‌ی حسابی با قدر نسبت $\frac{۴}{۵}$ می‌توان درج کرد؟

۱) ۴۹ ۲) ۵۰ ۳) ۳۵ ۴) ۳۲

۴ـ مجموع اعداد یک جدول ضرب (۸×۸) کدام است؟

۱) ۱۳۹۶ ۲) ۱۲۴۶ ۳) ۱۲۹۶ ۴) ۱۴۹۶

۵ـ در یک تصاعد حسابی ۱۲ جمله‌ای، مجموع سه جمله‌ی اول برابر ۱۵ و مجموع سه جمله‌ی آخر ۶۹ می‌باشد، مجموع تمام جملات برابر است با:

۱) ۳۶۶ ۲) ۱۸۶ ۳) ۲۰۰ ۴) ۱۶۸

۶ـ اعداد ۲- و $\log_{۲}^{x}$ و ۱، تصاعد عددی تشکیل می‌دهند، در این صورت $\log_{\frac{۱}{۸}}^{x}$ چقدر است؟

۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۷ـ به ازاء چه مقدار از m، ریشه‌های معادله‌ی $x^۳ - ۳x^۲ + (۲m - ۱)x - ۵ = ۰$ تشکیل تصاعد عددی می‌دهند؟

۱) $m = ۵$ ۲) $m = \frac{۱}{۲}$ ۳) $m = ۴$ ۴) $m = -۴$

۸ـ اگر به هر یک از جملات یک تصاعد حسابی ۵ واحد اضافه کنیم، جملات حاصل تشکیل تصاعد حسابی دیگری را می‌دهند که قدر نسبت آن... قدر نسبت اولی است.

۱) ۵ واحد بیشتر از ۲) ۵ برابر ۳) ۵ واحد کمتر از ۴) مساوی با

۹ـ مجموع ۱۳ مضرب اولیه‌ی عددی x، به جز صفر برابر ۵۴۶ است، در این صورت $(x + ۴)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱۰ـ بزرگترین عدد ۱۴۳ عدد پِی‌درپی برابر ۳۲۷ است، دهیمن عدد این رشته، کدام است؟

۱) ۱۸۵ ۲) ۱۹۵ ۳) ۱۹۴ ۴) ۱۸۰

۱ـ (۳) $\begin{cases} t_1+t_2+t_3+...+t_{10}=100 \\ t_{50}+t_{49}+t_{48}+...+t_{41}=400 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} 10(t_1+t_{50})=500 \Rightarrow t_1+t_{50}=50$

یادآوری نکته: $m+n=p+q \Rightarrow t_m+t_n=t_p+t_q$ ، مثلاً $t_2+t_{49}=t_1+t_{50}$

۲ـ (۳) $S_5=\frac{5}{2}(t_1+t_5) \Rightarrow 540^\circ=\frac{5}{2}(a+136^\circ) \Rightarrow a=80^\circ$

۳ـ (۱) $\begin{cases} t_1=11 \\ t_n=51 \end{cases} \Rightarrow t_n=t_1+(n-1)d \Rightarrow 51=11+(n-1)(\frac{4}{5}) \Rightarrow n=50 \Rightarrow n-2=49$ تعداد واسطه‌ها

راه دوم: $d=\frac{b-a}{m+1} \Rightarrow \frac{4}{5}=\frac{51-11}{m+1} \Rightarrow m=49$

۴ـ (۳) $(1+2+3+...+8)(1+2+3+...+8)=\frac{8\times 9}{2}\times\frac{8\times 9}{2}=1296$

۵ـ (۴) $\begin{cases} t_2+t_{11}=t_1+t_{12} \\ t_3+t_{10}=t_1+t_{12} \end{cases}$

$\begin{cases} t_1+t_2+t_3=15 \\ t_{10}+t_{11}+t_{12}=69 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می‌کنیم}} (t_1+t_{12})+(t_2+t_{11})+(t_3+t_{10})=84$

$3(t_1+t_{12})=84 \Rightarrow t_1+t_{12}=28$

$S_{12}=\frac{12}{2}(t_1+t_{12})=6\times 28=168$

۶ـ (۲) $-2+1=2\log_2^x \Rightarrow \log_2^x=\frac{-1}{2}$

$\log_{\frac{1}{8}}^x=\log_{2^{-3}}^x=\frac{1}{-3}\log_2^x=(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{2})=\frac{1}{6}$

۷ـ (۳) $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=3 \Rightarrow 3x_2=3 \Rightarrow x_2=1$ ریشه معادله

$\Rightarrow 1-3+(2m-1)-5=0 \Rightarrow m=4$

۸ـ (۴) $\begin{cases} a, a+d, a+2d, ... \\ a+5, a+d+5, a+2d+5, ... \end{cases} \Rightarrow d'=(a+d+5)-(a+5)=d$

۹ـ (۳) $x+2x+3x+...+13x=546 \Rightarrow x(1+2+3+...+13)=546$

$x(\frac{13\times 14}{2})=546 \Rightarrow x=6 \Rightarrow x+4=10$

۱۰ـ (۲) $327-143=184$ جمله‌ی اول $184 \Rightarrow 184+9=193$

در واقع داریم: $t_{10}=t_1+(n-1)d \Rightarrow t_{10}=184+9(1)=193$

به قسمت روشن چیزها، نگاه کن. «بودا»

فصل ششم

تصاعد هندسی

تصاعد هندسی یک رشته از اعداد حقیقی می‌باشد، که هر جمله‌اش با ضرب شدن عدد ثابتی در جملهٔ ماقبلش به دست می‌آید. این عدد ثابت را که مخالف صفر می‌باشد، قدر نسبت تصاعد می‌گویند و آنرا با q یا r نشان می‌دهند.

$$a\ ,\ aq\ ,\ aq^{2}\ ,\ \dots\ ,\ aq^{9}\ ,\ \dots\ ,\ aq^{n-1}\ ,\ \dots$$

$$\downarrow$$

$$t_1\ ,\ t_2\ ,\ t_3\ ,\ \dots\ t_{10}\ ,\dots\ t_n\ ,\ \dots$$

t_n را جملهٔ عمومی (جملهٔ nام) تصاعد می‌گویند.

در تصاعد هندسی فرمول‌ها و روابط زیر برقرارند.

۱) $q=\frac{t_2}{t_1}=\frac{t_3}{t_2}=\dots=\frac{t_n}{t_{n-1}}$

۲) $t_n=t_1q^{n-1}$ یا $t_n=aq^{n-1}$

مثال: در یک تصاعد هندسی $t_n=3(2^{n-1})$ جمله‌ی ششم تصاعد کدام است؟

$t_6=3(2^5)=96$

تست: در یک تصاعد هندسی $t_{3n+2}=\frac{5}{2^{n+1}}$، جمله‌ی پنجم تصاعد کدام است؟

۱) $\frac{5}{32}$ ۲) $\frac{5}{64}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{5}{2^{14}}$

حل: $n=1\Rightarrow t_5=\frac{5}{4}$

۳) در هر تصاعد هندسی داریم: $\frac{t_m}{t_n}=q^{m-n}$ به عبارت دیگر اگر t_m و t_n معلوم باشند، قدر نسبت تصاعد از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} q=\sqrt[m-n]{\frac{t_m}{t_n}} & \text{(هرگاه (m–n)، فرد باشد)،} \\ q=\pm\sqrt[m-n]{\frac{t_m}{t_n}} & \text{(هرگاه (m–n)، زوج باشد)،} \end{cases}$$

تست: هرگاه جملات سوم و هفتم یک تصاعد هندسی به ترتیب $\frac{1}{4}$ و $\frac{81}{4}$ باشند q کدام عدد است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۲± ۴) ۳±

$q=\pm\sqrt[۴]{\frac{t_۷}{t_۳}}=\pm\sqrt[۴]{۸۱}=\pm ۳$

۴) در هر تصاعد هندسی داریم: $m+n=p+q \Leftrightarrow t_m.t_n=t_p.t_q$

۵) در هر تصاعد هندسی داریم: $m+n=۲k \Rightarrow t_m.t_n={t^۲}_k$

به عبارت دیگر، اگر تعداد جملات یک تصاعد هندسی، عددی فرد باشد، آنگاه مجذور جملهٔ وسطی برابر است با حاصلضرب دو جملهٔ اول و آخر.

۶) شرط اینکه سه عدد a و b و c تشکیل یک تصاعد هندسی بدهند (یعنی سه جملهٔ متوالی یک تصاعد هندسی باشند) آنستکه: $ac=b^۲$ و یا $b=\pm\sqrt{ac}$ در این حالت b را واسطه یا میانگین هندسی دو عدد a و c می‌گویند.

تست: واسطه‌ی هندسی اعداد $\sqrt{۳}$, $\sqrt{\frac{۳}{۴}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

$x^۲=\sqrt{۳}.\frac{\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۷) هرگاه بین دو عدد a و b ، m واسطهٔ حسابی درج کنیم (قرار دهیم) قدر نسبت تصاعد از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} q=\sqrt[m+۱]{\frac{b}{a}} & \text{(اگر (m+۱)، فرد باشد)،} \\ q=\pm\sqrt[m+۱]{\frac{b}{a}} & \text{(اگر (m+۱)، زوج باشد)،} \end{cases}$$

مثال: بین دو عدد ۳ و ۴۸، سه واسطهٔ هندسی درج کرده‌ایم، آنها را بیابید؟ ۳ , □ , □ , □ , ۴۸

$q=\pm\sqrt[۴]{\frac{۴۸}{۳}}=\pm ۲$

$$\begin{cases} q=۲\rightarrow ۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸ \\ q=-۲\rightarrow ۳, -۶, ۱۲, -۲۴, ۴۸ \end{cases}$$

۸) در هر تصاعد هندسی، مجموع n جملهٔ اول از فرمول‌های زیر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} S_n=\frac{a(۱-q^n)}{۱-q} \quad \text{یا} \quad S_n=a(۱+q+q^۲+...+q^{n-۱}) \\ S_n=\frac{a-t_nq}{۱-q} \end{cases} ,(q\neq ۱)$$

۹) در هر تصاعد هندسی داریم: $\frac{S_m}{S_n}=\frac{۱-q^m}{۱-q^n}$ بالاخص اگر در یک تصاعد هندسی S_n و $S_{\frac{n}{۲}}$ معلوم باشند (n زوج) قدر نسبت تصاعد از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود. $\frac{S_n}{S_{\frac{n}{۲}}}=۱+q^{\frac{n}{۲}}$

تست: در یک تصاعد هندسی، مجموع سه جمله‌ی اول ۱۱۲ و مجموع شش جملهٔ اول ۱۲۶ است، قدر نسبت تصاعد برابر است با:

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

$$\frac{S_6}{S_3}=\frac{1-q^6}{1-q^3}=1+q^3\Rightarrow q^3=\frac{1}{8}\Rightarrow q=\frac{1}{2}$$

۱۰) در تصاعد هندسی هرگاه $q=1$ باشد، آنگاه $S_n=na$

۱۱) اگر $|q|<1$ و تعداد جملات تصاعد، نامتناهی باشد، حد مجموع جملات از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$S_\infty=S=\frac{a}{1-q}$$

تست: حاصل تقریبی $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ برابر است با:

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{8}{7}$

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

تست: جملهٔ عمومی یک تصاعد هندسی $t_n=6(-\frac{1}{3})^n$ می‌باشد، حد مجموع جملات آن کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

$$\begin{cases}n=1\to t_1=-2\\ n=2\to t_2=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow q=\frac{-1}{3}\Rightarrow s=\frac{a}{1-q}=\frac{-2}{1+\frac{1}{3}}=\frac{-3}{2}$$

۱۲) اگر $|q|<1$ و تعداد جملات تصاعد نامتناهی باشد، حد مجموع مربعات جملات از رابطه‌ی $S=\frac{a^2}{1-q^2}$ محاسبه می‌شود.

دلیل $\to a^2+a^2q^2+a^2q^4+\dots=a^2(1+q^2+q^4+\dots)=a^2(\frac{1}{1-q^2})=\frac{a^2}{1-q^2}$

کسر اعشاری متناوب ساده: به کسرهائی به صورت $0/\overline{5}$, $0/\overline{72}$, $0/\overline{091}$ و نظایر آنها که فقط دورهٔ گردش دارند کسر اعشاری متناوب ساده می‌گویند.

کسر اعشاری متناوب مرکب: به کسرهائی به صورت $0/2\overline{7}$، $0/\overline{4}\overline{58}$ و نظایر آنها، که هم دوره‌ی گردش داشته و هم دوره‌ی غیرگردش، کسر اعشاری متناوب مرّکب می‌گویند.

کسر متعارفی مولّد یک کسر اعشاری متناوب ساده یا مرکب: می‌دانیم هرگاه در کسر $\frac{2}{3}$، صورت را بر مخرج تقسیم کنیم خواهیم داشت $0/\overline{6}=\dots 0/666=\frac{2}{3}$، کسر متعارفی $\frac{2}{3}$ را کسر مولّد (تولید کننده‌ی) کسر اعشاری متناوب ساده‌ی $0/\overline{6}$ می‌گویند. بهمین ترتیب هرگاه در کسر $\frac{5}{6}$، صورت را بر مخرج تقسیم کنیم خواهیم داشت، $\frac{5}{6}=0/8333000=0/8\overline{3}$، کسر متعارفی $\frac{5}{6}$ را کسر مولّد کسر اعشاری متناوب مرکّب $0/8\overline{3}$ می‌گویند.

نکته‌ی مهم در تبدیل یک کسر متعارفی به کسر اعشاری:

۱) هرگاه در مخرج کسر متعارفی داده شده، فقط عاملهای ۲ یا ۵ وجود داشته باشد، کسر اعشاری حاصل کسری غیر متناوب خواهد بود.

مثال: $\frac{7}{20}=\frac{7}{2^2\times5}=0/35$, $\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}=0/25$

۲) هرگاه در مخرج کسر متعارفی داده شده، فقط عاملهای غیر ۲ و ۵ وجود داشته باشد، کسر اعشاری حاصل، کسری متناوب ساده خواهد بود.

مثال: $\frac{۲}{۳}=۰/\overline{۶}$ ، $\frac{۵}{۱۱}=۰/\overline{۴۵}$ ، $\frac{۱۹}{۶۳}=\frac{۱۹}{۳^۲\times ۷}=۰/\overline{۳۰۱۵۸۷}$

۳) هرگاه در مخرج کسر متعارفی داده شده، هم عاملهای ۲ یا ۵ و هم عاملهای غیر ۲ یا ۵ وجود داشته باشد، کسر اعشاری حاصل، کسری متناوب مرکّب خواهد بود.

مثال: $\frac{۷}{۲۲}=\frac{۷}{۲\times ۱۱}=۰/۳\overline{۱۸}$ ، $\frac{۱۷}{۶۰}=\frac{۱۷}{۲^۲\times ۳\times ۵}=۰/۲۸\overline{۳}$

تست: کسر اعشاری حاصل از تبدیل کدام کسر متعارفی زیر، کسر اعشاری متناوب مرکب خواهد شد؟

۱) $\frac{۷}{۴۰}$ ۲) $\frac{۵}{۷۷}$ ۳) $\frac{۱۹}{۱۲۵}$ ۴) $\frac{۴۱}{۷۰}$

طبق نکته‌ی ۳ فوق گزینه‌ی ۴ صحیح است.

۱۳) در تبدیل کسر اعشاری متناوب ساده به کسر متعارفی، کسر متعارفی مولد را می‌توان از فرمول ساده‌ی زیر به دست آورد.

$$\text{کسر مولّد کسر اعشاری متناوب ساده}=\frac{\text{ارقام گردش}}{\text{به تعداد ارقام گردش ۹ می‌گذاریم}}$$

مثال: $۰/\overline{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$ ، $۰/\overline{۴۵}=\frac{۴۵}{۹۹}=\frac{۵}{۱۱}$

تذکر: البته به روشهای دیگری از جمله استفاده از فرمول حد مجموع تصاعد هندسی، نیز می‌توان کسر متعارفی مولّد کسر اعشاری متناوب ساده را به دست آورد.

مثال: $۰/\overline{۶}=۰/۶۶۶۶۰۰۰=۰/۶+۰/۰۶+۰/۰۰۶+...$

$$=\frac{۶}{۱۰}+\frac{۶}{۱۰۰}+\frac{۶}{۱۰۰۰}+...=\frac{a}{۱-q}$$

$$=\frac{\frac{۶}{۱۰}}{۱-\frac{۱}{۱۰}}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$$

۱۴) در تبدیل کسر اعشاری متناوب مرکب به کسر متعارفی، کسر متعارفی مولّد را می‌توان از فرمول ساده‌ی زیر، به دست آورد.

$$\text{کسر مولّد کسر اعشاری متناوب مرکّب}=\frac{\text{ارقام غیرگردش - ارقام گردش و غیرگردش}}{\text{به تعداد ارقام گردش ۹ می‌گذاریم و سپس جلوی آنها به تعداد ارقام غیرگردش ۰ می‌گذاریم}}$$

مثال: $۰/۳\overline{۱۸}=\frac{۳۱۸-۳}{۹۹۰}=\frac{۳۱۵}{۹۹۰}=\frac{۷}{۲۲}$ ، $۰/۲۸\overline{۳}=\frac{۲۸۳-۲۸}{۹۰۰}=\frac{۱۷}{۶۰}$

تذکر: تبدیل فوق را می‌توان به روشهای دیگری، از جمله با استفاده از فرمول حد مجموع تصاعد هندسی انجام داد.

مثال: $۰/۲۸\overline{۳}=۰/۲۸+۰/۰۰\overline{۳}=۰/۲۸+۰/۰۰۳+۰/۰۰۰۳+۰/۰۰۰۰۳+...$

$$=۰/۲۸+\frac{۳}{۱۰۰۰}+\frac{۳}{۱۰۰۰۰}+...$$

$$=۰/۲۸+\frac{\frac{۳}{۱۰۰۰}}{۱-\frac{۱}{۱۰}}=\frac{۲۸}{۱۰۰}+\frac{۱}{۳۰۰}=\frac{۸۵}{۳۰۰}=\frac{۱۷}{۶۰}$$

تست: کسر متعارفی مولّد کسر اعشاری $۱/۳\overline{۷۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۴۱}{۱۰۰}$ ۲) $\frac{۴۳}{۳۳}$ ۳) $\frac{۱۵۱}{۱۱۰}$ ۴) $\frac{۱۳۷۲}{۱۰۰۰}$

حل: $۱/۳\overline{۷۲} = ۱ + \frac{۳۷۲ - ۳}{۹۹۰} = ۱ + \frac{۴۱}{۱۱۰} = \frac{۱۵۱}{۱۱۰}$

۱۵) در تصاعد هندسی، مانند تصاعد حسابی، t_n از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است. $t_n = S_n - S_{n-۱}$

۱۶) حاصلضرب n جمله‌ی اول هر تصاعد هندسی، از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود. $t_۱ t_۲ t_۳ \dots t_n = \sqrt{(t_۱ t_n)^n}$

تست: جملهٔ چهارم یک تصاعد هندسی ۱۶ می‌باشد، حاصلضرب هفت جمله‌ی اول آن کدام است؟

۱) $۲^۷$ ۲) $۲^{۱۴}$ ۳) $۲^{۲۱}$ ۴) $۲^{۲۸}$

$t_۱ t_۲ \dots t_۷ = \sqrt{(t_۱ t_۷)^۷} = \sqrt{((t_۴)^۲)^۷} = \sqrt{۲^{۵۶}} = ۲^{۲۸}$

۱۷) در هر تصاعد هندسی با تعداد جملات زوج و متناهی، قدر نسبت از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است.

$q = \frac{t_۲ + t_۴ + t_۶ + \dots}{t_۱ + t_۳ + t_۵ + \dots}$

۱۸) در هر تصاعد هندسی نامتناهی با قدر نسبت q، $(|q| < ۱)$ نسبت هر جمله به حد مجموع جملات بعد از آن مقداری ثابت و برابر $\frac{۱-q}{q}$ خواهد بود، زیرا:

$t_n = aq^{n-۱} \Rightarrow S = aq^n + aq^{n-۱} + aq^{n-۲} + \dots = \frac{aq^n}{۱-q} \Rightarrow \frac{t_n}{s} = \frac{۱-q}{q}$

به عبارت دیگر $t_n = \frac{۱-q}{q} s$ یعنی هر جمله، $\frac{۱-q}{q}$ برابر حد مجموع جملات پس از خودش خواهد بود.

۱۹) هرگاه اضلاع مثلث قائم الزاویه‌ای تشکیل تصاعد هندسی دهند، قدر نسبت تصاعد برابر با $\sqrt{\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}}$ خواهد بود.

۲۰) در تصاعد هندسی:

الف) ۱) اگر $a > ۰$ و $r > ۱$ باشد، تصاعد، صعودی خواهد بود.
۲) اگر $a > ۰$ و $۰ < r < ۱$ باشد، تصاعد، نزولی خواهد بود.

ب) اگر $a < ۰$ و $r > ۱$ باشد، تصاعد، نزولی خواهد بود.
اگر $a < ۰$ و $۰ < r < ۱$ باشد، تصاعد، صعودی خواهد بود.

۲۱) هرگاه حاصلضرب یک تعداد فرد از جملات متوالی یک تصاعد هندسی (مثلاً حاصلضرب سه جمله متوالی یا حاصلضرب پنج جمله متوالی) معلوم باشند و قدر نسبت ،جمله‌ی اول، جمله‌ی وسط و ... از تصاعد را بخواهند بهتر است این جملات را به صورت:

$\frac{a}{q}, a, aq$ (سه جمله‌ی متوالی)، $(q \neq ۰)$

$\frac{a}{q^۲}, \frac{a}{q}, a, aq, aq^۲$ (پنج جمله‌ی متوالی)، $(q \neq ۰)$

در نظر بگیریم.

تست: حاصلضرب پنج عدد که تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند ۲۴۳ است، جمله‌ی وسط این تصاعد برابر است با:

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۱

$\frac{a}{q^۲} \times \frac{a}{q} \times a \times aq \times aq^۲ = ۲۴۳ \Rightarrow a^۵ = ۳^۵ \Rightarrow a = ۳$

تست ۱:

۱ـ در یک تصاعد هندسی نزولی، مجموع سه جمله‌ی اول، ۵ برابر جمله‌ی دوم است، قدر نسبت آن کدام است؟ (جملهٔ اول تصاعد مثبت است)

۱) $۳-\sqrt{۲}$ ۲) $۲-\sqrt{۳}$ ۳) $۲+\sqrt{۳}$ ۴) $۳+\sqrt{۲}$

۲ـ a و b و c تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند، در این صورت حاصل $A = b^۴ + b^۲(a+c-ac) - ac(a+c)$ برابر است با:

۱) a ۲) b ۳) c ۴) ۰

۳ـ هرگاه سه عدد ۸^z و ۴^y و ۲^x تشکیل تصاعد هندسی بدهند، چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار خواهد بود؟

۱) $x = y = z$ ۲) $۲y = x + z$ ۳) $۴y = x + ۳z$ ۴) $y^۲ = xz$

۴ـ واسطه‌ی هندسی بین دو عدد $۷^۲ \times ۵ \times ۲^۳$ و $۱۱^۲ \times ۵^۳ \times ۲$ کدام است؟

۱) ± ۶۶۰۰ ۲) ± ۷۷۰۰ ۳) ± ۵۶۰۰ ۴) ± ۷۶۰۰

۵ـ x چند باشد، تا سه عبارت $(۱ + ۲x)$، $(۵x)$ و $(۴ - ۱۲x)$ به ترتیب سه جملهٔ متوالی یک تصاعد هندسی باشند؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۲

۶ـ بین اعداد ۵ و ۸۰، تعداد ۷ واسطه‌ی هندسی درج شده است، جملهٔ چهارم این واسطه‌ها چقدر است؟

۱) $۱۰\sqrt{۲}$ ۲) ۲۰ ۳) $۲۰\sqrt{۲}$ ۴) $\pm ۱۰\sqrt{۲}$

۷ـ در یک تصاعد هندسی، جملات پنجم و هشتم به ترتیب ۴۸ و ۳۸۴ می‌باشند، مجموع هفت جمله‌ی اول این تصاعد برابر است با:

۱) ۲۸۴ ۲) ۲۷۴ ۳) ۳۵۱ ۴) ۳۸۱

۸ـ اگر $n \in N$ و حد مجموع $... + ۵^{n-۱} + ۵^n$ برابر $\frac{۱۲۵}{۴}$ باشد، n کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹ـ هرگاه a و b و c تشکیل تصاعد هندسی بدهند، بین ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲ + ۲bx + c = ۰$، کدام رابطه‌ی زیر برقرار است؟

۱) $x' > ۰ > x''$ ۲) $x' > x'' > ۰$ ۳) $x' - x'' > ۰$ ۴) $x' - x'' = ۰$

۱۰ـ کدام یک از کسرهای زیر مولّد $۰/۰۱\overline{۳۶}$ می‌باشد؟

۱) $\frac{۱۳۵}{۹۹۰۰}$ ۲) $\frac{۱۳۵}{۹۰۹۰}$ ۳) $\frac{۱۳۵}{۹۹۰}$ ۴) $\frac{۴۷}{۱۹۸۰}$

۱ـ (۲) $a+aq+aq^{۲}=۵aq \Rightarrow aq^{۲}-۴aq+a=۰$

$\Rightarrow q^{۲}-۴q+۱=۰ \Rightarrow q=۲\pm\sqrt{۳} \Rightarrow q=۲-\sqrt{۳}$ نزولی

۲ـ (۴) $b^{۲}=ac \Rightarrow A=(ac)^{۲}+ac(a+c-ac)-ac(a+c)$

$=(ac)^{۲}+ac(a+c)-(ac)^{۲}-ac(a+c)=۰$

۳ـ (۳) $۲^{x}.۸^{z}=(۴^{y})^{۲} \Rightarrow ۲^{x+۳z}=۲^{۴y} \Rightarrow ۴y=x+۳z$

۴ـ (۲) $x^{۲}=ab \Rightarrow x^{۲}=(۲^{۳}\times۵\times۷^{۲})(۲\times۵^{۳}\times۱۱^{۲})=۲^{۴}\times۵^{۴}\times۷^{۲}\times۱۱^{۲}$

$x=\pm\sqrt{۲^{۴}\times۵^{۴}\times۷^{۲}\times۱۱^{۲}}=\pm۷\times۱۱\times۵^{۲}\times۲^{۲}=\pm۷۷۰۰$

۵ـ (۴) $(۱۲x-۴)(۲x+۱)=(۵x)^{۲} \Rightarrow (x-۲)^{۲}=۰ \Rightarrow x=۲$

۶ـ (۲) $q=\pm\sqrt[۸]{\frac{b}{a}}=\pm\sqrt[۸]{\frac{۸۰}{۵}}=\pm\sqrt{۲}$

$t_{۵}=aq^{۴}=۵(\pm\sqrt{۲})^{۴}=۲۰$

۷ـ (۴) $\frac{t_{۸}}{t_{۵}}=q^{۳}=\frac{۳۸۴}{۴۸}=۸ \Rightarrow q=۲ \Rightarrow aq^{۴}=۴۸$

$\Rightarrow ۱۶a=۴۸ \Rightarrow a=۳ \Rightarrow S_{۷}=\frac{a(۱-q^{۷})}{۱-q}=\frac{۳(۱-۱۲۸)}{۱-۲}=۳۸۱$

۸ـ (۲) $S=\frac{a}{۱-q} \Rightarrow \frac{۱۲۵}{۴}=\frac{۵^{n}}{۱-\frac{۱}{۵}} \Rightarrow ۵^{n+۱}=۵^{۳} \Rightarrow n=۲$

۹ـ (۴) راه حل اوّل: $ac=b^{۲} \Rightarrow b^{۲}-ac=۰ \Rightarrow \Delta'=۰ \Rightarrow x'=x'' \Rightarrow x'-x''=۰$

$a,aq,aq^{۲} \Rightarrow ax^{۲}+۲aqx+aq^{۲}=۰ \overset{a\neq۰}{\Rightarrow} x^{۲}+۲qx+q^{۲}=۰$

راه حل دوّم: $\Delta'=q^{۲}-q^{۲}=۰ \Rightarrow x'=x'' \Rightarrow x'-x''=۰$

۱۰ـ (۱) $\frac{۱۳۶-۱}{۹۹۰۰}=\frac{۱۳۵}{۹۹۰۰}$

اگر از شدت خوشحالی گریه می‌کنی، هرگز درصدد پاک کردن اشکهای خود مباش. «ژان پُل توله»

تمام انسانها بالطبیعه مایل به دانستن هستند. «ارسطو»

تست ۲:

۱ـ حد مجموع جملات یک تصاعد هندسی نزولی برابر $\frac{۳}{۴}$ می‌باشد و می‌دانیم جـملهٔ اول آن ۱ است، حـد مـجموع مربعات جملات برابر است با:

۱) $\frac{۷}{۸}$ ۲) $\frac{۹}{۸}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱۳}{۸}$

۲ـ جمعیت یک روستا ۱۰۰۰ نفر است، اگر جمعیت این روستا، هر سال به اندازهٔ $\frac{۱}{۱۰}$ جمعیت سال قبل کاهش یابد، پس از ۴ سال چند نفر در این روستا زندگی می‌کنند؟

۱) ۷۲۹ ۲) ۷۴۹ ۳) ۶۲۹ ۴) ۶۴۹

۳ـ اگر a و b و c سه جملهٔ متوالی از یک تصاعد هندسی باشند، حاصل $p = a^۲b^۲c^۲ (a^{-۳} + b^{-۳} + c^{-۳})$ برابر است با:

۱) $a^۲ + b^۲ + c^۲$ ۲) $a + b + c$ ۳) $a^۳ + b^۳ + c^۳$ ۴) $a^{-۳} + b^{-۳} + c^{-۳}$

۴ـ اگر $a^{\log x}$, $a^{\log y}$, $a^{\log z}$ سه جملهٔ متوالی یک تصاعد هندسی باشند، آنگاه داریم:

۱) $z^۳ = xy$ ۲) $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{z} = \frac{۱}{y}$ ۳) $xz = y^۲$ ۴) $x + z = ۲y$

۵ـ به ازاء چه مقداری از m، ریشه‌های معادلهٔ $x^۳ + mx^۲ + x - ۸ = ۰$ تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۶ـ مجموع لگاریتمهای اعشاری (دهدهی) سه جملهٔ اول متوالی یک تصاعد هندسی ۹ است، جملهٔ دوم برابر است با:

۱) ۱۰۰۰ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۰ ۴) ۱

۷ـ در یک تصاعد هندسی، حاصلضرب جملات سوم و ششم و دهم و سیزدهم برابر ۴۹ است، جملهٔ هشتم تصاعد چقدر است؟

۱) ± ۳ ۲) $\pm\sqrt{۸}$ ۳) $\pm\sqrt{۷}$ ۴) $\pm\sqrt{۱۰}$

۸ـ مجموع ۸ جملهٔ اول یک تصاعد هندسی برابر ۵۱۰ و مجموع ۴ جملهٔ اول آن برای ۳۰ است، قدر نسبت تصاعد کدام است؟

۱) ۸ ۲) ± ۲ ۳) ± ۴ ۴) ± ۳

۹ـ در یک تصاعد هندسی چهار جمله‌ای، مجموع دو جملهٔ اول ۲۰ و مجموع جملات دوم و سوم ۳۰ می‌باشد مجموع چهار جملهٔ اول چقدر است؟

۱) ۵۵ ۲) ۶۰ ۳) ۶۵ ۴) ۷۵

۱۰ـ مربعی به ضلع ۴a مفروض است، اوساط اضلاع مربع را به هم وصل کرده تا مربع جدیدی حاصل شـود، مـجدداً اوساط مربع جدید را به هم وصل می‌کنیم تا مربع دیگری بوجود آید هرگاه این عمل، بی‌شمار بار انجام شود، در این صورت حد مجموع مساحتهای مربعهای حاصل برابر است با:

۱) $۱۶a^۲$ ۲) $۳۲a^۲$ ۳) $۸a^۲$ ۴) هیچکدام

۱ـ (۲) $s=\frac{a}{1-q}\Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{1}{1-q}\Rightarrow q=\frac{-1}{3}$

$a^2+a^2q^2+a^2q^4+\ldots=a^2(1+q^2+q^4+\ldots)\Rightarrow S'=a^2(\frac{1}{1-q^2})$

$\Rightarrow S'=\frac{a^2}{1-q^2}=\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{9}{8}$

۲ـ (۱) ۱۰۰۰ و ۹۰۰ و ۸۱۰ و ۷۲۹ و ...



در واقع داریم: $729=(-\frac{1}{10})810+810$ و $810=(-\frac{1}{10})900+900$ و $900=(-\frac{1}{10})1000+1000$ و ۱۰۰۰

۳ـ (۳) $b^2=ac\Rightarrow p=(ac)^3b^3(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3})=b^6(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3})$

$=b^6(\frac{a^3+c^3}{a^3.c^3})+b^3=b^6(\frac{a^3+c^3}{b^6})+b^3=a^3+b^3+c^3$

۴ـ (۳) $a^{\log x}\times a^{\log z}=(a^{\log y})^2\Rightarrow a^{\log x+\log z}=a^{2\log y}\Rightarrow \log xz=\log y^2\Rightarrow y^2=xz$

۵ـ (۴) $x_1x_3=x_2^2$

$x_1x_2x_3=\frac{d}{a}=-8\Rightarrow x_2^3=-8\Rightarrow x_2=-2\Rightarrow 8+4m-2-8=0\Rightarrow m=\frac{1}{2}$

۶ـ (۱) $a\ ,\ aq\ ,\ aq^2 \Rightarrow \log a+\log aq+\log aq^2=9$

جملهٔ دوم

$\log a^3q^3=9\Rightarrow a^3q^3=10^9\Rightarrow aq=10^3=1000$

۷ـ (۳) $\begin{cases}t_3t_6t_{10}t_{13}=49\\ t_3t_{13}=t_8^2\\ t_6t_{10}=t_8^2\end{cases}\Rightarrow t_8^4=49\Rightarrow t_8=\pm\sqrt[4]{49}\Rightarrow t_8=\pm\sqrt{7}$

۸ـ (۲) $\frac{s_m}{s_n}=\frac{1-q^m}{1-q^n}=\frac{1-q^8}{1-q^4}=1+q^4\Rightarrow 1+q^4=\frac{510}{30}=17\Rightarrow q^4=16\Rightarrow q=\pm 2$

۹ـ (۳)

$\begin{cases}a+aq=20\\ aq+aq^2=30\end{cases}\Rightarrow \frac{a(1+q)}{aq(1+q)}=\frac{20}{30}\Rightarrow \frac{1}{q}=\frac{2}{3}\Rightarrow q=\frac{3}{2}$

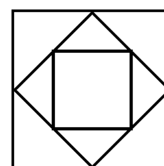
$a(1+q)=20\Rightarrow \frac{5}{2}a=20\Rightarrow a=8$

$a+aq+aq^2+aq^3=a(1+q+q^2+q^3)=8(1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8})=65$

۱۰ـ (۲) واضح است که مساحت مربع دوم، نصف مساحت مربع اول و مساحت مربع سوم نصف مساحت مربع دوم و ... است.

حد مجموع $=s+\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}s+\ldots=\frac{a}{1-q}=\frac{s}{1-\frac{1}{2}}=2s$

حد مجموع $=2(4a^2)=32a^2$



تست ۳:

۱ـ اگر $a - 1$ و b و $c + 1$، سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد هندسی باشند، حاصل $T = (a+b+c)(a-b+c)$ برابر است با:

۱) $(a-1)^2+b^2+(c+1)^2$ ۲) $(a-1)^2-b^2+(c+1)^2$ ۳) $-(a-1)^2+b^2+(c+1)^2$ ۴) $-(a-1)^2+b^2-(c+1)^2$

۲ـ مجموع چند جمله از یک تصاعد هندسی که جمله‌ی عمومی آن $t_n = 3^{n-1}$ است، برابر ۳۶۴ می‌شود؟

۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۸

۳ـ سه عدد تشکیل تصاعد هندسی داده‌اند، مجموع آنها مساوی ۲۱ و مجموع معکوسات آنها مساوی $\frac{7}{12}$ است، عدد وسط کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۷

۴ـ حاکم سرزمین هند، از مخترع بازی شطرنج خواست که هدیه‌ای از او بخواهد، مخترع خواهش کرد که برای او در خانه‌ی اول شطرنج، یک دانه‌ی گندم قرار دهند، در خانه‌ی دوم، دو دانه‌ی گندم، در خانه‌ی سوم چهار دانه گندم و به همین ترتیب در هر خانه‌ی صفحه شطرنج ۲ برابر خانه‌ی قبل، تعداد گندمهائی که مخترع شطرنج طلب کرده است چقدر است؟

۱) 2^{64} ۲) 2^{63} ۳) $2^{64}-1$ ۴) $2^{63}-1$

۵ـ حد مجموع جملات تصاعد هندسی نامحدود ... و $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ و $\frac{1}{2+\sqrt{2}}$ و $\frac{1}{2}$ برابر است با:

۱) $4-\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}+1$ ۳) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ ۴) $4+3\sqrt{2}$

۶ـ در یک تصاعد هندسی نزولی و نامحدود، هر جمله، ۵ برابر مجموع تمام جملات بعد از خودش است، قدر نسبت تصاعد کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) ۴ ۴) ۶

۷ـ فرض می‌کنیم سه عدد مثبت $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{b}$ و $\frac{1}{c}$ به ترتیب، سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد هندسی باشند، در مورد loga و logb و logc چه حکمی می‌توان کرد؟

۱) سه جملهٔ متوالی یک تصاعد حسابی هستند. ۲) سه جمله‌ی متوالی یک تصاعد هندسی هستند.

۳) loga واسطهٔ حسابی بین logb و logc است. ۴) loga واسطه‌ی هندسی بین logb و logc است.

۸ـ حاصل تقریبی عبارت $p = \frac{27-9+3-1+\dots}{48+36+27+\dots}$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{256}$ ۲) $\frac{81}{256}$ ۳) $\frac{27}{256}$ ۴) $\frac{81}{512}$

۹ـ هرگاه ۳، y، x و ۳، x، y به ترتیب جملات متوالی یک تصاعد هندسی و یک تصاعد حسابی باشند، $x + y$ کدام است؟

۱) ۴ یا $\frac{3}{2}$ ۲) ۸ یا $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) ۶ یا $-\frac{3}{4}$

۱۰ـ مجموع سه عدد که تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند برابر ۶۲ و مجموع لگاریتمهای اعشاری آنها برابر ۳ است عدد وسطی کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۵

۱ـ (۱)
$(a-1)(c+1)=b^2$

$T=(a+b+c)(a+c-b)=(a+c)^2-b^2$

$T=(a-1+c+1)^2-b^2=(a-1)^2+2(a-1)(c+1)+(c+1)^2-b^2$

$=(a-1)^2+2b^2+(c+1)^2-b^2$

$=(a-1)^2+b^2+(c+1)^2$

۲ـ (۳)
$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}\Rightarrow 364=\frac{1(1-3^n)}{1-3}\Rightarrow 3^n=729\Rightarrow n=6$

۳ـ (۱)
$$\begin{cases}\frac{a}{q}+a+aq=21\\ \frac{q}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{aq}=\frac{7}{12}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a(\frac{1}{q}+1+q)=21\\ \frac{1}{a}(q+1+\frac{1}{q})=\frac{7}{12}\end{cases}$$

حال دو رابطه را به یکدیگر تقسیم می‌کنیم در این صورت داریم:
$\Rightarrow a^2=36$

$\Rightarrow a=\pm 6$

۴ـ (۳)
$1+2^1+2^2+2^3+\dots+2^{63}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{1(1-2^{64})}{1-2}=2^{64}-1$

این عدد برابر ۱۸,۴۴۶,۷۴۴,۰۷۳,۷۰۹,۵۵۱,۶۱۵ دانه‌ی گندم می‌باشد.

۵ـ (۳)
$q=t_2\div t_1=\frac{1}{2+\sqrt{2}}\div\frac{1}{2}=2-\sqrt{2}$

$S=\frac{a}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-(2-\sqrt{2})}=\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

۶ـ (۱) ***یادآوری:*** می‌دانیم در هر تصاعد هندسی نامتناهی با $|q|<1$ هر جمله، $\frac{1-q}{q}$ برابر حد مجموع جملات بعد از خودش است.
$T_n=\frac{1-q}{q}S\Rightarrow\frac{1-q}{q}=5\Rightarrow q=\frac{1}{6}$

۷ـ (۱)
$(\frac{1}{a})(\frac{1}{c})=(\frac{1}{b})^2\Rightarrow b^2=ac$

$\log b^2=\log ac\Rightarrow 2\log b=\log a+\log c$

۸ـ (۳)
$27-9+3-1+\dots=\frac{a}{1-q}=\frac{27}{1+\frac{1}{3}}=\frac{81}{4}$

$48+36+27+\dots=\frac{a}{1-q}=\frac{48}{1-\frac{3}{4}}=192$

$p=\frac{\frac{۸۱}{۴}}{۱۹۲}=\frac{۲۷}{۲۵۶}$

۹ـ (۴)

$\begin{cases}۳x=y^۲\\ ۳+y=۲x\Rightarrow y=۲x-۳\end{cases}\Rightarrow ۳x=(۲x-۳)^۲$

$\Rightarrow\begin{cases}x=۳\\ x=\frac{۳}{۴}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=۳\\ y=-\frac{۳}{۲}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=۶\\ x+y=-\frac{۳}{۴}\end{cases}$

۱۰ـ (۲)

$\begin{cases}a+aq+aq^۲=۶۲\\ \log a+\log aq+\log aq^۲=۳\Rightarrow \log(aq)^۳=۳\end{cases}$

$\Rightarrow (aq)^۳=۱۰۰۰ \Rightarrow aq=۱۰$

انسان همانند رودخانه است، هرچه عمیق‌تر باشد، آرام‌تر است. «منتسکیو»

هرکه مدرسه‌ای ساخت، زندانی را خراب کرد. «ویکتورهوگو»

مردم از فکر کردن بیش از همه چیز رنج می‌برند. «تولستوی»

مردم خودشان را با هر چیزی خسته می‌کنند، مگر با تفکر و اندیشه. «نیچه»

مبین که می‌گوید، ببین چه می‌گوید. «سعدی»

فصل هفتم

لگاریتم

کاشف لگاریتم، یک ریاضی‌دان اسکاتلندی به نام جان نپر بود که در سال ۱۶۱۴ میلادی، کتابی به زبان لاتین تحت عنوان «شرح جدول شگفت‌انگیز لگاریتمها» منتشر کرد و بعدها جدول این کتاب به جدول لگاریتم معروف شد. وی برای محاسبات این کتاب حدود ۲۰ سال زحمت کشیده بود. مبنائی که نپر برای لگاریتم انتخاب کرده بود عدد نپر یعنی عدد e است که مقدار آن از سری $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$ بدست می‌آید و مقدار تقریبی این عدد اصّم برابر ۲/۷۱۸ است و به همین دلیل است که لگاریتم ابداعی یا اختراعی نپر را لگاریتم نپری یا نپرین و یا طبیعی می‌گویند و آن را به صورت Ln یا $\log_e$ نمایش می‌دهند، یک سال پس از انتشار کتاب نپر یک معلم ریاضی در انگلستان به نام هنری بریگز دست از کار خود کشید و به اسکاتلند نزد نپر رفت و ضمن قدردانی از وی، از او درخواست کرد که جدول لگاریتمی بر مبنای ۱۰ بنویسد. نپر از این پیشنهاد خوشحال شد، اما اجل به وی مهلت انجام این مهم را نداد و بریگز کار نیمه تمام نپر را کامل کرد و در سال ۱۶۲۴ میلادی جدول لگاریتمی دهگانی را به پایان رساند و منتشر کرد. این جدول بعدها به وسیلهٔ دیگران تکمیل شد.

تعریف لگاریتم:

فرض می‌کنیم a عددی حقیقی، مثبت و مخالف ۱ باشد اگر داشته باشیم $a^x = y$، در این صورت طبق تعریف می‌گوئیم لگاریتم y در پایهٔ a (در مبنای a) مساوی x است و می‌نویسیم: $\log_a^y = x$

لذا: $a^x = y \Leftrightarrow \log_a^y = x$

عدد a را پایه یا مبنای لگاریتم، عدد x را مقدار لگاریتم y در پایهٔ a و عدد y را آنتی لگاریتم (یا عدد ما به ازاء) x با پایهٔ a می‌گویند و می‌نویسند: $\text{antilog}\,_a^x = y$

چون a عدد مثبت است و عدد مثبت به هر توانی که برسد (مثبت، صفر، منفی) مثبت است، لذا a^x و در نتیجه y همواره مثبت است و در واقع به همین علت است که می‌گوئیم لگاریتم اعداد منفی و صفر، تعریف نشده‌اند.

به مثالهای زیر توجه کنید:

۱) $\log_2^{16} = 4$

۲) $\log_4^{16} = 2$

۳) $\log_{10}^{1000000} = 6$

۴) $\log_{\sqrt[3]{7}}^{7} = 3$

۵) $\log_{\sqrt{5}}^{25} = 4$

۶) $\log_{18}^{18} = 1$

۷) $\log_{10}^{1} = 0$

۸) $\log_4^{17} = 2/$ خورده‌ای

۹) $\log_{\frac{1}{3}}^{9} = -2$

تست: حاصل $\log_{\sqrt[3]{3}}^{3\sqrt[4]{9}}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{9}{2}$ ۴) $\frac{7}{2}$

حل: فرض می‌کنیم: $\log_{\sqrt[3]{3}}^{3\sqrt[4]{9}} = x$

$$\Rightarrow (\sqrt[3]{3})^x = 3\sqrt[4]{9} \Rightarrow (3^{\frac{1}{3}})^x = 3\times 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{\frac{x}{3}} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

تست: از تساوی $\log_{2\sqrt{2}}^{x} = \frac{2}{3}$ مقدار x برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) $\frac{1}{2}$

حل: $\log_{2\sqrt{2}}^{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow (2\sqrt{2})^{\frac{2}{3}} = x \Rightarrow (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = x \Rightarrow x = 2$

تست: از تساوی $\log_a^{(\sqrt{5}-2)} = -1$ مقدار a کدام است؟

۱) $\sqrt{5}-2$ ۲) $\sqrt{5}+2$ ۳) $2\sqrt{5}+1$ ۴) $2\sqrt{5}-1$

حل: $\log_a^{(\sqrt{5}-2)} = -1 \Rightarrow \sqrt{5}-2 = a^{-1} \Rightarrow \frac{1}{a} = \sqrt{5}-2$

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}-2} \times \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2} \Rightarrow a = \sqrt{5}+2$$

فرمولها، ویژگیها و قواعد لگاریتم

۱ـ لگاریتم صفر تعریف نشده است. مثال: $\log_5^0 =$ تعریف نشده

۲ـ لگاریتم اعداد منفی تعریف نشده است. مثال: $\log_3^{-27} =$ تعریف نشده

۳ـ پایهٔ لگاریتم، منفی، صفر و یک نمی‌تواند باشد.

مثال:

$\log_1^{16} =$ تعریف نشده

$\log_{-2}^{8} =$ تعریف نشده

$\log_0^{7} =$ تعریف نشده

۴ـ چون $a^0 = 1$، لذا لگاریتم عدد ۱ در هر پایه‌ای، صفر است یعنی: $\log_a^1 = 0$

۵ـ چون $a^1 = a$، لذا لگاریتم هر عدد مثبت در پایهٔ خودش، همیشه برابر ۱ است.

۶ـ هرگاه پایهٔ لگاریتم ۱۰ باشد، معمولاً آن را نمی‌نویسند، لذا لگاریتمی که پایه‌اش نوشته نشده باشد، پایه‌اش ۱۰ است این لگاریتم را لگاریتم دهدهی یا اعشاری می‌گویند.

مثال: $\log^{1000} = 3$ و $\log^{0/01} = -2$

۷ـ هرگاه پایهٔ لگاریتم عدد e باشد، آن را با Lnx نیز نمایش می‌دهند لذا: $\log_e^x = \text{Lnx}$، این لگاریتم را لگاریتم طبیعی یا نپری یا نپرین می‌گویند.

۸ـ هرگاه دو عدد مثبت مساوی باشند، لگاریتمهای آنها در یک پایه، با یکدیگر مساویند یعنی:

$x = y \Rightarrow \log_a^x = \log_a^y$

این بدان معنا است که $y = f(x) = \log_a^x$ یک تابع است.

۹ـ هرگاه لگاریتمهای دو عدد در یک پایه، مساوی باشند، خود آن دو عدد نیز با یکدیگر مساویند یعنی:

$\log_a^x = \log_a^y \Rightarrow x = y$

این بدان معناست که تابع $y = f(x) = \log_a^x$ یک تابع یک به یک است.

۱۰ـ دامنهٔ تابع $y = f(x) = \log_a^x$ ($a > ۰$ و مخالف ۱)، $(۰ , \infty)$ است.

۱۱ـ دامنهٔ تابع $y = f(x) = \log_B^A$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$\begin{cases} A > ۰ \\ B > ۰ \\ B \neq ۱ \end{cases}$ اشتراک می‌گیریم ⟵ دامنه بدست می‌آید.

مثال: دامنه توابع زیر را بدست آورید؟

الف) $y = \log^{(x-۲)}$ $\quad x - ۲ > ۰ \Rightarrow x > ۲ \quad D = (۲ , +\infty)$

ب) $y = \log_{(۹-x^۲)}^{(x-۲)}$

$\begin{cases} x - ۲ > ۰ \Rightarrow x > ۲ \\ ۹ - x^۲ > ۰ \Rightarrow x^۲ < ۹ \Rightarrow -۳ < x < ۳ \\ ۹ - x^۲ \neq ۱ \Rightarrow x^۲ \neq ۸ \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{۸} \end{cases} \xrightarrow{\cap} \quad ۲ < x < ۳ \Big\} \overset{\cap}{\Rightarrow} D = (۲, \sqrt{۸}) \cup (\sqrt{۸}, ۳)$

ج) $y = \log_{(x^۲+۲)}^{x^۴}$ $\quad \begin{cases} x^۴ > ۰ \Rightarrow x \neq ۰ \\ x^۲ + ۲ > ۰ \Rightarrow x \in R \\ x^۲ + ۲ \neq ۱ \Rightarrow x \in R \end{cases} \overset{\cap}{\rightarrow} D = R - \{۰\}$

۱۲ـ لگاریتم حاصلضرب دو عدد مثبت، برابر است با مجموع لگاریتمهای آن دو عدد و بر عکس یعنی:

$\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y$

مثال: حاصل عبارت مقابل را حساب کنید؟ $\log_۶^۳ + \log_۶^{۱۲} = \log_۶^{(۳\times۱۲)} = \log_۶^{۳۶} = ۲$

۱۳ـ لگاریتم خارج قسمت دو عدد مثبت، برابر است با لگاریتم صورت منهای لگاریتم مخرج و برعکس یعنی:

$\log_a^{\frac{x}{y}} = \log_a^x - \log_a^y$

مثال: اگر $A = \log_۵^{۲۵۰} - \log_۵^۲$، مقدار A را محاسبه کنید؟

$A = \log_۵^{۲۵۰} - \log_۵^۲ = \log_۵^{\frac{۲۵۰}{۲}} = \log_۵^{۱۲۵} = ۳$

۱۴ـ طبق نکتهٔ ۱۳ نتیجه می‌شود که لگاریتم معکوس هر عدد مثبت برابر است با قرینهٔ لگاریتم آن عدد یعنی:

$\log_a^{\frac{۱}{x}} = -\log_a^x$

زیرا: $\log_a^{\frac{1}{x}} = \log_a^1 - \log_a^x = -\log_a^x$

تذکر مهم: $\log_a(x-y),\ \log_a(x+y)$ قانون ندارند و لذا دقت کنید که:

$$\begin{cases} \log_a^{(x+y)} \neq \log_a^x + \log_a^y \\ \log_a^{(x-y)} \neq \log_a^x - \log_a^y \end{cases}$$

۱۵ـ $\log_{a^n}^{x^m} = \frac{m}{n}\log_a^x$

مثال: $\log_{(\sqrt{۲})^{۲۵}}^{۸^{۵۰}} = \frac{۵۰}{۲۵}\log_{\sqrt{۲}}^{۸} = ۲\times۶ = ۱۲$

۱۶ـنتایج نکتهٔ ۱۵:

۱) $\log_a^{x^n} = n\log_a^x$

۲) $\log_{a^n}^x = \frac{۱}{n}\log_a^x$

۳) $\log_{a^n}^{x^n} = \log_a^x \Leftrightarrow \log_a^x = \log_{a^۲}^{x^۲} = \log_{a^۳}^{x^۳} = \dots = \log_{a^n}^{x^n}$

۴) $\log_{\sqrt{a}}^{\sqrt{x}} = \log_{\sqrt[۳]{a}}^{\sqrt[۳]{x}} = \dots = \log_{\sqrt[n]{a}}^{\sqrt[n]{x}} = \log_a^x$

۵) $\log_{\frac{۱}{a}}^{\frac{۱}{x}} = \log_a^x$

۶) $\log_a^{\sqrt[n]{x^m}} = \frac{m}{n}\log_a^x$

۷) $\log_{\sqrt[n]{a}}^{\sqrt[m]{x}} = \frac{n}{m}\log_a^x$

۸) $\log_a^{a^x} = x$

۹) $Lne^x = x$

مثال: محاسبات زیر را انجام دهید؟

الف) $\log_۲^{۴^{۱۰}} = ۱۰\log_۲^۴ = ۱۰\times۲ = ۲۰$

ب) $\log_{۵\sqrt{۵}}^{۶۲۵} = \log_{۵^{\frac{۳}{۲}}}^{۶۲۵} = \frac{۱}{\frac{۳}{۲}}\log_۵^{۶۲۵} = \frac{۲}{۳}\times۴ = \frac{۸}{۳}$

ج) $۳\log_{\sqrt{۱۷}}^{\sqrt[۳]{۱۷}} = \log_{\sqrt{۱۷}}^{(\sqrt[۳]{۱۷})^۳} = \log_{\sqrt{۱۷}}^{۱۷} = ۲$

د) $\log_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۶۴}} = \log_۲^{۶۴} = ۶$

۱۷ـقانون تغییر مبنا (تغییر پایه)

$\log_a^x = \frac{\log_b^x}{\log_b^a}$ یا $\log_a^x \times \log_b^a = \log_b^x$

بر طبق این قانون، می‌توانیم لگاریتم یک عدد مانند x در مبنای a را به لگاریتم همان عدد در مبنای دیگری مانند b تبدیل کنیم، کافی است لگاریتم x در مبنای جدید (یعنی b) را بر لگاریتم پایهٔ قدیم (یعنی a) در پایهٔ جدید (یعنی b) تقسیم کنیم.

مثال: $\log_4^{16} = \frac{\log_2^{16}}{\log_2^4}$

مثال: حاصل عبارت مقابل را بیابید؟

$$\log_{13}^{100} \times \log_{\sqrt[3]{10}}^{13} = \log_{\sqrt[3]{10}}^{100} = \log_{10^{\frac{1}{3}}}^{10^2} = \frac{2}{\frac{1}{3}} \times \log_{10}^{10} = 6$$

نکته: قانون فوق (قانون ۱۷) را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد.

$$\log_b^a \times \log_c^b \times \log_d^c \times \dots \times \log_z^y = \log_z^a$$

۱۸ـ نتایج نکتهٔ ۱۷

الف) $\log_{10}^x = \frac{\log_e^x}{\log_e^{10}} \Rightarrow \log^x = \frac{\operatorname{Ln} x}{\operatorname{Ln} 10}$

ب) $\log_b^a = \frac{\log_{10}^a}{\log_{10}^b} \Rightarrow \log_b^a = \frac{\log^a}{\log^b}$

مثال: حاصل $\log_{1000}^{100000}$ را حساب کنید؟

$$\log_{1000}^{100000} = \frac{\log^{100000}}{\log^{1000}} = \frac{5}{3}$$

ج) $\log_a^x = \frac{\log_x^x}{\log_x^a} \Rightarrow \log_a^x = \frac{1}{\log_x^a}$ یا $\log_a^x . \log_x^a = 1$

مثال: $\log_{125}^5$ را محاسبه کنید؟

$$\log_{125}^5 = \frac{1}{\log_5^{125}} = \frac{1}{3}$$

۱۹ـ $\log_{ab}^x = \frac{1}{\log_x^a + \log_x^b}$

زیرا: $\log_{ab}^x = \frac{1}{\log_x^{ab}} = \frac{1}{\log_x^a + \log_x^b}$

۲۰ـ هرگاه داشته باشیم $\log_c(\log_b(\log_a^x)) = d$ آنگاه x برابر است با: $x = a^{b^{c^d}}$

مثال: مقدار x را در معادلات زیر بیابید؟

الف) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_2^x) = -1 \quad \Rightarrow x = 2^{\frac{1}{3}^{-1}} = 2^3 = 8$

ب) $\log_{\sqrt{3}}(\log_{\sqrt[3]{4}}(\log_{\sqrt[4]{25}}^x)) = 2$

$$x = \sqrt[4]{25}^{\sqrt[3]{4}^{\sqrt{3}^2}} = \sqrt[4]{25}^{\sqrt[3]{4}^3} = (\sqrt[4]{25})^4 = 25$$

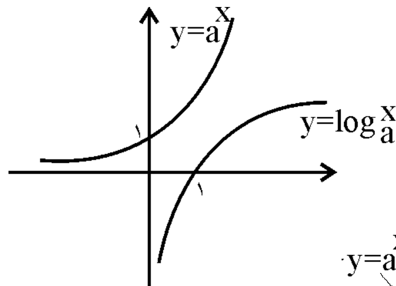
۲۱ـ $x^{\log_a^y} = y^{\log_a x}$

مثال: حاصل $4^{\log_2^5}$ را حساب کنید؟

$4^{\log_2^5} = 5^{\log_2^4} = 5^2 = 25$

۲۲ـ به عنوان نتیجهٔ ۲۰ داریم: $a^{\log_a^x} = x$

و بالاخص: $\begin{cases} 10^{\log^x} = x \\ e^{\ln x} = x \end{cases}$

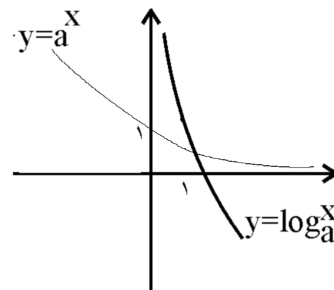


۲۳ـ توابع $y = \log_a^x$, $y = a^x$ معکوس یکدیگرند.

۲۴ـ توابع $y = \log_a^x$, $y = a^x$، هنگامیکه $a > 1$، نقطه‌ی، برخوردی ندارند.

۲۵ـ توابع $y = \log_a^x$, $y = a^x$، هنگامیکه $0 < a < 1$،

فقط یک نقطهٔ برخورد دارند.



۲۶ـ هرگاه پایهٔ لگاریتم یعنی a عددی بزرگتر از ۱ باشد، توابع $y = \log_a^x$, $y = a^x$ هر دو صعودیند. یعنی:

(در این حالت، هرکه بامش بیش، لُگش بیشتر)

$\begin{cases} x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a^{x_1} \le \log_a^{x_2} \\ x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} \le a^{x_2} \end{cases}$

تذکر: در حالتیکه $0 < a < 1$ باشد، توابع فوق هر دو نزولیند.

بنابراین اگر بخواهیم لگاریتم دو عدد را در یک پایه، با یکدیگر مقایسه کنیم، بایستی به پایهٔ لگاریتم توجه کنیم.

مثال: $\begin{cases} 3 < 9 \Rightarrow \log_3^3 < \log_3^9 \Rightarrow 1 < 2 \\ 3 < 9 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}^3 > \log_{\frac{1}{3}}^9 \Rightarrow -1 > -2 \end{cases}$

۲۷ـ هرگاه دو عدد، هر دو بزرگتر از ۱ و یا هر دو بین صفر و یک باشند، آنگاه لگاریتم هر یک از آنها در پایهٔ دیگری مثبت است یعنی:

$\begin{cases} x > 1,\ y > 1 \\ \text{یا} \\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \end{cases} \Rightarrow \log_y^x > 0$

و

هرگاه دو عدد، یکی بزرگتر از ۱ و دیگری بین صفر و یک باشند، آنگاه لگاریتم هر کدام از آنها در پایهٔ دیگری منفی است.

$\begin{cases} x > 1 \ ,\ 0 < y < 1 \\ \text{یا} \\ 0 < x < 1 \ ,\ y > 1 \end{cases} \Rightarrow \log_y^x < 0$

مثال:

$\begin{cases} \log_{427}^{127} > 0 \\ \log_{0/013}^{\frac{1}{5}} > 0 \end{cases}$, $\begin{cases} \log_{0/5}^{6} < 0 \\ \log_{\sqrt{2/5}}^{0/001} < 0 \end{cases}$

۲۸ـ از نکتهٔ ۲۷ می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} x > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log x > 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \\ 0 < x < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log x < 0 \\ \ln x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

۲۹ـ

$$\begin{cases} \log_a^x > b \overset{a>1}{\Leftrightarrow} x > a^b \\ \log_a^x > b \overset{0<a<1}{\Leftrightarrow} x < a^b \end{cases}$$

۳۰ـ کلگاریتم یک عدد: لگاریتم $\frac{1}{x}$ را کلگاریتم x می‌گویند لذا:

$$\text{colog}x = \log^{\frac{1}{x}} = -\log x$$

و یا

$$\text{colog}\, x + \log x = 0$$

۳۱ـ

$$\text{antilog}_a^x = y \Leftrightarrow y = a^x \Leftrightarrow \log_a^y = x$$

۳۲ـ مفسر و مانتیس لگاریتم یک عدد: اگر $\log^x = n/abcd....$، آنگاه عدد صحیح $n\ (n \in Z)$ را مفسر لگاریتم x و عدد اعشاری ...abcd/۰ را که بین ۰ و ۱ است مانتیس لگاریتم x می‌گویند.

می‌دانیم:

$$10^2 = 100 \Rightarrow \log_{10}^{100} = 2$$

$$10^3 = 1000 \Rightarrow \log_{10}^{1000} = 3$$

حال اگر عددی بین ۱۰ و ۱۰۰۰ باشد، مسلماً لگاریتم آن عدد (طبق نکتهٔ ۲۳) بین ۲ و ۳ است مثلاً:

$$\log 400 = 2/6020$$

عدد صحیح (۲) را مفسر و عدد اعشاری ۰/۶۰۲۰ را که برحسب قرار داد همواره عددی بین صفر و یک است مانتیس لگاریتم ۴۰۰ می‌گویند.

مفسر عددی صحیح است که ممکن است مثبت، یا منفی و یا حتی صفر باشد، اما مانتیس همواره عددی اعشاری بین صفر و یک است که از روی جدول بدست می‌آید.

همانطوریکه قبلاً گفته شد، هرگاه مبنای لگاریتم عدد ۱۰ باشد، مبنا را نمی‌نویسند. در بحث زیر مبنای لگاریتم ۱۰ می‌باشد.

نحوهٔ محاسبهٔ لگاریتم یک عدد در مبنای ۱۰

۳۳ـ هرگاه بخواهیم مفسر $\log^x$ را حساب کنیم از قاعدهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

الف) اگر $x > 1$ باشد آنگاه: ۱ − تعداد ارقام صحیح عدد = مفسر logx

ب) اگر $0 < x < 1$ باشد، آنگاه: (۱ + تعداد صفرهای بلافاصله بعد از ممیز و قبل از اولین رقم مخالف صفر)− = مفسر logx

تذکر: هرگاه مفسر لگاریتم عددی منفی باشد، چون بر حسب قرار داد، مانتیس همواره باید مثبت باشد، علامت منفی مفسر را بالای آن می‌نویسند و این منفی فقط مربوط به مفسر می‌باشد.

مثال: مفسر لگاریتم‌های زیر را حساب کنید؟

$\log^{42/5}$ → ۱ = ۱ − ۲ = مفسر → $\log^{42/5} =$ ۱/ خورده‌ای

$\log ^{89735}$ → مفسر = ۵ − ۱ = ۴ → $\log ^{89735}$ = خورده‌ای /۴

$\log ^{0/005}$ → مفسر = −(۲ + ۱) = −۳ → $\log ^{0/005}$ = خورده‌ای /$\bar{3}$

$\log ^{0/00001007 15}$ → مفسر = −(۴ + ۱) = −۵ → $\log ^{0/0000100715}$ = خورده‌ای /$\bar{5}$

۳۴ـ یافتن تعداد ارقام صحیح عددی که مفسر آن صفر یا مثبت است.

اگر مفسر لگاریتم عددی، صفر یا مثبت باشد، بر طبق بند (الف) نکتهٔ ۳۳، تعداد ارقام صحیح عدد از رابطهٔ زیر به دست می‌آید. ۱ + مفسر = تعداد ارقام صحیح عدد

تست: هرگاه $\log x = 37/9030$، x چند رقم صحیح داشته است؟

۱) ۳۷ ۲) ۳۸ ۳) ۳۶ ۴) ۳۹

تعداد ارقام صحیح x = مفسر + ۱ = ۳۷ + ۱ = ۳۸

تست: عدد 2^{800}، چند رقم صحیح دارد؟ ($\log 2 = 0/3010$)

۱) ۲۴۰ ۲) ۲۳۶ ۳) ۲۴۱ ۴) ۲۳۹

$A = 2^{800} \Rightarrow \log A = 800 \log 2 = 800 \times 0/3010 = 240/8$

تعداد ارقام صحیح A = مفسر + ۱ = ۲۴۰ + ۱ = ۲۴۱

تست: هرگاه $5\log x = 3$، x بین کدام دو عدد متوالی قرار دارد؟

۱) $4 < x < 5$ ۲) $5 < x < 6$ ۳) $3 < x < 4$ ۴) $1 < x < 2$

$5\log x = 3 \Rightarrow x^5 = 10^3 \Rightarrow x^5 = 1000 \Rightarrow x = \sqrt[5]{1000} \Rightarrow 3 < x < 4$, توجه کنید که $\begin{cases} 3^5 = 243 \\ 4^5 = 1024 \end{cases}$

۳۵ـ یافتن تعداد صفرهای بعد از ممیز و قبل از اولین رقم مخالف صفر عددی که مفسر لگاریتم آن منفی است.

در این حالت طبق بند (ب) نکتهٔ ۳۳ داریم:

تعداد صفرها = − مفسر − ۱

تست: هرگاه $\log^x = \bar{6}/4771$، تعداد صفرهای بعد از ممیز و قبل از اولین رقم مخالف صفر x چند تاست؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۴

تعداد صفرها = −(−۶) − ۱ = ۵

۳۶ـ در برخی کتب، مقدار مانتیس لگاریتم دهدهی اعداد محاسبه شده و در جداول لگاریتمی موجود است.

۳۷ـ لگاریتمهای هم مانتیس: به لگاریتمهائی می‌گویند که مانتیس لگاریتم همهٔ آنها یکی است.

مثال: لگاریتمهای زیر همگی، هم مانتیس‌اند.

$\log 2 = 0/3010$

$\log 20 = 1/3010$

$\log ۲۰۰ = ۲/۳۰۱۰$
$\vdots$

$\log ۰/۲ = \bar{۱}/۳۰۱۰$

$\log ۰/۰۲ = \bar{۲}/۳۰۱۰$

$\log ۰/۰۰۲ = \bar{۳}/۳۰۱۰$
$\vdots$

۳۸ـ به کمک بعضی از ماشین حسابها، می‌توان $\log_{۱۰}^{x}$ و $\ln x$ و همچنین ۱۰^{x} و e^{x} و y^{x} را محاسبه کرد.

۳۹ـ سعی کنید لگاریتم دهدهی اعداد ۲ و ۳ یعنی $\log ۲ = ۰/۳۰۱۰$ و $\log ۳ = ۰/۴۷۷۱$ را حفظ کرده، ضمناً به نحوهٔ محاسبهٔ بقیه لگاریتمهای زیر به کمک آنها توجه کنید.

$\log ۴ = \log ۲^{۲} = ۲\log ۲ = ۲(۰/۰۳۰۱۰) = ۰/۶۰۲۰$

$\log ۵ = \log \frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱-۰/۳۰۱۰ = ۰/۶۹۹۰$

$\log ۶ = \log (۲\times۳) = \log ۲ + \log ۳ = ۰/۷۷۸۱$

$\log ۸ = \log ۲^{۳} = ۳\log ۲ = ۰/۹۰۳۰$

$\log ۹ = \log ۳^{۲} = ۲\log^{۳} = ۰/۹۵۴۲$

$\log ۱۰ = ۱$ $\qquad$ $\log ۰/۱ = -۱$

$\log ۱۰۰ = ۲$ $\qquad$ $\log ۰/۰۱ = -۲$

$\log ۱۰۰۰ = ۳$ $\qquad$ $\log ۰/۰۰۱ = -۳$
$\vdots$ $\qquad$ $\vdots$

۴۰- به کمک برخی ماشین حسابها و همچنین به کمک لگاریتم، می‌توان محاسباتی همچون $۲^{۸۰۰}$ و $\sqrt[۱۷]{۶}$ و ... را حساب کرد به نحوهٔ محاسبهٔ $۲^{۸۰۰}$ دقت نمائید.

$A = ۲^{۸۰۰} \Rightarrow \log A = ۸۰۰\log ۲ = ۲۴۰/۸ \Rightarrow \log A = ۲۴۰/۸$

$\Rightarrow A = ۱۰^{۲۴۰/۸} = ۱۰^{۲۴۰}\times ۱۰^{۰/۸} = ۱۰^{۲۴۰}\times ۶/۳۰۹۵ = ۶۳۰۹۵\underbrace{۰۰۰...۰}_{\text{۲۳۶ صفر}}$

توجه داشته باشید که $۱۰^{۰/۸}$ را به کمک ماشین حساب محاسبه کرده‌ایم.

تذکر: به کمک ماشین حساب‌های معمولی نمی‌توان $۲^{۸۰۰}$ را محاسبه کرد، چرا که عدد $۲^{۸۰۰}$ همانطوریکه دیدید، یک عدد ۲۴۱ رقمی شد.

تست: جواب کلی معادلهٔ $\log_{\cos x}^{\sin x} + \log_{\sin x}^{\cos x} = ۲$ **کدام است؟**

۱) $k\pi+\frac{\pi}{۴}$ $\qquad$ ۲) $۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ $\qquad$ ۳) $k\pi+\frac{\pi}{۲}$ $\qquad$ ۴) $۲k\pi+\frac{\pi}{۴}$

حل:

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \\ \sin x \neq 1 \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \to x \in (0, \frac{\pi}{2}) \quad \Rightarrow D = (2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$$

$$\log_{\cos x}^{\sin x} = y \Rightarrow y + \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\log_{\cos x}^{\sin x} = 1 \Rightarrow \sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

جوابهای قابل قبول با توجه به دامنه $\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$

تست: معادلهٔ $x^{\log x} = 100x$ چند جواب دارد؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) بیشمار　　۴) جواب ندارد.

حل:

$D = (0 , \infty) \Rightarrow$

$x^{\log x} = 100x \quad \Rightarrow \quad \log(x^{\log x}) = \log(100x)$

$(\log x)^2 - \log x - 2 = 0 \Rightarrow$

- $\log x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{10}$ قابل قبول
- $\log x = \frac{-c}{a} = 2 \Rightarrow x = 100$ قابل قبول

تجربه بهترین معلم است، منتهی حق التدریس گرانی دارد. «کارلایل»

جدیّت مقصد را نزدیک می‌کند. «شیلر»

اگر کتاب نباشد، روح پرورش نمی‌یابد. «پلوتارک»

شانس در خدمت ذهن آماده است. «پاستور»

ریاضی دانش جوانان است. «وینر»

تست ۱:

۱ـ حاصل عبارت $\log_a^x . \log_x^{ab}$ برابر است با:

۱) $1 + \log_a^b$　۲) $1 + \log_a^x$　۳) $1 + \log_b^a$　۴) $1 + \log_x^b$

۲ـ جزء صحیح لگاریتم ۵۰۰ در مبنای ۳، کدام است؟

۱) ۵　۲) ۶　۳) ۷　۴) ۸

۳ـ مجموعه جواب نامعادلهٔ $\log^{\frac{x+3}{5}} < -1$ کدام است؟

۱) $-3 < x < -\frac{5}{3}$　۲) $-2 < x < -\frac{3}{2}$　۳) $\frac{3}{2} < x < 2$　۴) $\frac{5}{2} < x < 3$

۴ـ در معادلهٔ $5^{\log x} + x^{\log 5} = 50$ ، مقدار x برابر است با:

۱) ۵　۲) ۲۵　۳) ۱۰۰　۴) ۵۰۰

۵ـ از رابطهٔ $\log x^3 = 1 + 2\log y$، نتیجه می‌شود؟

۱) $x^3 + y^2 = 0$　۲) $x^3 = 10y^2$　۳) $x^3 = 1 - 2y$　۴) $x^3 = y^3$

۶ـ لگاریتم ۶۲۵ در چه مبنایی برابر $\frac{4}{3}$ است؟

۱) ۲۵　۲) ۱۲۵　۳) $\sqrt[3]{5}$　۴) ۷۵

۷ـ مقدار x در معادلهٔ $\log_4^x + \log_x^4 = \frac{5}{2}$ برابر است با:

۱) ۲　۲) ۱　۳) ۱/۵　۴) ۲/۵

۸ـ اگر $x = 49^{(1 + \log_7^{\frac{1}{2}})}$ آنگاه x برابر است با:

۱) $\frac{7}{2}$　۲) $\frac{49}{4}$　۳) ۱۴　۴) ۱۹۶

۹ـ اگر $125 = x^{\log_x^{(x-5)^3}}$، x کدام است؟

۱) ۳　۲) ۵　۳) ۱۰　۴) ۹

۱۰ـ حاصل $\frac{\log^x}{\log_2^x} + \frac{\log^x}{\log_5^x}$ برابر است با:

۱) ۱　۲) ۵　۳) ۲　۴) $\log x$

۱ـ (۱) $\log_a x \cdot \log_x ab = \log_a ab = \log_a a + \log_a b = ۱ + \log_a b$

۲ـ (۱) $۳^۵ < ۵۰۰ < ۳^۶ \Rightarrow \log_۳ ۵۰۰ =$ ۵/ خورده‌ای

$\Rightarrow \lfloor \log_۳ ۵۰۰ \rfloor = ۵$

۳ـ (۱) $\frac{x+۳}{۵} < ۱۰^{-۱} \Rightarrow ۲x + ۶ < ۱ \Rightarrow x < -\frac{۵}{۲} (۱)$

$\frac{x+۳}{۵} > ۰ \Rightarrow x > -۳ \ (۲)$

$(۱) \cap (۲) \Rightarrow x \in (-۳, -\frac{۵}{۲})$

۴ـ (۳) $۵^{\log x} + x^{\log ۵} = ۵۰ \Rightarrow ۵^{\log x} + ۵^{\log x} = ۵۰$

$۵^{\log x} = ۲۵ \Rightarrow \log x = ۲ \Rightarrow x = ۱۰۰$

۵ـ (۲) $\log x^۳ = \log ۱۰ + \log y^۲ \Rightarrow \log x^۳ = \log ۱۰y^۲ \Rightarrow x^۳ = ۱۰y^۲$

۶ـ (۲) $\log_a ۶۲۵ = \frac{۴}{۳} \Rightarrow a^{\frac{۴}{۳}} = ۵^۴ = (۵^۳)^{\frac{۴}{۳}} \Rightarrow a = ۵^۳ = ۱۲۵$

۷ـ (۱) $\log_۴ x + \log_x ۴ = \frac{۵}{۲} \Rightarrow y + \frac{۱}{y} = \frac{۵}{۲}$

$$\begin{cases} y = ۲ \\ y = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_۴ x = ۲ \\ \log_۴ x = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱۶ \\ x = \sqrt{۴} = ۲ \end{cases}$$

۸ـ (۲) $x = ۴۹^{۱ + \log_۷ \frac{۱}{۲}} \Rightarrow x = ۴۹ \times ۴۹^{\log_۷ \frac{۱}{۲}} = ۴۹ \times (\frac{۱}{۲})^{\log_۷ ۴۹} = ۴۹ \times \frac{۱}{۴} = \frac{۴۹}{۴}$

۹ـ (۳) $x^{\log_x (x-۵)^۳} = ۱۲۵ \Rightarrow \left((x-۵)^۳\right)^{\log_x x} = ۱۲۵ \Rightarrow (x-۵)^۳ = ۱۲۵ \Rightarrow x - ۵ = ۵ \Rightarrow x = ۱۰$

۱۰ـ (۱) $\frac{\log x}{\log_۵ x} + \frac{\log x}{\log_۲ x} = \log x \left(\frac{۱}{\log_۵ x} + \frac{۱}{\log_۲ x}\right)$

$= \log x (\log_x ۵ + \log_x ۲) = \log_{۱۰} x \times \log_x ۱۰ = ۱$

محال از طرز فکر ما بوجود می‌آید. «نیما»

آسانترین راه از بین بردن افتخارات خودستائی است. «نیچه»

تست ۲:

۱ـ ریشهٔ معادلهٔ $2\log^{5} = \log^{10x}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ‌ ۲) ۲ ‌ ۳) $\frac{2}{5}$ ‌ ۴) ۲۵۰

۲ـ اگر $\log 2 = 0/301$ و $\log 3 = 0/477$، در این صورت $\log\frac{135}{4}$ کدام است؟

۱) $\bar{1}/528$ ‌ ۲) $0/528$ ‌ ۳) $1/528$ ‌ ۴) $1/628$

۳ـ حاصل $\frac{1}{\log^{n}}\left(\log n + \log n^{2} + \log n^{4} + \dots + \log n^{2^n}\right)$ کدام است؟

۱) $2^{n+1}+1$ ‌ ۲) $1 - 2^{n}$ ‌ ۳) $2^{n}-1$ ‌ ۴) $2^{n+1}-1$

۴ـ اگر $e^{Lnx} + x^{Lne} = 4$، x کدام است؟

۱) ۲ ‌ ۲) ۴ ‌ ۳) $\frac{1}{2}$ ‌ ۴) ۱

۵ـ اگر $\log_{2}^{x} = a$ ، $\log_{2}^{a}$ برابر است با:

۱) $a\log_{x}^{a}$ ‌ ۲) $a\log_{a}^{x}$ ‌ ۳) $\log_{a}^{x}$ ‌ ۴) $\log_{x}^{a}$

۶ـ اگر $\log_{12}^{27} = a$ ، $\log_{3}^{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{a+3}{2a}$ ‌ ۲) $\frac{3-a}{2a}$ ‌ ۳) $\frac{2a}{3+a}$ ‌ ۴) $\frac{2a}{3-a}$

۷ـ از رابطهٔ $x = 81^{\log_{3}^{2}}$، x برابر است با:

۱) ۱۶۲ ‌ ۲) ۱۶ ‌ ۳) ۹ ‌ ۴) ۸

۸ـ مقدار x از معادلهٔ $\log_{\sqrt{2}}^{x} + \log_{\sqrt{x}}^{2} = 4$، برابر است با:

۱) $\sqrt{2}$ ‌ ۲) ۱ ‌ ۳) ۲ ‌ ۴) ۴

۹ـ اگر $\log a$ و $\log x + \frac{1}{2}\log ab$ و $\log b$ به ترتیب جملات متوالی یک تصاعد حسابی باشند، مقدار x کدام است؟

۱) ۱ ‌ ۲) ± 1 ‌ ۳) ab ‌ ۴) $\pm ab$

۱۰ـ حاصل $\log^{\frac{1}{2}} + \log^{\frac{2}{3}} + \dots + \log^{\frac{n}{n+1}}$، کدام است؟

۱) $-\log^{n!}$ ‌ ۲) $n - \log^{(n+1)}$ ‌ ۳) $n - \log^{n!}$ ‌ ۴) $-\log^{(n+1)}$

۱ـ (۱) $\log ۱۰x = ۲\log ۵ \Rightarrow \log ۱۰x = \log ۲۵ \Rightarrow ۱۰x = ۲۵ \Rightarrow x = \frac{۵}{۲}$

۲ـ (۳) $\log^{\frac{۱۳۵}{۴}} = \log^{۱۳۵} - \log ۴ = \log^{۵\times ۲۷} - ۲\log ۲ = \log\frac{۱۰}{۲} + \log ۳^{۳} - ۲\log ۲$

$= ۱ - ۳\log ۲ + ۳\log ۳ = ۱/۵۲۸$

۳ـ (۴) $\frac{۱}{\log^{n}}(\log n + ۲\log n + ۴\log n + \ldots + ۲^{n}\log n)$

$= \frac{\log n}{\log n}(۱ + ۲ + ۴ + \ldots + ۲^{n}) = \frac{۱ - ۲^{n+۱}}{۱ - ۲} = ۲^{n+۱} - ۱$ تصاعد هندسی

دقت کنید که تعداد جملات تصاعد، برابر $(n + ۱)$ است.

۴ـ (۱) $e^{\ln x} + x^{\ln e} = ۴ \Rightarrow x + x = ۴ \Rightarrow x = ۲$

۵ـ (۱) $\log_{۲}^{a} = \log_{x}^{a} \times \log_{۲}^{x} = a\log_{x}^{a}$

۶ـ (۲) $\log_{۱۲}^{۲۷} = a \Rightarrow ۳\log_{۱۲}^{۳} = a \Rightarrow \log_{۳}^{۱۲} = \frac{۳}{a}$

$\log_{۳}^{۳} + ۲\log_{۳}^{۲} = \frac{۳}{a} \Rightarrow \log_{۳}^{۲} = \frac{\frac{۳}{a} - ۱}{۲} = \frac{۳ - a}{۲a}$

۷ـ (۲) $x = ۸۱^{\log_{۳}^{۲}} = ۲^{\log_{۳}^{۸۱}} = ۲^{۴} = ۱۶$

۸ـ (۳) $\log_{\sqrt{۲}}^{x} + \log_{\sqrt{x}}^{۲} = ۴ \Rightarrow ۲\log_{۲}^{x} + ۲\log_{x}^{۲} = ۴ \Rightarrow \log_{۲}^{x} + \log_{x}^{۲} = ۲$

$\Rightarrow y + \frac{۱}{y} = ۲ \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow \log_{۲}^{x} = ۱ \Rightarrow x = ۲$

۹ـ (۲) $\log^{a} + \log^{b} = ۲(\log^{x} + \frac{۱}{۲}\log^{ab})$

$\log^{ab} = \log x^{۲} + \log ab \Rightarrow \log x^{۲} = ۰ \Rightarrow x^{۲} = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$

۱۰ـ (۴) $\log(\frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۳}{۴} \times \ldots \times \frac{n}{n+۱}) = \log^{\frac{۱}{n+۱}} = -\log^{(n+۱)}$

تمام شأن و عظمت انسان در فکر است.	«بلزپاسکال»

تجربه بالاتر از علم است.	«ابن سینا»

تست ۳:

۱ـ اگر loga و logb ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-(m+۱)x+m-۱=۰$ **باشند، حاصل** $\frac{\log^{ab}}{\log^{a}\log^{b}}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{m+۱}{m-۱}$　　۲) $\frac{m-۱}{-m-۱}$　　۳) $\frac{m-۱}{m+۱}$　　۴) $\frac{۱}{m+۱}$

۲ـ اگر $ab=۱۰$ **باشد، ماکزیمم** loga.logb **کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۳}$　　۲) $\frac{۱}{۴}$　　۳) $\frac{۱}{۲}$　　۴) ۱

۳ـ اگر $\log^{x}=\frac{۱}{۲}$, $\log^{y}=\frac{۲}{۳}$**، کدامیک از روابط زیر صحیح است؟**

۱) $x^{۲}=y^{۲}$　　۲) $x^{۲}=y^{۳}$　　۳) $x^{۳}=y^{۴}$　　۴) $x^{۴}=y^{۳}$

۴ـ ریشهٔ معادلهٔ $\log_{۳}^{x}+\log_{\sqrt{۳}}^{x}+\log_{\frac{۱}{۳}}^{x}=۶$ **کدام است؟**

۱) ۲۷　　۲) ۹　　۳) ۳　　۴) $\frac{۱}{۳}$

۵ـ اگر $\log_{۶}^{۲}=x$**،** $\log_{۸}^{۲۷}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۱+x}{x}$　　۲) $\frac{x-۱}{x}$　　۳) $\frac{۱-x}{x}$　　۴) $\frac{۱-x}{۱+x}$

۶ـ ریشهٔ معادلهٔ $۲^{x}+۲^{x-۱}+۲^{x-۲}+۲^{x-۳}=۱۲۰$ **کدام است؟**

۱) ۵　　۲) ۸　　۳) ۶　　۴) ۱۶

۷ـ اگر $\log_{۴}^{a}$ **و** $\log_{۴}^{b}$ **ریشه‌های معادلهٔ** $۲x^{۲}-۳x-۷=۰$ **باشند،** ab **کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۸}$　　۲) $\frac{۱}{۱۶}$　　۳) ۸　　۴) ۱۶

۸ـ کدام نادرست است؟

۱) $\ln ۸۰۰<\ln ۹۰۰$　　۲) $(۰/۱۲۵)^{۷۱}>(۰/۱۲۵)^{۸۱}$

۳) $(۰/۰۰۱)^{\log^{۵}}=\frac{۱}{۱۲۵}$　　۴) $\log_{۰/۵}^{۱۲}>\log_{۰/۵}^{۱۰}$

۹ـ حاصل $۲^{\log_{۸}^{x}}$ **کدام است؟**

۱) $x^{۲}$　　۲) $x^{۳}$　　۳) $\sqrt[۳]{x}$　　۴) $\sqrt{x}$

۱۰ـ حاصل $B=\log_{۳}^{\sqrt{۳}}-\log_{۴}^{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}$ **برابر است با:**

۱) $\frac{۳}{۲}$　　۲) $\frac{۳}{۴}$　　۳) $\frac{۳}{۸}$　　۴) $\frac{۳}{۱۵}$

۱ـ (۱) $\frac{\log^{a}+\log^{b}}{\log^{a}\log^{b}}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-b}{c}=\frac{m+۱}{m-۱}$

۲ـ (۲) $ab=۱۰ \Rightarrow \log ab=\log ۱۰ \Rightarrow \log a+\log b=۱$ ثابت

$\Rightarrow \log a=\log b=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \text{Max}(\log^{a}.\log^{b})=(\frac{۱}{۲}).(\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}$

نکته: هرگاه مجموع دو کمیت، عدد ثابتی باشد، حاصلضربشان وقتی Max است که آن دو کمیت مساوی باشند.

۳ـ (۴) $\begin{cases} x=۱۰^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow x^{۲}=۱۰ \\ y=۱۰^{\frac{۲}{۳}} \Rightarrow y^{۳}=۱۰۰ \end{cases} \Rightarrow x^{۲}=\sqrt{y^{۳}} \Rightarrow x^{۴}=y^{۳}$

۴ـ (۱) $\log_{۳}^{x}+۲\log_{۹}^{x}-\log_{۲۷}^{x}=۶ \Rightarrow \log_{۳}^{x}=۳ \Rightarrow x=۲۷$

۵ـ (۳) $\log_{۶}^{۲}=x \Rightarrow \log_{۲}^{۶}=\frac{۱}{x} \Rightarrow ۱+\log_{۲}^{۳}=\frac{۱}{x}$

$\log_{۲}^{۳}=\frac{۱-x}{x} \Rightarrow \log_{۸}^{۲۷}=\log_{۲^{۳}}^{۳^{۳}}=\log_{۲}^{۳}=\frac{۱-x}{x}$

۶ـ (۳) $۲^{x-۳}(۲^{۳}+۲^{۲}+۲+۱)=۱۲۰ \Rightarrow ۲^{x-۳}=۸ \Rightarrow x-۳=۳ \Rightarrow x=۶$

۷ـ (۳) $\log_{۴}^{a}+\log_{۴}^{b}=\frac{-b}{a}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \log_{۴}^{ab}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow ab=\sqrt{۴^{۳}}=۸$

۸ـ (۴) $۰<a<۱ \quad , \quad x<y \quad \Rightarrow \log_{a}^{x}>\log_{a}^{y}$

۹ـ (۳) $۲^{\log_{۸}^{x}}=x^{\log_{۸}^{۲}}=x^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{x}$

۱۰ـ (۲) $B=\frac{۱}{۲}\log_{۳}^{۳}+\frac{۱}{۲}\log_{۴}^{۲}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲})=\frac{۳}{۴}$

اگر اراده داشته باشی، بی‌شک موفق می‌شوی. «امرسون»

بهترین حکومتها، سلطنت بر قلوب است. «ناپلئون»

بنده و اسیر نگرانیهای آینده و غم‌های گذشتهٔ خویش مباش. «دیوژن»

تست ۴:

۱ـ اگر $f(x)=\log_a^x$ و $z=\dfrac{f(x)+f(y)}{f(\sqrt{xy})}$، z برابر است با:

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{۲}$

۲ـ اگر $\log_{۱۳}^{۱۷}=a$ و $\log_{۱۷}^{۱۳}=b$، **حاصل** $\log^a + \log^b$ **کدام است؟**

۱) $\log ۱۳$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) $\log^{۱۷}$

۳ـ اگر معادلهٔ $x^۲-(۱+\log m)x+\log m=۰$ **ریشهٔ مضاعف داشته باشد، m کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۱۰

۴ـ اگر $\log_x^{\sqrt{x}}+\log_{\sqrt[۳]{x}}^{x}=x$، **آنگاه داریم:**

۱) $x=۰/۱$ ۲) $x=۲/۵$ ۳) $x=۰/۵$ ۴) $x=۳/۵$

۵ـ هرگاه $\log_۲^{\cos ۲۰^\circ}=a$، **آنگاه** $\log_۲\dfrac{\cos ۳۰^\circ+\cos ۱۰^\circ}{\cos ۱۰^\circ}$ **برابر است با:**

۱) $a-۱$ ۲) $۱-a$ ۳) $-a-۱$ ۴) $a+۱$

۶ـ اگر اعداد $\log^{\frac{۴}{۳}}$، $\log^{(۳^x-۱)}$ و $\log^{۳^x}$ **تشکیل تصاعد حسابی (عددی) داده باشند، x برابر است با:**

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ± ۱ ۴) ۳

۷ـ حاصل $A=\log^{\tan ۱^\circ}\times\log^{\tan ۲^\circ}\times\ldots\times\log^{\tan ۸۹^\circ}$ **کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) !۸۹ ۴) -۱

۸ـ جواب معادلهٔ $۲^{x+۱}+۴^x=۸۰$ **کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۹ـ مقدار $\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{\log ۵}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۱۰}$ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۱۰ـ اگر $\log_۳^{۲۴}=a$ **باشد، حاصل** $\log_۳^{۱۸}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{a-۳}{۲}$ ۲) $\frac{a-۵}{۳}$ ۳) $\frac{a+۵}{۳}$ ۴) $\frac{a-۷}{۳}$

۱ـ (۱) $Z=\frac{\log_a^x+\log_a^y}{\log_a^{\sqrt{xy}}}=\frac{\log_a^{xy}}{\frac{۱}{۲}\log_a^{xy}}=۲$

۲ـ (۲) $\begin{cases}a=\log_{۱۳}^{۱۷}\\ b=\log_{۱۷}^{۱۳}\end{cases}\Rightarrow ab=۱\Rightarrow \log a+\log b=\log ab=\log ۱=۰$

۳ـ (۴) $\Delta=۰\Rightarrow(۱-\log m)^{۲}=۰\Rightarrow \log^m=۱\Rightarrow m=۱۰$

۴ـ (۴) $\frac{۱}{۲}+۳=x \Rightarrow x=۳/۵$

۵ـ (۴) $\log_{۲}^{\frac{۲\cos ۲۰\cos ۱۰}{\cos ۱۰}}=\log_{۲}^{۲\cos ۲۰}=۱+\log_{۲}^{\cos ۲۰}=۱+a$

۶ـ (۳) $\log^{\frac{۴}{۳}}+\log^{۳^x}=۲\log^{(۳^x-۱)}\Rightarrow(\frac{۴}{۳})(۳^x)=(۳^x-۱)^{۲}\Rightarrow\frac{۴}{۳}a=(a-۱)^{۲}$

$\Rightarrow ۳a^{۲}-۱۰a+۳=۰$
- $a=۳\Rightarrow ۳^x=۳\Rightarrow x=۱$
- $a=\frac{۱}{۳}\Rightarrow ۳^x=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=-۱$

۷ـ (۲) $\tan ۴۵^\circ=۱\Rightarrow \log^{(\tan ۴۵^\circ)}=۰\Rightarrow A=۰$

۸ـ (۴) $۲^{x+۱}+۲^{۲x}=۸۰\Rightarrow ۲y+y^{۲}-۸۰=۰$

- $y=-۱۰ \Rightarrow ۲^x=-۱۰$ غیرممکن
- $y=۸ \Rightarrow ۲^x=۸\Rightarrow x=۳$

۹ـ (۴) $(\frac{۱}{۱۰})^{\log^{۵}}=۵^{\log^{\frac{۱}{۱۰}}}=۵^{-۱}=\frac{۱}{۵}$

۱۰ـ (۳) $\log_{۳}^{۲۴}=a\Rightarrow \log_{۳}^{۳}+\log_{۳}^{۸}=a\Rightarrow ۱+۳\log_{۳}^{۲}=a$

$\Rightarrow \log_{۳}^{۲}=\frac{a-۱}{۳}\Rightarrow \log_{۳}^{۱۸}=\log_{۳}^{۹}+\log_{۳}^{۲}=۲+\frac{a-۱}{۳}=\frac{a+۵}{۳}$

دوست مثل درشکه در روز بارانی، کمیاب است. «ولتر»

در عمل کوش و هر چه خواهی پوش. «سعدی»

بهترین گفتار آن است که مطابق با کردار باشد. «حضرت علی (ع)»

تست ۵:

۱ـ مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{1}{2^{-2x-3}} \le (0/125)^{x-2}$ کدام است؟

۱) $x \ge \frac{5}{3}$ ۲) $x \le \frac{3}{5}$ ۳) $x \ge \frac{3}{5}$ ۴) $x \le \frac{5}{3}$

۲ـ مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{1}{(\sqrt{5}-2)^{2x+1}} \le (\sqrt{5}+2)^{3x}$ کدام است؟

۱) $x \ge 1$ ۲) $|x| \le 1$ ۳) $x \le 1$ ۴) $x \le -1$

۳ـ اگر $a^{\log x}$ و $a^{\log y}$ و $a^{\log z}$ تصاعد هندسی بسازند، آنگاه داریم:

۱) $\frac{x+z}{2} = y$ ۲) $xz = y^2$ ۳) $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y}$ ۴) $z^3 = xy$

۴ـ حاصل $a^{\frac{\log^{(\log a)}}{\log^{a}}}$ برابر است با:

۱) $-\log a$ ۲) $\log a$ ۳) $\log^{\frac{1}{a}}$ ۴) $2\log a$

۵ـ حاصل $\frac{1}{\log_y^{\sqrt{xy}}} + \frac{1}{\log_x^{\sqrt{xy}}}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۶ـ از تساوی $\log_9^{(x-4)} = 1 - \log_3^2$، مقدار x کدام است؟

۱) ۶/۲۵ ۲) ۶/۵ ۳) ۶/۷۵ ۴) ۷/۵

۷ـ مقدار $\log_{3-\sqrt{8}}^{3+\sqrt{8}}$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۰ ۴) $3-\sqrt{8}$

۸ـ ریشه‌های معادلهٔ $x^{1+\log x} = 100$ عبارتند از:

۱) ۱۰۰،۱۰ ۲) $\frac{1}{10}$،$\frac{1}{100}$ ۳) $\frac{1}{10}$، ۱۰۰ ۴) ۱۰،$\frac{1}{100}$

۹ـ ریشه‌ی معادلهٔ $\log_8^x + (\log_8^x)^2 + (\log_8^x)^3 + \dots = \frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) ۲

۱۰ـ ساده شدهٔ عبارت $5^{(2\log_5^2 + 3\log_5^3)}$ برابر است با:

۱) ۶ ۲) 5^5 ۳) 5^6 ۴) ۱۰۸

۱ـ (۴) $(۰/۵)^{۳x-۶} \leq (۰/۵)^{-۲x-۳} \Rightarrow ۳x-۶ \geq -۲x-۳ \Rightarrow x \geq \frac{۳}{۵}$

۲ـ (۳) $(\sqrt{۵}+۲)^{۳x} \leq (\sqrt{۵}+۲)^{۲x+۱} \Rightarrow ۳x \leq ۲x+۱ \Rightarrow x \leq ۱$

$\frac{۱}{\sqrt{۵}-۲} = \sqrt{۵}+۲$

۳ـ (۲) $a^{\log^x} \times a^{\log^z} = \left(a^{\log^y}\right)^۲ \Rightarrow \log^x + \log z = ۲\log y \Rightarrow xz = y^۲$

۴ـ (۲) $\left(a^{\log^{(\log a)}}\right)^{\frac{۱}{\log a}} = \left((\log a)^{\log a}\right)^{\frac{۱}{\log a}} = (\log a)^۱ = \log a$

یادآوری: $(a^{\frac{x}{y}}) = (a^x)^{\frac{۱}{y}}$ ، $a^{\log_x^b} = b^{\log_x^a}$

۵ـ (۱) $\log_{\sqrt{xy}}^x + \log_{\sqrt{xy}}^y = \log_{\sqrt{xy}}^{xy} = ۲$

۶ـ (۱) $\frac{۱}{۲}\log_۳^{(x-۴)} = \log_۳^۳ - \log_۳^۲ \Rightarrow \log_۳^{\sqrt{x-۴}} = \log_۳^{\frac{۳}{۲}}$

$\Rightarrow \sqrt{x-۴} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow x-۴ = \frac{۹}{۴} \Rightarrow x = ۶/۲۵$

۷ـ (۲) $(۳+\sqrt{۸})(۳-\sqrt{۸}) = ۱ \Rightarrow ۳+\sqrt{۸} = (۳-\sqrt{۸})^{-۱} \Rightarrow \log_{۳-\sqrt{۸}}^{۳+\sqrt{۸}} = -۱$

۸ـ (۴) $x^{۱+\log x} = ۱۰۰$

از طرفین log می‌گیریم. $\Rightarrow \log(x^{۱+\log x}) = \log ۱۰۰ \Rightarrow (۱+\log x)\log x = ۲ \Rightarrow (\log x)^۲ + \log x - ۲ = ۰$

$\Rightarrow (\log x+۲)(\log x-۱) = ۰ \Rightarrow \log x = ۱ \Rightarrow x = ۱۰ \quad \Rightarrow \log x = -۲ \Rightarrow x = \frac{۱}{۱۰۰}$

۹ـ (۴) $S = \frac{a}{۱-r} = \frac{\log_۸^x}{۱-\log_۸^x} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \log_۸^x = \frac{۱}{۳} \Rightarrow x = \sqrt[۳]{۸} = ۲$

۱۰ـ (۴) $۵^{\log_۵^۴ + \log_۵^{۲۷}} = ۵^{\log_۵^{(۴\times۲۷)}} = ۵^{\log_۵^{۱۰۸}} = ۱۰۸^{\log_۵^۵} = ۱۰۸$

دریاب ضعیفان را در وقت توانائی. «حافظ»

دربارهٔ هرچه می‌گوئی فکر کن ولی هرچه را فکر می‌کنی مگو. «فیلسوف هندی»

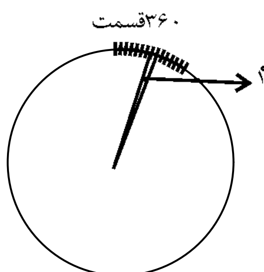
فصل هشتم

مثلثات

واحدهای اندازه گیری زاویه:

واحدهای اندازه‌گیری زاویه عبارتند از: ۱ـ درجه ۲ـ گراد ۳ـ رادیان ۴ـ میلیم.

۱ـ درجه: یک درجه، اندازه‌ی زاویه‌ایست مرکزی در یک دایره که برابر $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط آن باشد (مطابق شکل)



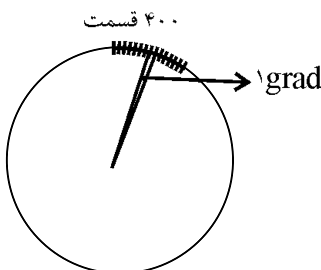
بنابراین محیط هر دایره °۳۶۰ است.

واحدهای کوچکتر از درجه عبارتند از دقیقه (′) و ثانیه (″)

$$\begin{cases} \frac{۱}{۶۰} \text{ یک درجه } = ۱' \\ \frac{۱}{۶۰} \text{ یک دقیقه } = ۱'' \end{cases}$$

نکته: ″۶۰ و ′۵۹ و °۸۹ = °۹۰، ″۶۰ و ′۵۹ و °۱۷۹ = °۱۸۰

۲ـ گراد: یک گراد اندازه‌ی زاویه‌ایست مرکزی در یک دایره که برابر $\frac{۱}{۴۰۰}$ محیط آن باشد.



گراد را با علامت grad نمایش می‌دهند.

بنابراین محیط هر دایره‌ای ۴۰۰ گراد است.

واحدهای کوچکتر از گراد عبارتند از دسی گراد، سانتی‌گراد و میلی‌گراد

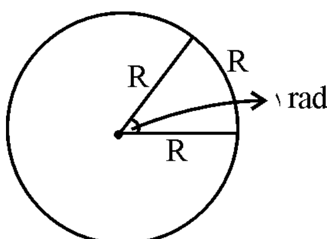
$$\begin{cases} \frac{۱}{۱۰} \text{ یک گراد } = ۱ \text{ دسی‌گراد} \\ \frac{۱}{۱۰} \text{ یک دسی گراد } = ۱ \text{ سانتی گراد} \\ \frac{۱}{۱۰} \text{ یک سانتی‌گراد } = ۱ \text{ میلی گراد} \end{cases}$$

تذکر: یک گراد از یک درجه، کوچکتر است.

۳ـ رادیان: یک رادیان اندازه‌ی زاویه‌ایست مرکزی در یک دایره که طول کمان مقابلش برابر شعاع دایره باشد (مطابق شکل)

به عبارت دیگر، یک رادیان، اندازه‌ی زاویه‌ایست مرکزی در یک دایره که طول کمان مقابلش برابر $\frac{۱}{۲\pi}$ محیط دایره است

رادیان را نماد rad (radian) نمایش می‌دهند.



بنابراین محیط هر دایره‌ای ۲π رادیان (تقریباً ۶/۲۸ رادیان) می‌باشد.

زیرا: $۶/۲۸\text{rad} = ۶/۲۸R = ۳/۱۴R \times ۲ = ۲\pi R$ = محیط هر دایره

۴ـ میلیم: اندازه‌ایست مرکزی در یک دایره که برابر $\frac{۱}{۶۲۸۰}$ محیط دایره می‌باشد، به عبارت دیگر یک میلیم، اندازه‌ی زاویه‌ایست مرکزی در یک دایره که برابر $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ یک رادیان می‌باشد بنابراین محیط هر دایره‌ای ۶۲۸۰ میلیم است.

نکته: محیط هر دایره‌ای °۳۶۰ یا ۴۰۰grad یا ۲π رادیان (۶/۲۸ رادیان) یا ۶۲۸۰ میلیم است.

لذا $۳۶۰^\circ = ۴۰۰\,\text{grad} = ۲\pi$ رادیان = ۶۲۸۰ میلیم

نکته مهم: یک رادیان > یک درجه > یک grad > یک میلیم

نکته: فرمول تبدیل واحدهای اندازه‌گیری زاویه به یکدیگر:

$$\frac{D}{۳۶۰^\circ} = \frac{G}{۴۰۰\,\text{grad}} = \frac{R}{۲\pi\text{rad}} = \frac{M}{۶۲۸۰\,\text{میلیم}}$$

یا

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{G}{۲۰۰} = \frac{R}{\pi} = \frac{M}{۳۱۴۰}$$

تذکر: برای تبدیل درجه به گراد و بالعکس می‌توان از فرمول ساده‌تر $\frac{D}{۹} = \frac{G}{۱۰}$ استفاده کرد.

$$\begin{cases} D = \frac{۹}{۱۰}G \\ \text{یا} \\ G = \frac{۱۰}{۹}D \end{cases}$$

مثال: °۳۶ چند گراد و چند رادیان است؟

$$G = \frac{۱۰}{۹} \times ۳۶^\circ = ۴۰^\circ$$

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{۳۶\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۵}\text{rad}$$

نکته‌ی بسیار مهم: یک رادیان تقریباً °۵۷ است.

$$\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow D = \frac{۱۸۰ \times ۱}{\pi} = \frac{۱۸۰}{\pi} \approx ۵۷^\circ$$

$$۱\,\text{rad} = (\frac{۱۸۰}{\pi})^\circ \approx ۵۷^\circ$$

نکته‌ی مهم: π معادل °۱۸۰ یا ۲۰۰ گراد یا ۳/۱۴ رادیان است.

مثال: زوایای زیر که برحسب رادیان داده شده‌اند، به درجه تبدیل کنید؟

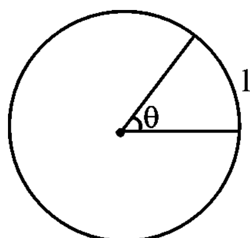
$۲\pi = ۳۶۰^\circ$, $\frac{\pi}{۳} = ۶۰^\circ$, $\frac{\pi}{۸} = ۲۲/۵^\circ$, $\frac{۳\pi}{۸} = ۳ \times ۲۲/۵^\circ = ۶۷/۵^\circ$

$\pi = ۱۸۰^\circ$, $\frac{\pi}{۴} = ۴۵^\circ$, $\frac{۵\pi}{۱۲} = ۵ \times ۱۵^\circ = ۷۵^\circ$

$\frac{\pi}{۲} = ۹۰^\circ$, $\frac{\pi}{۶} = ۳۰^\circ$, $\frac{\pi}{۱۲} = ۱۵^\circ$, $\frac{۳\pi}{۴} = ۳ \times ۴۵^\circ = ۱۳۵^\circ$

فرمول محاسبه‌ی طول کمان مقابل زاویه‌ی θ (برحسب رادیان) در دایره‌ای به شعاع R:

این فرمول عبارتست از: $l = R\theta$



مثال: در دایره‌ای به شعاع ۲/۵ متر، طول کمانی ۸/۷۵ متر است، اندازه‌ی این کمان چند رادیان است؟

$$l = R\theta \Rightarrow \theta = \frac{l}{R} = \frac{۸/۷۵}{۲/۵} = ۳/۵\text{rad}$$

فرمول محاسبه‌ی زاویه‌ی بین عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار:

این فرمول عبارتست از: $\alpha^\circ = \frac{|۶۰h - ۱۱m|}{۲}$، h نشانگر ساعت، m نشانگر دقیقه می‌باشد.

مثال: در ساعت ۲ و ۳۰ دقیقه، زاویه‌ی بین عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار چقدر است؟

$$\alpha^\circ = \frac{|۱۲۰ - ۳۳۰|}{۲} = ۱۰۵^\circ$$

تعریف دو زاویه‌ی متمم: دو زاویه را متمم یکدیگر گویند هرگاه مجموعشان ۹۰° یا ۱۰۰grad یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان باشد.

مثال:
- متمم ۲۰°، ۷۰° است.
- متمم $\frac{\pi}{۶}$، $\frac{\pi}{۳}$ است.
- متمم $x + \frac{\pi}{۶}$، $\frac{\pi}{۳} - x$ است.

تعریف دو زاویه‌ی مکمل: دو زاویه را مکمل گویند هرگاه مجموعشان ۱۸۰° یا ۲۰۰grad یا π رادیان باشد.

مثال:
- مکمل $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴}$ است.
- مکمل ۵۰grad، ۱۵۰grad است.
- مکمل $۲x + \frac{\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴} - ۲x$ است.

نکته: ۹۰° + متمم آن زاویه = مکمل هر زاویه

مثال: متمم و مکمل زاویه‌ی ۲۰° و $۳۰'$ و $۴۰''$ را بیابید؟

$۹۰^\circ = ۸۹^\circ$ و $۵۹'$ و $۶۰''$

۲۰° و $۳۰'$ و $۴۰''$

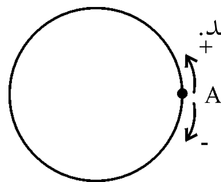
۶۹° و $۲۹'$ و $۲۰''$ متمّم $\Rightarrow$ ۱۵۹° , $۲۹'$, $۲۰''$ مکمل

تست: مجموع دو زاویه ۸۰گراد و تفاضلشان ۱۸° است، مقدار زاویه‌ی کوچکتر برحسب درجه کدام است؟

۱) ۲۲° ۲) ۲۷° ۳) ۲۶° ۴) ۲۳°

$$۸۰\ gard = ۷۲^\circ \Rightarrow \begin{cases} x + y = ۷۲^\circ \\ x - y = ۱۸^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۴۵^\circ \\ y = ۲۷^\circ \end{cases}$$

دایره‌ی مثلثاتی: دایره‌ایست که شعاعش برابر واحد (یعنی ۱) بوده و مطابق شکل، مبدأ شروع زاویه‌ها، نقطه‌ی A می‌باشد، ضمناً جهت حرکت عقربه‌های ساعت را جهت منفی و جهت مخالف آن را جهت مثبت مثلثاتی می‌گویند.

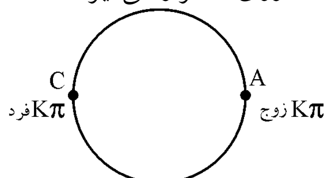


هر دور دایره در جهت مثبت مثلثاتی معادل ۳۶۰° یا ۲π رادیان یا ۴۰۰گراد می‌باشد.

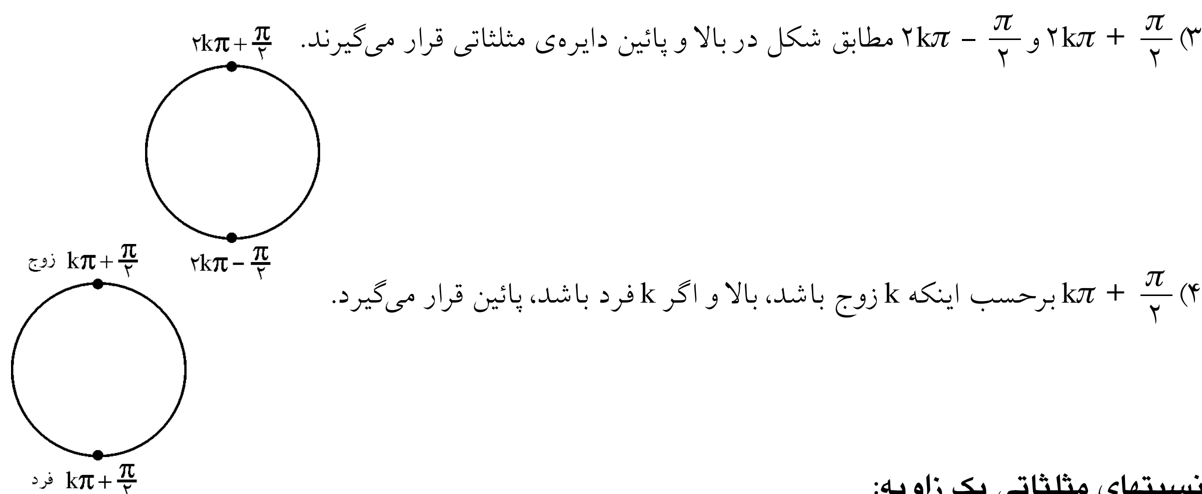
بنابراین k دور دایره در جهت مثبت مثلثاتی معادل $(۳۶۰k)^\circ$ یا $۲k\pi$ رادیان یا (۴۰۰k) گراد می‌باشد.

لذا: ۱) $۲k\pi$ یعنی k دور کامل دایره و لذا انتهای کمان $۲k\pi$ همیشه روی نقطه‌ی A است.

۲) $k\pi$ یعنی k نیم دور دایره، اگر k زوج باشد انتهای کمان روی A و اگر k فرد باشد انتهای کمان روی C قرار می‌گیرد.



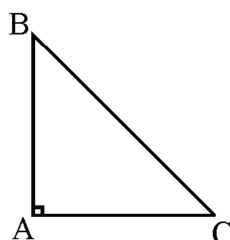
۳) $\frac{\pi}{۲}+ ۲k\pi$ و $\frac{\pi}{۲}- ۲k\pi$ مطابق شکل در بالا و پائین دایره‌ی مثلثاتی قرار می‌گیرند.



۴) $\frac{\pi}{۲}+ k\pi$ برحسب اینکه k زوج باشد، بالا و اگر k فرد باشد، پائین قرار می‌گیرد.

نسبتهای مثلثاتی یک زاویه:

در هر مثلث قائم الزاویه داریم:



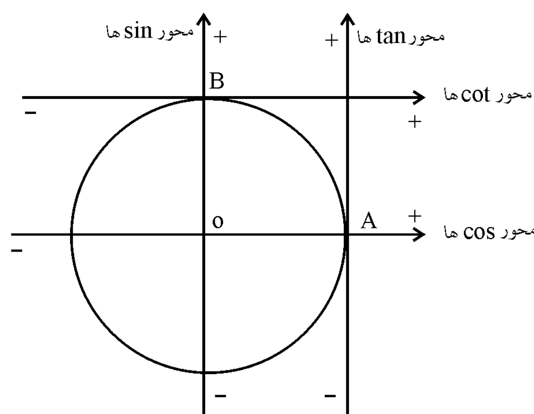
$\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$ = (هر زاویه حاده) sin

$\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$ = (هر زاویه حاده) cos

$\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$ = (هر زاویه حاده) tan

$\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$ = (هر زاویه حاده) cot

محورهای مثلثاتی و نسبتهای مثلثاتی یک زاویه:



محورهای مثلثاتی مطابق شکل معرفی شده‌اند.

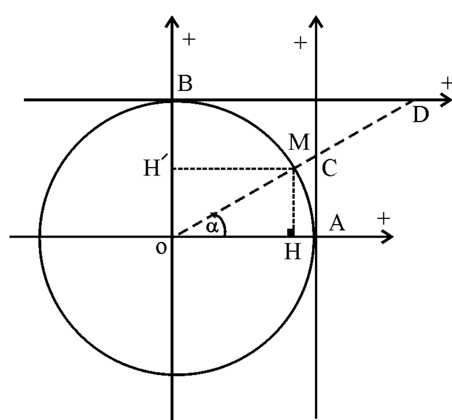
مبدأ محور cosها و sinها نقطه‌ی O می‌باشد.

مبدأ محور tanها نقطه‌ی A می‌باشد.

مبدأ محور cotها نقطه‌ی B می‌باشد.

ضمناً جهت منفی و جهت مثبت هر محور نیز روی شکل نمایش داده شده است.

نسبتهای مثلثاتی یک زاویه:



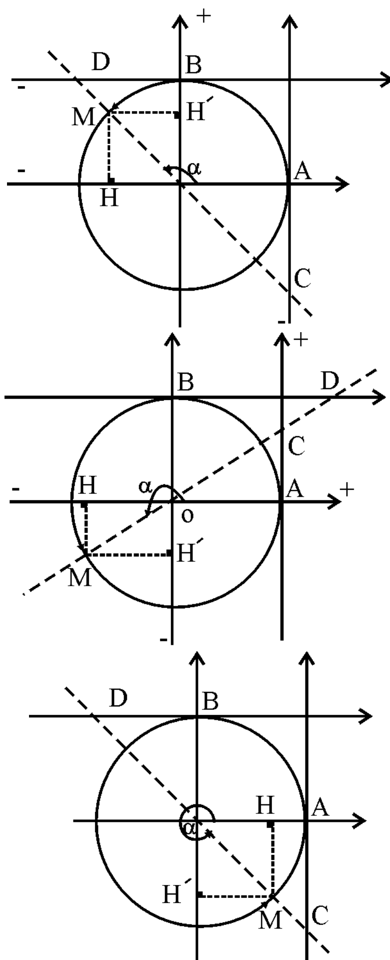
زاویه‌ی حاده‌ی α را مطابق شکل در نظر بگیرید، از نقطه‌ی M دو عمود MH و MH' را بر دو محور رسم کرده، اندازه جبری $\overline{OH'}$ را برابر $\sin\alpha$ و اندازه جبری $\overline{OH}$ را برابر $\cos\alpha$ تعریف می‌کنیم.

حال شعاع OM را امتداد داده تا محورهای تانژانت و کتانژانت را قطع کند، اندازه جبری $\overline{AC}$ را برابر $\tan\alpha$ و اندازه جبری $\overline{BD}$ را برابر $\cot\alpha$ تعریف می‌کنیم.

با توجه به تعریف محورها و جهت آنها، نتیجه می‌گیریم که اگر انتهای کمان روبرو به زاویه‌ای، در ناحیه‌ی اول دایره‌ی مثلثاتی باشد، سینوس و کسینوس و تانژانت و کتانژانت آن زاویه، همگی مثبت‌اند.

توجه داشته باشید که تعاریف فوق همان تعاریف نسبتهای مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه می‌باشند که قبلاً بیان شد، بعنوان مثال: $\overset{\triangle}{OHM} : \sin\alpha = \frac{HM}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{۱} = \overline{OH'}$

اکنون مختصراً به سه حالت دیگر که α در ربعهای دوم و سوم و چهارم است، توجه کنید.



حالت ب: $\frac{\pi}{۲} < \alpha < \pi$ (ربع دوم)

$\overline{OH'} = \sin\alpha > ۰$

$\overline{OH} = \cos\alpha < ۰$

$\overline{AC} = \tan\alpha < ۰$

$\overline{BD} = \cot\alpha < ۰$

حالت ج: $\pi < \alpha < \frac{۳\pi}{۲}$ (ربع سوم)

$\overline{OH'} = \sin\alpha < ۰$

$\overline{OH} = \cos\alpha < ۰$

$\overline{AC} = \tan\alpha > ۰$

$\overline{BD} = \cot\alpha > ۰$

حالت د: $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi$ (ربع چهارم)

$\overline{OH'} = \sin\alpha < ۰$

$\overline{OH} = \cos\alpha > ۰$

$\overline{AC} = \tan\alpha < ۰$

$\overline{BD} = \cot\alpha < ۰$

علائم نسبتهای مثلثاتی در چهار ناحیه:

زاویه α / نسبت مثلثاتی	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

تذکر مهم: tan و cot همیشه هم‌علامتند.

تذکر مهم: هر وقت که sin و cos هم‌علامت باشند، tan و cot مثبت‌اند. (ربعهای اول و سوم)

تست: هرگاه $\sin\alpha\cos\alpha > ۰$ و $\cos\alpha\cot\alpha < ۰$ باشد آنگاه انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی دایره‌ی مثلثاتی قرار دارد؟

۱) سوم ۲) دوم ۳) اول ۴) چهارم

حل:

$$\begin{cases} \sin\alpha\cos\alpha > ۰ \Rightarrow \text{ناحیه اول یا سوم} \\ \cos\alpha\cot\alpha < ۰ \Rightarrow \text{ناحیه‌ی سوم یا چهارم} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{ناحیه‌ی سوم}$$

نکته:

$$\begin{cases} ۰ < x < \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} \cos x > \sin x \\ \cot x > \tan x \end{cases} \\ \frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \sin x > \cos x \\ \tan x > \cot x \end{cases} \end{cases}$$

الف) تغییرات sin

زاویه	۰	↗	$\frac{\pi}{۲}$	↗	π	↗	$\frac{۳\pi}{۲}$	↗	۲π
سینوس زاویه	۰	↗	۱	↘	۰	↘	-۱	↗	۰

با توجه به جدول دیده می‌شود که sin در نواحی اول و چهارم، تابعی صعودی و در نواحی دوم و سوم، تابعی نزولی است، یعنی به عنوان مثال در ربع اول، هرچه زاویه بزرگتر شود، سینوسش نیز بزرگتر می‌شود.

مثال: $\sin ۳۰^\circ < \sin ۴۵^\circ < \sin ۶۰^\circ < \sin ۹۰^\circ$

$\sin ۱۳۵^\circ > \sin ۱۵۰^\circ$

$\sin ۲۱۰^\circ > \sin ۲۲۵^\circ$

$\sin ۳۰۰^\circ < \sin ۳۱۵^\circ$

تذکر: بچه‌ها مواظب باشید: توجه داشته باشید که در حالت کلی نمی‌توان گفت: $\alpha < \beta \Rightarrow \sin\alpha < \sin\beta$

ب) تغییرات cos

زاویه	۰	↗	$\frac{\pi}{۲}$	↗	π	↗	$\frac{۳\pi}{۲}$	↗	۲π
کسینوس زاویه	۱	↘	۰	↘	-۱	↗	۰	↗	۱

با توجه به جدول دیده می‌شود که cos در نواحی سوم و چهارم صعودی و در نواحی اول و دوم نزولی است، یعنی به عنوان مثال در ربع اول، هرچه زاویه بزرگتر شود، کسینوس کوچکتر می‌شود.

مثال: $\cos\frac{\pi}{۶} > \cos\frac{\pi}{۴} > \cos\frac{\pi}{۳} > \cos\frac{\pi}{۲}$

$\cos ۱۳۵^\circ > \cos ۱۵۰^\circ$

ج) تغییرات tan

زاویه	۰		$\frac{\pi}{۲}$		π		$\frac{۳\pi}{۲}$		۲π
تانژانت زاویه	۰	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	۰	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	۰

با توجه به جدول دیده می‌شود که تانژانت در هر ربع، تابعی اکیداً صعودی است، یعنی در هر ربع هر که بامش بیش، تانژانتش بیشتر، لذا:

$$\tan 30^\circ < \tan 45^\circ < \tan 60^\circ$$
$$\frac{\sqrt{3}}{3} < 1 < \sqrt{3}$$

پس یادت نره $\tan 60^\circ$ از $\tan 30^\circ$ بیشتره، ضمناً $\tan 45^\circ$ هم برابر ۱ است.

تذکر مهم: بچه‌ها مواظب باشید، گفتیم تابع تانژانت در هر ربع، تابعی اکیداً صعودی است، نه اینکه این تابع همواره اکیداً صعودی است به عنوان مثال: $2^\circ < 150^\circ$ ولی $\tan 2^\circ > \tan 150^\circ$

زیرا 2° در ناحیه‌ی اول بوده و لذا تانژانتش مثبت است در حالیکه 150° در ناحیه‌ی دوم بوده و تانژانتش منفی است، البته دلیل این امر وجود مجانب قائم $x = \frac{\pi}{2}$ است.

تذکر مهم: $\tan 90^\circ$ و $\tan 270^\circ$، تعریف نشده‌اند اما $\tan 90^{\circ +}$ (بسیار نزدیک به 90° ولی کمی از آن بیشتر) برابر $-\infty$ و $\tan 90^{\circ -}$ (بسیار نزدیک به 90° ولی کمی از آن کمتر) برابر $+\infty$ است توجه کنید که:

$90^{\circ +}$ در ربع دوم است.
$90^{\circ -}$ در ربع اول است.

توجه: مقادیر زیر با ماشین حساب، محاسبه شده‌اند:

$\tan 89/999999999^\circ \approx 5729577951$

$\tan 90/000000001^\circ \approx -5729577795$

بنابراین می‌توان گفت:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^+} \tan x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty \end{cases}$$

تذکر: خطوط $x = \frac{\pi}{2}$ و $x = \frac{3\pi}{2}$، مجانبهای قائم تابع $y = \tan x$ در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ می‌باشند.

د) تغییرات cot

زاویه	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
کتانژانت زاویه	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$

با توجه به جدول دیده می‌شود که کتانژانت در هر ربع، تابع اکیداً نزولی است، یعنی در هر ربع هر که بامش بیش، کتانژانتش کمتر، لذا:

$$\cot 30^\circ > \cot 45^\circ > \cot 60^\circ$$
$$\sqrt{3} > 1 > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

سعی کنید اینها را به خاطر بسپارید و سرسری و گذرا از کنارشان رد نشوید تا در آینده مثلاً اگر از شما سؤال شد که $\cot 30^\circ$، $\sqrt{3}$ است یا $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و یا اصلاً چند است نگوئید نمی‌دانم و یا نگوئید $\cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ و یا چیزهای دیگر

تذکر مهم: $\cot 0^\circ$ و $\cot 180^\circ$ و $\cot 360^\circ$ تعریف نشده‌اند (در واقع کتانژانت خود خود ۰° تعریف نشده است و ...) اما داریم:

$$\begin{cases}\lim_{x \to 0^+} \cot x = +\infty \\ \lim_{x \to 0^-} \cot x = -\infty\end{cases}$$

تذکر مهم: خطوط قائم $x=0$ و $x=\pi$ و $x=2\pi$ مجانبهای قائم تابع $y=\cot x$ در فاصله‌ی $[0,2\pi]$ می‌باشند.

حدود تغییرات نسبتهای مثلثاتی

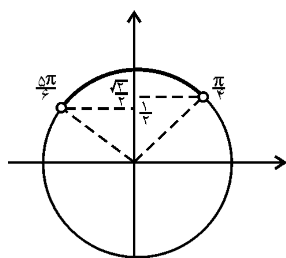
$-1 \le \sin\alpha \le 1$ (سینوس هر زاویه همیشه کوچکتر یا مساوی یک و بزرگتر یا مساوی منفی یک است)

$-1 \le \cos\alpha \le 1$ (کسینوس هر زاویه همیشه کوچکتر یا مساوی یک و بزرگتر یا مساوی منفی یک است)

$-\infty < \tan\alpha < +\infty$ (تانژانت هر زاویه، عددی حقیقی در فاصله‌ی $(-\infty,+\infty)$ است) و

$-\infty < \cot\alpha < +\infty$ (کتانژانت هر زاویه، عددی حقیقی در فاصله‌ی $(-\infty,+\infty)$ است) و

مثال: هرگاه $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$ باشد و $\sin\alpha = 2m-1$، حدود m را بیابید؟



$$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin\alpha < 1$$

(توجه داشته باشید که در فاصله‌ی داده شده، بیشترین مقدار sin، برابر ۱ و کمترین مقدار آن برابر $\frac{1}{2}$ است)

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < 2m-1 \le 1 \Rightarrow \frac{3}{2} < 2m \le 2 \Rightarrow \frac{3}{4} < m \le 1$$

روابط اصلی بین نسبتهای مثلثاتی

۱) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\begin{cases}\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha\end{cases}$

مثال: $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$

$\sin^2(x+y) + \cos^2(x+y) = 1$

۲) $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $(\cos\alpha \neq 0) \Rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \times \tan\alpha$

مثال: $\tan 7x = \frac{\sin 7x}{\cos 7x}$

$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \tan(\alpha+\beta)$

۳) $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $(\sin\alpha \neq 0) \Rightarrow \cos\alpha = \sin\alpha \times \cot\alpha$

مثال: $\Rightarrow \cot(3x+\frac{\pi}{4}) = \frac{\cos(3x+\frac{\pi}{4})}{\sin(3x+\frac{\pi}{4})}$

۴) $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$, $(\tan\alpha \neq 0, \cot\alpha \neq 0)$ یا $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \Rightarrow \tan\alpha \times \cot\alpha = 1$

مثال: $\Rightarrow \tan 2x . \cot 2x = 1$

$$5)\ \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha,\ (\cos\alpha \neq 0) \xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}} \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$$

$$6)\ \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha,\ (\sin\alpha \neq 0) \xrightarrow{\text{معکوس می‌کنیم}} \sin^2\alpha = \frac{1}{1+\cot^2\alpha}$$

تعریف سکانت و کسکانت یک زاویه:

معکوس $\sin\alpha$ را با $\operatorname{cosec}\alpha$ و معکوس $\cos\alpha$ را با $\sec\alpha$ نمایش می‌دهند.

معکوس نسبتهای مثلثاتی:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha \\ \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha \\ \frac{1}{\tan\alpha} = \cot\alpha \\ \frac{1}{\cot\alpha} = \tan\alpha \end{cases}$$

تذکر مهم: ملاحظه می‌شود که هر نسبت مثلثاتی که با co شروع می‌شود، معکوسش co ندارد و بالعکس، به این ترتیب، دیگر، معکوس $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$، قاطی نمی‌شوند.

تذکر: حدود تغییرات $\sec x$ و $\operatorname{cosec} x$

$$\begin{cases} -1 \le \sin x \le 1 \\ -1 \le \cos x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{cosec}x \le -1 \ \text{یا}\ \operatorname{cosec}x \ge 1 \\ \sec x \le -1 \ \text{یا}\ \sec x \ge 1 \end{cases}$$

مثال: هرگاه $\sin x = \frac{-1}{4}$ و انتهای کمان x در ناحیه‌ی سوم دایره‌ی مثلثاتی باشد، سایر نسبتهای مثلثاتی x را بیابید؟

در ناحیه‌ی سوم $\Rightarrow \begin{cases} - \\ - \\ + \\ + \end{cases}$ $\quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{1}{16} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$

$$\Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{15}}{4} \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{\sqrt{15}}{15} \quad \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x} = -\sqrt{15}$$

نسبتهای مثلثاتی ۵ زاویه‌ی مهم و نحوه‌ی به خاطر سپردنشان:

زاویه α / نسبت مثلثاتی	۰	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°
sin	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱
cos	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰
tan	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	تعریف‌نشده
cot	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۰

برای به خاطر سپردن اعداد جدول فوق (که معمولاً اکثراً نمی‌توانند مقادیر فوق را به خاطر بسپارند) توجه داشته باشید که اعداد سطر اول جدول عبارتند از: $\frac{\sqrt{0}}{2},\frac{\sqrt{1}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{4}}{2}$

یعنی پنج خط کسری، پنج رادیکال در صورت، پنج ۲ در مخرج و دست آخر، زیر رادیکالها به ترتیب اعداد از ۰ تا ۴ را قرار دادن.

$$\frac{}{\sqrt{}}\ ,\ \frac{}{\sqrt{}}\ ,\ \frac{}{\sqrt{}}\ ,\ \frac{}{\sqrt{}}\ ,\ \frac{}{\sqrt{}}$$

$$\frac{\sqrt{}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{0}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{1}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{4}}{2}$$

سطر دوم، همان سطر اول است، ترتیبش از آخر به اول، سطر سوم از تقسیم اعداد سطر اول به سطر دوم به دست آمده است و سطر چهارم، همان سطر سوم است، ترتیبش از آخر به اول.

نسبتهای مثلثاتی ۵ زاویه‌ی مهم دیگر:

زاویه α / نسبت مثلثاتی	0°	90°	180°	270°	360°
sin	۰	۱	۰	۱−	۰
cos	۱	۰	۱−	۰	۱
tan	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰
cot	تعریف نشده	۰	تعریف نشده	۰	تعریف نشده

نسبتهای مثلثاتی قرینه‌ی یک زاویه:

$$\begin{cases}-\sin\alpha=\sin(-\alpha)\\ -\cos\alpha\neq\cos(-\alpha)\\ -\tan\alpha=\tan(-\alpha)\\ -\cot\alpha=\cot(-\alpha)\end{cases}$$

یا

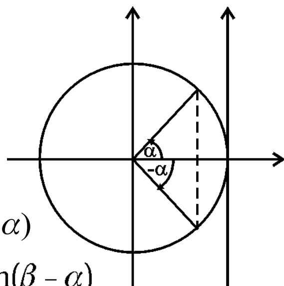
$$\begin{cases}\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(-\alpha)=+\cos\alpha\\ \tan(-a)=-\tan\alpha\\ \cot(-\alpha)=-\cot\alpha\end{cases}$$

مثال: $\sin(-60^\circ)=-\sin60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-60^\circ)=\cos60^\circ=\frac{1}{2}$

یعنی sin و tan و cot، همواره منفی زاویه را بیرون داده و اگر بیرون است، به زاویه می‌دهند ولی cos، منفی زاویه را می‌خورد (معمولاً می‌گویند cos منفی خور است یا cos منفی ندیده است)، البته این موضوع را به صورت صوری یاد نگیرید، به عنوان

مثال هرگاه α زاویه‌ای حاده باشد $-\alpha$، قرینه‌اش در ناحیه‌ی چهارم بوده و مطابق شکل زیر بسادگی مطالب فوق قابل درک می‌باشند.



تذکر: هرگاه دو زاویه قرینه باشند cosهایشان مساوی ولی سینوسهایشان قرینه‌ی یکدیگر خواهند بود.

نکته: $-\cos\alpha = \cos(\pi - \alpha)$

نتیجه:

$$\begin{cases}\sin(\alpha-\beta) = -\sin(\beta-\alpha)\\ \cos(\alpha-\beta) = \cos(\beta-\alpha)\\ \tan(\alpha-\beta) = -\tan(\beta-\alpha)\\ \cot(\alpha-\beta) = -\cot(\beta-\alpha)\end{cases}$$

نسبتهای مثلثاتی دو زاویه‌ی متمم:

$$\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cot\alpha$$
$$\cot(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \tan\alpha$$

توجه داشته باشید که α و $\frac{\pi}{۲} - \alpha$ متمم یکدیگرند، فرمولهای فوق بیانگر آنند که هرگاه دو زاویه متمم یکدیگر باشند sin یکی با cos دیگری و بالعکس و همچنین tan یکی با cot دیگری و بالعکس مساویند. یعنی اگر $\alpha + \beta = ۹۰^\circ$، آنگاه:

$$\begin{cases}\sin\alpha = \cos\beta\\ \cos\alpha = \sin\beta\\ \tan\alpha = \cot\beta\\ \cot\alpha = \tan\beta\end{cases}$$

$$\sin ۳۰^\circ = \cos ۶۰^\circ$$
$$\cot(\frac{\pi}{۴} - x) = \tan(\frac{\pi}{۴} + x)$$
$$\tan(۲x + \frac{\pi}{۶}) = \cot(\frac{\pi}{۳} - ۲x)$$

نکته: در هر مثلث مانند $\overset{\triangle}{ABC}$ می‌دانیم $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ$ لذا $\frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = \frac{\pi}{۲}$ و یا $\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = \frac{\pi}{۲}$ بنابراین طبق نکته‌ی فوق داریم: $\sin\frac{A+B}{۲} = \cos\frac{C}{۲}$ بهمین ترتیب در مورد بقیه‌ی نسبتها.

نسبتهای مثلثاتی دو کمان مکمل:

$$\sin(\pi - \alpha) = +\sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$

$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

توجه داشته باشید که α و $\pi - \alpha$ مکمل یکدیگرند.

فرمولهای فوق بیانگر آنند که هرگاه دو زاویه مکمل یکدیگر باشند، فقط sinهایشان با یکدیگر برابر بوده ولی cos و tan و cotهایشان قرینه‌ی یکدیگرند.

مثال: $\sin 135^\circ = +\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

نکته‌ی مهم:

$$x + y = \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \sin y \\ \cos x + \cos y = 0 \\ \tan x + \tan y = 0 \\ \cot x + \cot y = 0 \end{cases}$$

تست: حاصل عبارت $A = \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}$ **کدام است؟**

۱) ۲　　۲) ۱　　۳) ۰　　۴) $\frac{3}{2}$

حل:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi \\ \frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = 0 \\ \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 0 + 0 = 0$$

نکته: در هر مثلث مانند $\overset{\triangle}{ABC}$ می‌دانیم $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$ و یا $(\hat{A} + \hat{B}) + \hat{C} = \pi$ لذا طبق نکته‌ی قبل داریم:

$$\begin{cases} \sin(\hat{A} + \hat{B}) = \sin\hat{C} \\ \cos(\hat{A} + \hat{B}) = -\cos\hat{C} \\ \tan(\hat{A} + \hat{B}) = -\tan\hat{C} \\ \cot(\hat{A} + \hat{B}) = -\cot\hat{C} \end{cases}$$

در حالت کلی داریم:

$$\begin{cases} \sin(2k\pi \pm \alpha) = \sin(\pm\alpha) = \pm\sin\alpha \\ \cos(2k\pi \pm \alpha) = \cos(\pm\alpha) = \cos\alpha \\ \tan(2k\pi \pm \alpha) = \tan(\pm\alpha) = \pm\tan\alpha \\ \cot(2k\pi \pm \alpha) = \cot(\pm\alpha) = \pm\cot\alpha \end{cases}$$

یعنی مضارب 2π را می‌توان برای هر چهار نسبت مثلثاتی، حذف کرد، توجه داشته باشید که اگر α در ربع اول باشد، $2k\pi + \alpha$ در ربع اول قرار می‌گیرد. ضمناً $2k\pi$ نسبت مثلثاتی را عوض نمی‌کند، ضمن اینکه علامت را نیز عوض نمی‌کند.

مثال: الف) $\sin 390^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 850\,\text{grad} = \cos 50\,\text{grad} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\frac{73\pi}{4} = \tan(18\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

ب)
$$\begin{cases}\sin(k\pi+\alpha)=(-1)^k\sin\alpha\\ \cos(k\pi+\alpha)=(-1)^k\cos\alpha\\ \tan(k\pi+\alpha)=+\tan\alpha\\ \cot(k\pi+\alpha)=+\cot\alpha\end{cases}$$

توجه داشته باشید که اگر α در ربع اول باشد $k\pi+\alpha$ یا در ربع اول است یا در ربع سوم یعنی مضارب صحیح π را (چه زوج چه فرد چه مثبت چه منفی) می‌توان فقط برای tan و cot حذف کرد، ضمناً برای sin و cos مضارب زوج π قابل حذف بوده، اما برای حذف مضارب فرد π در sin و cos، جلوی جواب بایستی منفی بگذاریم، در ضمن $k\pi$، نسبت مثلثاتی را عوض نمی‌کند فقط ممکن است علامت عوض شود، آنهم فقط در sin و cos.

مثال:
$$\sin(71\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(168\pi-\frac{\pi}{3})=\cos(-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$
$$\tan(67\pi+\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

ج)
$$\sin[(2k+1)\frac{\pi}{2}+\alpha]=(-1)^k\cos\alpha$$
$$\cos[(2k+1)\frac{\pi}{2}+\alpha]=(-1)^{k+1}\sin\alpha$$
$$\tan[(2k+1)\frac{\pi}{2}+\alpha]=-\cot\alpha$$
$$\cot[(2k+1)\frac{\pi}{2}+\alpha]=-\tan\alpha$$

توجه داشته باشید که اگر α در ربع اول باشد $(2k+1)\frac{\pi}{2}+\alpha$ یا در ربع دوم و یا در ربع چهارم خواهد بود. در واقع $(2k+1)\frac{\pi}{2}$، نسبت را همیشه عوض می‌کند، اما علامت را نه:

مثال: $\Rightarrow$ $\sin(\frac{17\pi}{2}+\alpha)=(-1)^8\cos\alpha=\cos\alpha$
$$\cos(\frac{29\pi}{2}+\alpha)=(-1)^{15}\cos\alpha=-\cos\alpha$$

روش دیگر:
$$\sin(\frac{17\pi}{2}+\alpha)=\sin(8\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha)=\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$$

توجه داشته باشید که هر چهار تا $\frac{\pi}{2}$، معادل یک دور کامل دایره می‌باشد.

مثال: $\Rightarrow$ $\tan(3x-\frac{175\pi}{2})=-\tan(\frac{175\pi}{2}-3x)$
$$=-\tan(\frac{3\pi}{2}-3x)$$
$$=-\cot3x$$

۱۷۵ ÷ ۴ : دور ۴۳ ، ۳=باقیمانده

مثال: نسبتهای مثلثاتی داده شده را حساب کنید؟

۱) $\sin120^\circ=+\sin60^\circ=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲) $\cos210^\circ=\cos(\pi+\frac{\pi}{6})=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

۳) $\cot 315^\circ = \cot(2\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$

تذکر مهم در حالت کلی: در فرمولها و محاسبات فوق، هر کجا مضارب صحیح π بود، نسبت مثلثاتی تغییر نکرده و علامت بسته به ربع محاسبه می‌شود، اما هر کجا $\frac{\pi}{2}$ و یا مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ بود، sin به cos و بالعکس و tan به cot و بالعکس تبدیل شده و ضمناً علامت باز هم با توجه به ربع محاسبه می‌شود.

تست: حاصل عبارت $A = \sin 200^\circ + 2\sin 160^\circ - \cos 70^\circ + 3\sin 340^\circ - 4\cos 110^\circ$ **کدام است؟**

۱) $-\sin 20^\circ$ ۲) $2\sin 20^\circ$ ۳) $\sin 20^\circ$ ۴) $3\sin 20^\circ$

$$A = \sin(180^\circ + 20^\circ) + 2\sin(180^\circ - 20^\circ) - \sin 20^\circ + 3\sin(360^\circ - 20^\circ) - 4\cos(90^\circ + 20^\circ)$$

$$= -\sin 20^\circ + 2\sin 20^\circ - \sin 20^\circ - 3\sin 20^\circ + 4\sin 20^\circ = \sin 20^\circ$$

تست: حاصل عبارت $B = \tan(\alpha - 50\pi)\cot(\alpha + 17\pi) - \cos(38\pi - \alpha)\cos(\alpha - 42\pi)$ **کدام است؟**

۱) $-\sin^2\alpha$ ۲) $\sin^2\alpha$ ۳) $\cos^2\alpha$ ۴) $-\cos^2\alpha$

$$B = \tan\alpha.\cot\alpha - \cos(-\alpha)\cos\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

فرمولهای نسبتهای مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه برحسب نسبتهای مثلثاتی همان دو زاویه:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha.\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha.\cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$$

مثال: طرف دوم عبارات زیر را بنویسید؟

$$\sin x\cos 9x + \cos x\sin 9x = \sin(x + 9x) = \sin 10x$$

$$\cos 3x\cos 2x + \sin 3x\sin 2x = \cos(3x - 2x) = \cos x$$

$$\frac{\tan(x+y) + \tan(x-y)}{1 - \tan(x+y)\tan(x-y)} = \tan[(x+y) + (x-y)] = \tan 2x$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} - x)\sin(\frac{\pi}{4} + x) + \sin(\frac{\pi}{4} - x)\cos(\frac{\pi}{4} + x) = \sin[(\frac{\pi}{4} - x) + (\frac{\pi}{4} + x)] = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

مثال: در صورتی که $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ **و** $\tan\beta = -4$ **باشند و** α **حاده و** β **منفرجه باشند. مطلوبست:**

الف) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = (\ )(\ ) + (\ )(\ )$

ب) $\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha} = \frac{(\ )(\ ) + 1}{(\ ) - (\ )}$

$$\sin\alpha=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\cos^{۲}\alpha=۱-\sin^{۲}\alpha=\pm\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}\underset{\alpha\ \text{حاده}}{\Rightarrow}\cos\alpha=+\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$$

$$\tan\beta=-۴\Rightarrow\cos^{۲}\beta=\frac{۱}{۱+\tan^{۲}\beta}=\frac{۱}{۱۷}\Rightarrow\cos\beta=\pm\frac{\sqrt{۱۷}}{۱۷}\overset{\beta\ \text{منفرجه}}{\Rightarrow}\quad\cos\beta=\frac{-\sqrt{۱۷}}{۱۷}$$

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\tan\beta,\ \sin\beta=\cos\beta\,.\,\tan\beta=\frac{۴\sqrt{۱۷}}{۱۷}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=(\frac{۱}{۴})(-\frac{\sqrt{۱۷}}{۱۷})+(\frac{\sqrt{۱۵}}{۴})(\frac{۴\sqrt{۱۷}}{۱۷})=\frac{۴\sqrt{۲۵۵}-\sqrt{۱۷}}{۶۸}$$

$$\begin{cases}\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\sqrt{۱۵}\\ \cot\beta=\dfrac{۱}{\tan\beta}=-\dfrac{۱}{۴}\end{cases}$$

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{(\sqrt{۱۵})(-\frac{۱}{۴})+۱}{-\frac{۱}{۴}-\sqrt{۱۵}}$$

تست: هرگاه $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}+۵x-۷=۰$ باشند، حاصل $\tan(\alpha+\beta)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $-\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{۳}{۸}$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{s}{۱-p}=\frac{-۵}{۱+۷}=\frac{-۵}{۸}$$

تست: هرگاه $\tan(a-b)=\frac{۳}{۷}$ و $\tan(a+b)=\frac{۱}{۵}$ باشند، حاصل $\cot ۲b$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱۹}{۴}$ ۴) $\frac{۱۹}{۴}$

$$\cot ۲b=\cot[(a+b)-(a-b)]=\frac{\cot(a+b)\cot(a-b)+۱}{\cot(a-b)-\cot(a+b)}=\frac{(۵)(\frac{۷}{۳})+۱}{\frac{۷}{۳}-۵}=-\frac{۱۹}{۴}$$

نکته:

$$\begin{cases}\tan(\alpha+\beta)=k_{۱}\\ \tan(\alpha-\beta)=k_{۲}\end{cases}\quad\begin{cases}\tan ۲\alpha=\dfrac{k_{۱}+k_{۲}}{۱-k_{۱}k_{۲}}\\ \tan ۲\beta=\dfrac{k_{۱}-k_{۲}}{۱+k_{۱}k_{۲}}\end{cases}$$

تذکر: بچه‌ها مواظب باشید:

۱) $\sin x+\sin y\neq\sin(x+y)$

(اصطلاحاً برخی می‌گویند از sin، فاکتور می‌گیریم)

۲) $\frac{\sin ۳x}{۳}\neq\sin x$

۳) $۵\tan\frac{x}{۵}\neq\tan x$

۴) $۲\tan ۳x\neq\tan ۶x$

۵) $\cot ۷x-\cot ۳x\neq\cot ۴x$

۶) $(\sin ۲x)^{۲}\neq\sin^{۲}۴x^{۲}$

مثال: $\sin 15^\circ$ را حساب کنید؟

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30 = (\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2}) - (\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

یادآوری: $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ$ و ...

یادآوری: $\sin 15^\circ < \sin 75^\circ$ ولی $\cos 15^\circ > \cos 75$ و ...

نسبتهای مثلثاتی 15° و 75°:

زاویه / نسبتهای مثلثاتی	15°	75°
sin	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
cos	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
tan	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
cot	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$

تست: اگر در معادله‌ی $\tan^2 x - 2k\tan x + k - 1 = 0$ داشته باشیم $x' + x'' = \frac{3\pi}{4}$، k کدام است؟

۱) ۲ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) -2

$$x' + x'' = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \tan(x' + x'') = \tan\frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{S}{1-P} = -1$$

$$\frac{2k}{1-(k-1)} = -1 \Rightarrow k = -2$$

مثال: هرگاه x و y دو زاویه‌ی حاده بوده و داشته باشیم: $x + y = \frac{\pi}{3}, \tan x + \tan y = 3 - \sqrt{3}$، x و y را بیابید؟

$$x + y = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \tan(x+y) = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{s}{1-p} = \sqrt{3} \\ s = 3 - \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s = 3 - \sqrt{3} \\ p = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow z^2 - sz + p = 0 \Rightarrow z^2 - (3 - \sqrt{3})z + 2 - \sqrt{3} = 0$$

مجموع ضرائب صفر است. $\Rightarrow$ $z_1 = 1$ ، $z_2 = \frac{c}{a} = 2 - \sqrt{3}$

$$\begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan y = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$ یا $$\begin{cases} \tan x = 2 - \sqrt{3} \\ \tan y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 45^\circ \\ y = 15^\circ \end{cases}$$ یا $$\begin{cases} x = 15^\circ \\ y = 45^\circ \end{cases}$$

فرمولهای نسبتهای مثلثاتی 2α برحسب نسبتهای مثلثاتی α:

۱) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

۲) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

۳) $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

۴) $\cot 2\alpha = \dfrac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$

اثبات (۱) $\sin(2\alpha) = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

مثال: $\Rightarrow\ 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sin\alpha$

$4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha = 2(2\sin\alpha\cos\alpha)\cos 2\alpha = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = \sin 4\alpha$

$\cos^2 5x - \sin^2 5x = \cos 10x$

$\dfrac{2\tan 2x}{1-\tan^2 2x} = \tan 2(2x) = \tan 4x$

تذکر مهم: $\cos 2\alpha \neq \cos^2\alpha$

$$\begin{cases}\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha\\ \cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha\end{cases}$$

تست: هرگاه $\sin x - \cos x = \dfrac{1}{2}$ باشد، $\sin 2x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{3}{4}$

$(\sin x - \cos x)^2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 1 - 2\sin x\cos x = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = \dfrac{3}{4}$

تست: حاصل $\cos\dfrac{\pi}{12}\sin\dfrac{11\pi}{12}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\cos\dfrac{\pi}{12}\sin\dfrac{11\pi}{12} = \cos\dfrac{\pi}{12}\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

توجه کنید که $\sin\dfrac{\pi}{12} = \sin\dfrac{11\pi}{12}$ (زیرا مکملند)

فرمولهای نسبتهای مثلثاتی α برحسب کسینوس دو برابر قوس ($\cos 2\alpha$):

(فرمولهای طلائی) $\begin{cases}\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}\\ \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}\end{cases}$ $\begin{cases}\tan^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\\ \cot^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}\end{cases}$

مثال: $\cos^2 3x = \dfrac{1+\cos 6x}{2}$

$1 - \cos 100x = 2\sin^2 50x$

مثال: $\cos 22/5^\circ$ را حساب کنید؟

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2 22/5^\circ = \frac{1+\cos 45^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 22/5^\circ = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$22/5^\circ$ حاده است $\Rightarrow \cos 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

فرمولهای نسبتهای مثلثاتی α برحسب تانژانت نصف قوس ($\tan\frac{\alpha}{2}$):

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \\ \cos\alpha = \dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} \\ \cot\alpha = \dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2\tan\frac{\alpha}{2}} \end{cases}$$

بالاخص: $\Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \\ \cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \end{cases}$

مثال: $\dfrac{1-\tan^2 15^\circ}{1+\tan^2 15^\circ} = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

تست: حاصل عبارت $P = \dfrac{4\tan^2\alpha(1-\tan^2\alpha)^2}{(1+\tan^2\alpha)^4}$ به ازاء $\alpha = \dfrac{\pi}{16}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{8}$

$$P = \left(\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)^2 = (\sin 2\alpha\cos 2\alpha)^2 = \left(\frac{1}{2}\sin 4\alpha\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\sin^2 4\alpha \quad \overset{\alpha=\frac{\pi}{16}}{\Rightarrow} \quad p = \frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

فرمولهای نسبتهای مثلثاتی 3α برحسب نسبتهای مثلثاتی α:

$$\begin{cases} \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \\ \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \\ \tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} \\ \cot 3\alpha = \dfrac{3\cot\alpha - \cot^3\alpha}{1-3\cot^2\alpha} \end{cases}$$

اثبات فرمول (۱):

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$$
$$= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$
$$= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$
$$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$

$= ۳\sin\alpha - ۴\sin^۳\alpha$

مثال: $\Rightarrow ۳\sin۲x - ۴\sin^۳۲x = \sin۳(۲x) = \sin۶x$

$$\frac{۳\tan۲۰^\circ - \tan^۳۲۰^\circ}{۱ - ۳\tan^۲۲۰^\circ} = \tan۳(۲۰^\circ) = \tan۶۰^\circ = \sqrt{۳}$$

مثال: معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^۳ - ۳\sqrt{۳}x^۲ - ۳x + \sqrt{۳} = ۰$ را به کمک فرمول $\tan۳\alpha$ حل کنید؟

$$\sqrt{۳}(۱ - ۳x^۲) = ۳x - x^۳$$

$$\frac{۳x - x^۳}{۱ - ۳x^۲} = \sqrt{۳}$$

با فرض $x = \tan\alpha$ داریم:

$$\frac{۳\tan\alpha - \tan^۳\alpha}{۱ - ۳\tan^۲\alpha} = \sqrt{۳}$$

$$\tan۳\alpha = \sqrt{۳} \Rightarrow ۳\alpha = k\pi + \frac{\pi}{۳} \quad , k\in z$$

$$\alpha = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۹} = \Rightarrow x = \tan\alpha = \tan(\frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۹})$$

$$\begin{cases} k = ۰ \Rightarrow x_۱ = \tan\frac{\pi}{۹} \\ k = ۱ \Rightarrow x_۲ = \tan\frac{۴\pi}{۹} \\ k = ۲ \Rightarrow x_۳ = \tan\frac{۷\pi}{۹} \end{cases}$$

ریشه‌های معادله

فرمولهای تبدیل مجموع یا تفاضل دو نسبت مثلثاتی به حاصلضرب:

۱) $\sin p + \sin q = ۲\sin\frac{p+q}{۲}\cos\frac{p-q}{۲}$

۲) $\sin p - \sin q = ۲\cos\frac{p+q}{۲}\sin\frac{p-q}{۲}$

۳) $\cos p + \cos q = ۲\cos\frac{p+q}{۲}\cos\frac{p-q}{۲}$

۴) $\cos p - \cos q = -۲\sin\frac{p+q}{۲}\sin\frac{p-q}{۲}$

۵) $\tan p \pm \tan q = \frac{\sin(p\pm q)}{\cos p\cos q}$

۶) $\cot p \pm \cot q = \frac{\sin(q\pm p)}{\sin p\sin q}$

اثبات فرمول (۵): $\tan p + \tan q = \frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p\cos q + \cos p\sin q}{\cos p\cos q} = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$

مثال: عبارات زیر را به حاصلضرب تبدیل کنید؟

۱) $\sin۳x + \sin۵x = ۲\sin\frac{۳x + ۵x}{۲}\cos\frac{۳x - ۵x}{۲} = ۲\sin۴x\cos x$

۲) $2\cos x - \sqrt{3} = 2(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos x - \cos\frac{\pi}{6})$

$= 2(-2)\sin\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{6}}{2}$

$= -4\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12})\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12})$

۳) $\tan^2 x - 3 = (\tan x - \sqrt{3})(\tan x + \sqrt{3})$

$= (\tan x - \tan\frac{\pi}{3})(\tan x + \tan\frac{\pi}{3})$

$= \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{\cos x\cos\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\sin(x+\frac{\pi}{3})}{\cos x\cos\frac{\pi}{3}}$

۴) $1 + \sin\alpha - \cos 2\alpha = \sin\alpha + 2\sin^2\alpha = 2\sin\alpha(\frac{1}{2} + \sin\alpha) = 2\sin\alpha(\sin\frac{\pi}{6} + \sin\alpha)$

$= 4\sin\alpha\cos(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2})\sin(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2})$

۵) $\sin x - \cos x = \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x)$

$= 2\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2} = 2\cos\frac{\pi}{4}\sin(x-\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$

۶) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = \sin 2x + \tan\frac{\pi}{3}\cos 2x = \sin 2x + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos 2x$

$= \frac{\sin 2x\cos\frac{\pi}{3} + \cos 2x\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = 2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

تست: حاصل عبارت $A = \sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) -1 ۴) ۰

$A = 2\sin\frac{10+50}{2}\cos\frac{10-50}{2} - \cos 20$

$= 2\sin 30\cos 20 - \cos 20 = 2 \times \frac{1}{2}\cos 20^\circ - \cos 20^\circ = 0$

تست: حاصل عبارت $B = \frac{\sin(a-b)}{\sin a\sin b} + \frac{\sin(b-c)}{\sin b\sin c} + \frac{\sin(c-a)}{\sin c\sin a}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\sin a + \sin b + \sin c$ ۳) $\cos a + \cos b + \cos c$ ۴) $\sin a - \sin b - \sin c$

$B = \cot b - \cot a + \cot c - \cot b + \cot a - \cot c = 0$

نکته: $c - \sqrt{a^2+b^2} \le a\sin x + b\cos x + c \le c + \sqrt{a^2+b^2}$

اثبات:

$y = a(\sin x + \frac{b}{a}\cos x) + c$

فرض می‌کنیم $\frac{b}{a} = \tan\alpha$

$y = a(\sin x + \tan\alpha\cos x) + c$

$y = a\frac{\sin(x+\alpha)}{\cos\alpha} + c$

$$\sin(x+\alpha)=\frac{(y-c)\cos\alpha}{a}$$

چون $-۱ \le \sin(x+\alpha) \le ۱$ است لذا:

$$-۱\le\frac{(y-c)\cos\alpha}{a}\le ۱$$

$$-۱\le\frac{y-c}{a}\times\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\le ۱ \quad\Rightarrow\begin{cases}\cos^۲\alpha=\frac{۱}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۱}{۱+\frac{b^۲}{a^۲}}=\frac{a^۲}{a^۲+b^۲}\\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\end{cases}$$

$$-\sqrt{a^۲+b^۲}\le y-c\le\sqrt{a^۲+b^۲}$$

$$\text{Min}(y)=c-\sqrt{a^۲+b^۲}\le y\le c+\sqrt{a^۲+b^۲}=\text{Max}(y)$$

نکته‌ی مهم: هرگاه $\begin{cases}D=a\sin x+b\sin y\\D=a\cos x+b\cos y\\D=a\sin x+b\cos y\end{cases}$ آنگاه $\begin{cases}\text{Min}(D)=-(|a|+|b|)\\\text{Max}(D)=|a|+|b|\end{cases}$

تست: Min عبارت $D=۳\sin x-۴\cos y$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۷ ۳) ۷ ۴) -۵

$$\text{Min}(D)=-(|۳|+|-۴|)=-۷$$

فرمولهای تبدیل حاصلضرب دو نسبت مثلثاتی به مجموع یا تفاضل:

۱) $\sin a\cos b=\frac{۱}{۲}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$

۲) $\cos a\sin b=\frac{۱}{۲}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$

۳) $\cos a\cos b=\frac{۱}{۲}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$

۴) $\sin a\sin b=-\frac{۱}{۲}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$

۵) $\tan a\tan b=\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}=\frac{-\frac{۱}{۲}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]}{\frac{۱}{۲}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]}$

cota.cotb، tana.cotb و cota.tanb نیز، به طور مشابه به جمع تبدیل می‌شوند.

تست: حاصل عبارت $p=\sin ۱۰۵^\circ\cos ۷۵^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

روش اول: $P=\sin ۷۵^\circ\cos ۷۵^\circ=\frac{۱}{۲}\sin ۱۵۰^\circ=\frac{۱}{۲}\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$

روش دوم: $P=\frac{۱}{۲}[\sin(۱۰۵+۷۵)+\sin(۱۰۵-۷۵)]=\frac{۱}{۲}(۰+\frac{۱}{۲})=\frac{۱}{۴}$

تست: حاصل عبارت $A=\cos\frac{۲\pi}{۷}+\cos\frac{۴\pi}{۷}+\cos\frac{۶\pi}{۷}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

حل: طرف اول را در (نصف قدر نسبت) sin ۲ یعنی در $2\sin\frac{\pi}{7}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$A=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left[\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}\right)+\left(\sin\frac{7\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}\right)\right]$$ ← تبدیل به جمع

$$=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}$$

اتحادها و روابط مثلثاتی مهم:

۱) **(مهم)** $(\sin x\pm\cos x)^2=1\pm\sin 2x$

۲) **(مهم)** $\cos^4x-\sin^4x=\cos 2x$

اثبات: $\cos^4x-\sin^4x=(\cos^2x-\sin^2x)(\cos^2x+\sin^2x)=\cos 2x\times 1=\cos 2x$

تست: حاصل عبارت $T=\sin\frac{\pi}{12}\left(\cos^4\frac{\pi}{24}-\sin^4\frac{\pi}{24}\right)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) ۱

$$T=\sin\frac{\pi}{12}.\cos 2\left(\frac{\pi}{24}\right)=\sin\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

۳) $1+\tan^2x=\sec^2x$

۴) $1+\cot^2x=\mathrm{cosec}^2x$

۵) **(مهم)** $\cot x+\tan x=\frac{2}{\sin 2x}$

۶) **(مهم)** $\cot x-\tan x=2\cot 2x$

تست: حاصل عبارت $Z=\cot\frac{\pi}{16}-\tan\frac{\pi}{16}-2\tan\frac{\pi}{8}$ **کدام است؟**

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۴

$$Z=2\cot\frac{\pi}{8}-2\tan\frac{\pi}{8}=2\left(\cot\frac{\pi}{8}-\tan\frac{\pi}{8}\right)=4\cot\frac{\pi}{4}=4\times 1=4$$

۷) **(مهم)** $\sin^4x+\cos^4x=1-2\sin^2x\cos^2x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$

اثبات: نکته: $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ $\quad\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=1-2\sin^2x\cos^2x$

تست: حاصل عبارت $Y=\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{2}$

حل: می‌دانیم $\sin\frac{\pi}{8}=\sin\frac{7\pi}{8}$ و $\sin\frac{5\pi}{8}=\sin\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{8}$ لذا داریم:

$$Y=\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8}$$

$= ۲(\sin^{۴}\frac{\pi}{۸} + \cos^{۴}\frac{\pi}{۸}) = ۲(۱ - \frac{۱}{۲}\sin^{۲}\frac{\pi}{۴}) = ۲(۱ - \frac{۱}{۲}.\frac{۱}{۲}) = \frac{۳}{۲}$

۸) **(مهم)** $\sin^{۶}x + \cos^{۶}x = ۱ - ۳\sin^{۲}x\cos^{۲}x = ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^{۲}۲x$

اثبات: ***نکته:*** $a^{۳} + b^{۳} = (a+b)^{۳} - ۳ab(a+b)$

$\sin^{۶}x + \cos^{۶}x = (\sin^{۲}x + \cos^{۲}x)^{۳} - ۳\sin^{۲}x\cos^{۲}x(\sin^{۲}x + \cos^{۲}x) = ۱ - ۳\sin^{۲}x\cos^{۲}x$

۹) **(مهم)** $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^{۲}a - \sin^{۲}b = \cos^{۲}b - \cos^{۲}a$

تست: حاصل عبارت $X = \sin^{۲}(۴۵ + \alpha) - \sin^{۲}(۴۵ - \alpha)$ کدام است؟

۱) $\sin\alpha$ ۲) $۲\sin\alpha$ ۳) $\sin۲\alpha$ ۴) $۲\sin۲\alpha$

$X = \sin(۴۵ + \alpha + ۴۵ - \alpha).\sin(۴۵ + \alpha - ۴۵ + \alpha) = \sin۹۰\sin۲\alpha = \sin۲\alpha$

۱۰) **(مهم)** $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^{۲}a - \sin^{۲}b = \cos^{۲}b - \sin^{۲}a$

۱۱) $\tan(a+b) + \tan(a-b) = \frac{\sin۲a}{\cos^{۲}a - \sin^{۲}b}$

۱۲) $\cot(a+b) - \cot(a-b) = \frac{\sin۲b}{\sin^{۲}b - \sin^{۲}a}$

۱۳) **(مهم)**
$$\begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{۲}\sin(x + \frac{\pi}{۴}) = \sqrt{۲}\cos(\frac{\pi}{۴} - x) = \sqrt{۲}\cos(x - \frac{\pi}{۴}) \\ \sin x - \cos x = \sqrt{۲}\sin(x - \frac{\pi}{۴}) = -\sqrt{۲}\sin(\frac{\pi}{۴} - x) = -\sqrt{۲}\cos(\frac{\pi}{۴} + x) \end{cases}$$

تست: حاصل عبارت $A = \frac{\sin\frac{۵\pi}{۱۲} + \cos\frac{۵\pi}{۱۲}}{\sin\frac{۵\pi}{۱۲} - \cos\frac{۵\pi}{۱۲}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $-۲\sqrt{۳}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

حل: $A = \frac{\sqrt{۲}\sin(\frac{۵\pi}{۱۲} + \frac{\pi}{۴})}{\sqrt{۲}\sin(\frac{۵\pi}{۱۲} - \frac{\pi}{۴})} = \frac{\sin\frac{۲\pi}{۳}}{\sin\frac{\pi}{۶}} = \sqrt{۳}$

۱۴) $\tan(a+b) = k \Leftrightarrow \tan a + \tan b + k\tan a\tan b = k$

۱۵) $a + b = \frac{\pi}{۴} \Leftrightarrow (۱ + \tan a)(۱ + \tan b) = ۲$

تست: حاصل عبارت $M = (۱ + \tan۱۸^{\circ})(۱ + \tan۲۷^{\circ}) - ۳$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۲

حل: $۱۸^{\circ} + ۲۷^{\circ} = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow A = ۲ - ۳ = -۱$

۱۶) $\tan(a - b) = k \Rightarrow \tan a - \tan b - k\tan a\tan b = k$

۱۷) $\frac{۱ + \tan x}{۱ - \tan x} = \tan(x + \frac{\pi}{۴})$

۱۸) $\frac{\tan x-1}{\tan x+1} = \tan(x - \frac{\pi}{4})$

تست: حاصل عبارت $C = \frac{1-\tan 18^\circ}{1+\tan 18^\circ}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\tan 36^\circ$ ۳) $\tan 72^\circ$ ۴) $\tan 27^\circ$

حل: $C = \tan(45^\circ - 18^\circ) = \tan 27^\circ$

۱۹) **(مهم)**

$$\begin{cases} 1)\ 4\sin x \sin(\frac{\pi}{3}-x)\sin(\frac{\pi}{3}+x)=\sin 3x \\ 2)\ 4\cos x\cos(\frac{\pi}{3}-x)\cos(\frac{\pi}{3}+x)=\cos 3x \\ 3)\ \tan x\tan(\frac{\pi}{3}-x)\tan(\frac{\pi}{3}+x)=\tan 3x \end{cases}$$

تست: حاصل عبارت $A = \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) ۲

$$A=\sin 10^\circ \sin(60-10)\sin(60+10)=\frac{1}{4}\sin(3\times 10)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

تست: حاصل عبارت $B = \tan 20 \tan 40 \tan 100^\circ$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) $-\sqrt{3}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$B=\tan 20\tan 40(-\tan 80^\circ)=-\tan 20\tan(60-20)\tan(60+20)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

۲۰) **(مهم)**

$$\begin{cases} \tan x+\tan(x\pm\frac{\pi}{3})+\tan(x\pm\frac{2\pi}{3})=3\tan 3x \\ \cot x+\cot(x\pm\frac{\pi}{3})+\cot(x\pm\frac{2\pi}{3})=3\cot 3x \end{cases}$$

تست: حاصل عبارت $D = \tan 25^\circ + \tan 85^\circ - \tan 35^\circ$ کدام است؟

۱) $2+\sqrt{3}$ ۲) $2+3\sqrt{3}$ ۳) $4+3\sqrt{3}$ ۴) $6+3\sqrt{3}$

حل: می‌دانیم $-\tan 35^\circ = \tan 145^\circ$

$$D=\tan 25^\circ+\tan(25^\circ+60^\circ)+\tan(25^\circ+120^\circ)=3\tan(3\times 25^\circ)$$
$$=3(2+\sqrt{3})=6+3\sqrt{3}$$

۲۱) **(مهم)** هرگاه x و y و z سه زاویه باشند به طوریکه: $k\pi$ یا 2π یا π یا $x+y+z=0$ آنگاه داریم:

$$\begin{cases} \tan x+\tan y+\tan z=\tan x\tan y\tan z \\ \cot x\cot y+\cot y\cot z+\cot z\cot x=1 \end{cases}$$

مثال: $\Rightarrow \tan 9x - \tan 7x - \tan 2x = \tan 9x\tan(-7x)\tan(-2x) = \tan 9x\tan 7x\tan 2x$

تست: حاصل عبارت $A=\cot 10^\circ\cot 60^\circ+\cot 60^\circ\cot 110^\circ+\cot 10^\circ\cot 110^\circ$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

$10^\circ + 60^\circ + 110^\circ = \pi$ طبق نکته‌ی فوق $\Rightarrow A = 1$

۲۲) هرگاه x و y و z سه زاویه باشند به طوریکه $x+y+z=\frac{\pi}{۲}$ یا $\frac{۳\pi}{۲}$ یا ... یا $(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$ آنگاه داریم:

$$\begin{cases} \cot x+\cot y+\cot z=\cot x\cot y\cot z \\ \tan x\tan y+\tan y\tan z+\tan z\tan x=۱ \end{cases}$$

۲۳) $$\begin{cases} \frac{۱-\cos ۲\alpha}{\sin ۲\alpha}=\tan\alpha \\ \frac{۱-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\tan\frac{\alpha}{۲} \end{cases}$$

۲۴) $$\begin{cases} \frac{۱+\cos ۲\alpha}{\sin ۲\alpha}=\cot\alpha \\ \frac{۱+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\frac{\alpha}{۲} \end{cases}$$

تست: حاصل عبارت $A=\frac{۱+\cos ۴۰^\circ}{\sin ۴۰^\circ}$ **کدام است؟**

۱) $\sin ۲۰^\circ$ ۲) $\cos ۲۰^\circ$ ۳) $\tan ۲۰^\circ$ ۴) $\cot ۲۰^\circ$

حل:

$$A=\cot\frac{۴۰^\circ}{۲}=\cot ۲۰^\circ$$

تست: حاصل عبارت $B=\frac{\sin x}{۱+\cos x}+\frac{۱+\cos x}{\sin x}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۲}{\cos x}$ ۲) $\frac{۲}{\sin x}$ ۳) $\frac{۱}{\cos x}$ ۴) $\frac{۱}{\sin x}$

$$B=\tan\frac{x}{۲}+\cot\frac{x}{۲}=\frac{۲}{\sin x}$$

با مخرج مشترک‌گیری نیز، به همین جواب خواهید رسید.

آرکها: لغت Arc به معنی قوس (کمان) و یا قسمتی از یک منحنی است.

۱ـArcsinx: منظور از Arcsinx، $(-۱\le x\le ۱)$ برحسب قرارداد، یعنی تنها زاویه‌ی موجود در فاصلهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ که سینوس آن زاویه برابر x باشد، این زاویه را زاویه‌ی اصلی یا آرگومان اصلی می‌گویند لذا:

$$\text{Arcsin}x=\alpha,(-۱\le x\le ۱)\Leftrightarrow x=\sin\alpha \quad ,(-\frac{\pi}{۲}\le\alpha\le\frac{\pi}{۲})$$

مثال:

$$\begin{cases} \text{Arcsin}\frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۶} \\ \text{Arcsin}(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=-\frac{\pi}{۴} \\ \text{Arcsin}\ ۲=\text{تعریف نشده} \\ \text{Arcsin}\ ۱^+=\text{تعریف نشده} \\ \text{Arcsin}۱=\frac{\pi}{۲} \\ \text{Arcsin}\ (-۱)^-=\text{تعریف نشده} \\ \text{Arcsin}\ (-۱)=-\frac{\pi}{۲} \\ \text{Arcsin}\ (۰/۱)=(۵/۷۳۹۱۷۰۴۷۷)^\circ \text{، (به کمک ماشین حساب)} \\ \text{Arcsin}\ (-۰/۱)=-(۵/۷۳۹۱۷۰۴۷۷)^\circ \text{، (به کمک ماشین حساب)} \end{cases}$$

باید بدانیم که اگر y = Arcsinx آنگاه x = siny و بالعکس.

تذکر: منظور از arcsinx، (۱ ≥ x ≥ ۱-) کلیه‌ی زوایائی است که سینوس آنها برابر x باشد.

یعنی:

$$\arcsin x = \begin{cases} ۲k\pi + \alpha \\ ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases} ,(-\frac{\pi}{۲} \le \alpha \le \frac{\pi}{۲}, x = \sin\alpha)$$

مثال:

$$\begin{cases} \arcsin\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \begin{cases} ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \end{cases} \\ \arcsin(-۵) = \text{تعریف نشده} \end{cases}$$

۲ـ Arccosx: منظور از Arccosx، (۱ ≥ x ≥ ۱-) برحسب قرارداد، یعنی تنها زاویه‌ی موجود در فاصله‌ی [۰,π] که کسینوس آن زاویه برابر x باشد، این زاویه را زاویه‌ی اصلی یا آرگومان اصلی می‌گویند لذا:

$$\text{Arc}\cos x = \alpha \quad ,(-۱ \le x \le ۱) \Leftrightarrow x = \cos\alpha \quad , \quad ۰ \le \alpha \le \pi$$

مثال:

$$\begin{cases} \text{Arccos}\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴} = \frac{\pi}{۱۲} \\ \text{Arccos}(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \pi - \frac{\pi}{۶} = \frac{۵\pi}{۶} \\ \text{Arccos}\frac{-۳}{۲} = \text{تعریف نشده} \\ \text{Arccos}\ ۱^{+} = \text{تعریف نشده} \\ \text{Arccos}\ ۱ = ۰ \\ \text{Arccos}\ (-۱)^{-} = \text{تعریف نشده} \\ \text{Arccos}\ (-۱) = \pi \\ \text{Arccos}\ (\frac{۱}{۴}) = (۷۵/۵۲۲۴۸۷۸۲)^{\circ} \text{(به کمک ماشین حساب)،} \\ \text{Arccos}\ (-\frac{۱}{۴}) = (۱۰۴/۴۷۷۵۱۲۲)^{\circ} \text{(به کمک ماشین حساب)،} \end{cases}$$

باید بدانیم که اگر y = Arccosx آنگاه x = cosy و بالعکس.

تذکر: منظور از arccosx، (۱ ≥ x ≥ ۱-) کلیهٔ زاویائی است که کسینوس آنها برابر x باشد.

یعنی:

$$\arccos x = \begin{cases} ۲k\pi + \alpha \\ ۲k\pi - \alpha \end{cases} ,(۰ \le \alpha \le \pi, x = \cos\alpha)$$

مثال:

$$\begin{cases} \arccos\frac{۱}{۲} = \begin{cases} ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ ۲k\pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases} \\ \arccos(-\frac{۵}{۲}) = \text{تعریف نشده} \end{cases}$$

۳ـ Arctanx: منظور از Arctanx، $(-\infty < x < +\infty)$ برحسب قرار داد، یعنی تنها زاویه‌ی موجود در فاصله‌ی $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ که تانژانت آن زاویه، برابر x باشد، این زاویه را، زاویه‌ی اصلی یا آرگومان اصلی می‌گویند لذا:

$$\text{Arctan}x = \alpha, (-\infty < x < +\infty) \Leftrightarrow x = \tan\alpha \quad ,(-\frac{\pi}{۲} < \alpha < \frac{\pi}{۲})$$

مثال:

$$\begin{cases} \text{Arctan}\ ۱ = \frac{\pi}{۴} \\ \text{Arctan}(۱-\sqrt{۲}) = -\frac{\pi}{۸} \\ \text{Arctan}\ ۰ = ۰ \\ \text{Arctan}\ (+\infty) = (\frac{\pi}{۲})^- \\ \text{Arctan}\ (-\infty) = (-\frac{\pi}{۲})^+ \\ \text{Arctan}\ (۱۰۰۰) = (۸۹/۹۴۲۷۰۴۲۴)^\circ \text{ و (به کمک ماشین حساب)} \\ \text{Arctan}\ (-۱۰۰۰) = -(۸۹/۹۴۲۷۰۴۲۴)^\circ \text{ و (به کمک ماشین حساب)} \end{cases}$$

باید بدانیم که اگر $y = \text{Arctan}x$ آنگاه $x = \tan y$ و بالعکس.

تذکر: منظور از arctanx، $(-\infty < x < +\infty)$، یعنی کلیه‌ی زوایائی که تانژانت آن‌ها برابر x باشد.

یعنی: $\arctan x = k\pi + \alpha \quad ,(-\frac{\pi}{۲} < \alpha < \frac{\pi}{۲} \quad , x = \tan\alpha)$

مثال: $\arctan(-\frac{\sqrt{۳}}{۳}) = k\pi - \frac{\pi}{۶}$

۴ـ Arccotx: منظور از Arccotx، $(-\infty < x < +\infty)$ برحسب قرار داد یعنی تنها زاویه‌ی موجود در فاصله‌ی $(۰,\pi)$ که کتانژانت آن زاویه، برابر x باشد، این زاویه را زاویه‌ی اصلی یا آرگومان اصلی می‌گویند لذا:

$$\text{Arccot}x = \alpha, (-\infty < x < +\infty) \Leftrightarrow x = \cot\alpha, \quad (۰ < \alpha < \pi)$$

مثال:

$$\begin{cases} \text{Arccot}\sqrt{۳} = \frac{\pi}{۶} \\ \text{Arccot}(-۲-\sqrt{۳}) = \pi - \frac{\pi}{۱۲} = \frac{۱۱\pi}{۱۲} \\ \text{Arccot}\ ۰ = \frac{\pi}{۲} \\ \text{Arccot}(+\infty) = ۰^+ \\ \text{Arccot}(-\infty) = \pi^- \\ \text{Arccot}\ (۱۰۰۰) = (۰/۰۵۷۲۹۵۷۶)^\circ \text{، (به کمک ماشین حساب)} \\ \text{Arccot}\ (-۱۰۰۰) = -(۱۷۹/۹۴۲۷۰۴)^\circ \text{، (به کمک ماشین حساب)} \end{cases}$$

باید بدانیم که اگر $y = \text{Arccot}x$ آنگاه $x = \cot y$ و بالعکس.

تذکر: منظور از arccotx، $(-\infty < x < +\infty)$ یعنی کلیه‌ی زوایائی که کتانژانت آنها برابر x باشد.

یعنی: $\text{arccot}\, x = k\pi + \alpha \quad ,(۰ < \alpha < \pi), x = \cot\alpha)$

مثال: $\text{arccot}(\sqrt{۲}-۱) = k\pi + \frac{۳\pi}{۸}$

نکته‌ی مهم:
$$\begin{cases} -۱ \le x \le ۱ \Rightarrow -\frac{\pi}{۲} \le \text{Arcsinx} \le \frac{\pi}{۲} \\ -۱ \le x \le ۱ \Rightarrow ۰ \le \text{Arccosx} \le \pi \\ -\infty < x < +\infty \Rightarrow -\frac{\pi}{۲} < \text{Arctanx} < \frac{\pi}{۲} \\ -\infty < x < +\infty \Rightarrow ۰ < \text{Arccotx} < \pi \end{cases}$$

نکته‌ی مهم: توابع $y = \text{Arcsinx}$ و $y = \text{Arccosx}$ توابعی فرد هستند یعنی:

$$\begin{cases} \text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsinx} \\ \text{Arctan}(-x) = -\text{Arctanx} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \text{Arcsin}(-x) + \text{Arcsinx} = ۰, (-۱ \le x \le ۱) \\ \text{Arctan}(-x) + \text{Arctanx} = ۰, (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

در واقع در مورد این دو تابع دو شرط تابع فرد یعنی $\begin{cases} ۱) \forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f \\ ۲) f(-x) = -f(x) \text{ یا } f(-x) + f(x) = ۰ \end{cases}$ برقرارند.

نکته‌ی مهم: توابع $y = \text{Arccosx}$ و $y = \text{Arccotx}$ توابعی نه فرد و نه زوجند زیرا:

$$\begin{cases} \text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccosx} \\ \text{Arccot}(-x) = \pi - \text{Arccotx} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \text{Arccos}(-x) + \text{Arccos}\,x = \pi, (-۱ \le x \le ۱) \\ \text{Arccot}(-x) + \text{Arccotx} = \pi, (-\infty < x < +\infty) \end{cases}$$

مثال: مقادیر زیر را حساب کنید؟

الف) $\text{Arccot}(-\sqrt{۳}) = \pi - \text{Arccot}\sqrt{۳} = \pi - \frac{\pi}{۶} = \frac{۵\pi}{۶}$

ب) $\text{Atc tan}(-۱) = -\text{Arctan}(۱) = -\frac{\pi}{۴}$

ج) $\text{Arc cos}(\frac{-۱}{۳}) + \text{Arc cos}(\frac{۱}{۳}) = \pi$

د) $\text{Arc sin}(-\frac{۳}{۲}) + \text{Arc sin}(\frac{۳}{۲}) =$ تعریف نشده

هـ) $\text{Arc sin}(\tan\frac{۳\pi}{۴}) = \text{Arcsin}(-۱) = -\frac{\pi}{۲}$

و) $\tan[۲\text{Arccot}(-۱) + ۲\,\text{Arcsin}\frac{\sqrt{۲}}{۲}] = \tan[۲(\frac{۳\pi}{۴}) + ۲(\frac{\pi}{۴})] = \tan ۲\pi = ۰$

ز) $\text{Arcsin}(\sin\frac{۲\pi}{۳}) = \text{Arcsin}(\sin\frac{\pi}{۳}) = \text{Arcsin}(\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = \frac{\pi}{۳}$

ح) $\sin(\text{Arcsin}\frac{۱}{۲}) = \sin(\frac{\pi}{۶}) = \frac{۱}{۲}$

ط) $A = \sin[\underbrace{\text{Arccos}(-\frac{۳}{۵})}_{\alpha}] = \sin\alpha = ?$

فرض می‌کنیم $\text{Arccos}(-\frac{۳}{۵}) = \alpha$ لذا $\cos\alpha = \frac{-۳}{۵}$، $(۰ \le \alpha \le \pi)$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{۱ - \cos^۲\alpha} = +\sqrt{۱ - \frac{۹}{۲۵}} = \frac{۴}{۵}$$

$$\sin[\text{Arc cos}(-\frac{۳}{۵})] = \sin\alpha = \frac{۴}{۵}$$

تذکر: سینوس در فاصله‌ی $۰ \le \alpha \le \pi$ (ربعهای اول و دوم) همواره مثبت است.

ی) $B=\tan[\underbrace{\text{Arcsin}\,1}_{\frac{\pi}{2}}+\underbrace{\text{Arccos}\frac{1}{4}}_{\alpha}]=\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\cot\alpha$

حال فرض می‌کنیم $\text{Arccos}\frac{1}{4}=\alpha$ لذا $\cos\alpha=\frac{1}{4}$ و $(0\le\alpha\le\pi)$

$$\Rightarrow \sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=+\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{15}\Rightarrow B=-\cot\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{15}$$

ک) $C=\sin[\underbrace{\text{Arccos}\frac{2}{5}}_{\alpha}+2\underbrace{\text{Arcsin}(-\frac{1}{3})}_{\beta}]=\sin(\alpha+2\beta)$

$=\sin\alpha\cos2\beta+\cos\alpha\sin2\beta=(\ )(\ )+(\ )(\ )$

حل: فرض می‌کنیم.

$$\begin{cases}\text{Arccos}\frac{2}{5}=\alpha & \Rightarrow\cos\alpha=\frac{2}{5} \quad ,(0\le\alpha\le\pi)\\ \text{Arcsin}(-\frac{1}{3})=\beta & \Rightarrow\sin\beta=-\frac{1}{3} \quad ,(\frac{-\pi}{2}\le\beta\le\frac{\pi}{2})\end{cases}$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{5}\Rightarrow\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\frac{4}{25}}=+\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\sin\beta=-\frac{1}{3}\Rightarrow\cos\beta=\pm\sqrt{1-\frac{1}{9}}=+\frac{\sqrt{8}}{9}$$

$$\sin2\beta=2\sin\beta\cos\beta=2(-\frac{1}{3})(\frac{\sqrt{8}}{9})=\frac{-2\sqrt{8}}{27}$$

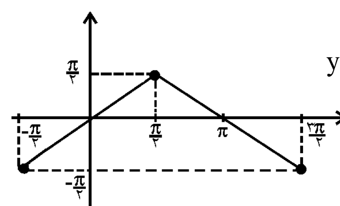
$$\cos2\beta=1-2\sin^2\beta=1-2(\frac{1}{9})=\frac{7}{9}$$

$$C=(\ )(\ )+(\ )(\ )=(\frac{\sqrt{21}}{5})(\frac{7}{9})+(\frac{2}{5})(\frac{-2\sqrt{8}}{27})=\frac{7\sqrt{21}}{45}-\frac{4\sqrt{8}}{135}$$

روابط و اتحادهای مهم در مورد آرکها:

$$1)\ y=\text{Arcsin}(\sin x)=\begin{cases}x & ,(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2})\\ \pi-x & ,(\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2})\end{cases}$$

نمودار تابع $y=\text{Arcsin}(\sin x)$



مثال:

$$\begin{cases}\text{Arcsin}(\sin\frac{7\pi}{6})=\pi-\frac{7\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}\\ \text{Arc}\sin(\sin\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

۲) $y = \text{Arc}\cos(\cos x) = \begin{cases} x & ,(\circ \le x \le \pi) \\ ۲\pi - x & ,(\pi \le x \le ۲\pi) \end{cases}$

مثال: $\begin{cases} \text{Arccos}(\cos \frac{۴\pi}{۳}) = ۲\pi - \frac{۴\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳} \\ \text{Arc}\cos(\cos \frac{\pi}{۷}) = \frac{\pi}{۷} \end{cases}$

۳) $y = \text{Arc}\tan(\tan x) = \begin{cases} x & ,(-\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲}) \\ x - \pi & ,(\frac{\pi}{۲} < x < \frac{۳\pi}{۲}) \end{cases}$

مثال: $\begin{cases} \text{Arctan}(\tan \frac{۷\pi}{۶}) = \frac{۷\pi}{۶} - \pi = \frac{\pi}{۶} \\ \text{Arctan}(\tan \frac{\pi}{۵}) = \frac{\pi}{۵} \end{cases}$

۴) $y = \text{Arccot}(\cot x) = \begin{cases} x & ,(\circ < x < \pi) \\ x - \pi & ,(\pi < x < ۲\pi) \end{cases}$

مثال: $\begin{cases} \text{Arccot}(\cot \frac{\pi}{۴}) = \frac{\pi}{۴} \\ \text{Arccot}(\cot \frac{۱۱\pi}{۶}) = \frac{۱۱\pi}{۶} - \pi = \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$

فرمولهای آرکها: ما فقط به ذکر فرمولهای اصلی اکتفا کرده‌ایم:

۱ـ فرمولهای Arcsinx

۱) $\circ \le x \le ۱ \Rightarrow \circ \le \text{Arcsin}x \le \frac{\pi}{۲}$

۲) $-۱ \le x \le \circ \Rightarrow -\frac{\pi}{۲} \le \text{Arcsin}x \le \circ$

۳) $-۱ \le x \le ۱$ یا $|x| \le ۱ \Rightarrow -\frac{\pi}{۲} \le \text{Arcsin}x \le \frac{\pi}{۲}$

۴) $\sin(\text{Arcsin}x) = x \quad , (|x| \le ۱)$

۵) $\cos(\text{Arcsin}x) = \sqrt{۱ - x^۲} , (|x| \le ۱)$

۶) $\tan(\text{Arcsin}x) = \frac{x}{\sqrt{۱ - x^۲}} \quad , (|x| < ۱)$

۷) $\cot(\text{Arcsin}x) = \frac{\sqrt{۱ - x^۲}}{x} \quad , (|x| \le ۱ \quad , \quad x \ne \circ)$

توجه کنید که: $\tan(\text{Arcsin}x) = \frac{\sin(\text{Arcsin}x)}{\cos(\text{Arcsin}x)} = \frac{x}{\sqrt{۱ - x^۲}}$

۸) $\text{Arc}\sin(-x) = -\text{Arcsin}x , (|x| \le ۱)$ یا $\text{Arcsin}(-x) + \text{Arcsin}x = \circ$

۲ـ فرمولهای Arccosx

۱) $\circ \le x \le ۱ \Rightarrow \circ \le \text{Arccos}x \le \frac{\pi}{۲}$

۲) $-۱ \leq x \leq ۰ \Rightarrow \frac{\pi}{۲} \leq \mathrm{Arccos}x \leq \pi$

۳) $-۱ \leq x \leq ۱$ یا $|x| \leq ۱ \Rightarrow ۰ \leq \mathrm{Arccos}x \leq \pi$

۴) $\cos(\mathrm{Arccos}x) = x \quad , (|x| \leq ۱)$

۵) $\sin(\mathrm{Arccos}x) = \sqrt{۱-x^۲} , (|x| \leq ۱)$

۶) $\cot(\mathrm{Arccos}\,x) = \frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}} \quad , (|x| < ۱)$

۷) $\tan(\mathrm{Arccos}x) = \frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x} \quad , (|x| \leq ۱ \quad , x \neq ۰)$

۸) $\mathrm{Arccos}(-x) = \pi - \mathrm{Arccos}x \ (|x| \leq ۱)$ یا $\mathrm{Arccos}(-x) + \mathrm{Arccos}x = \pi , (|x| \leq ۱)$

۹) $\mathrm{Arcsin}x + \mathrm{Arccos}x = \frac{\pi}{۲} , (|x| \leq ۱)$

مثال:

$\mathrm{Arcsin}\frac{۱}{۲} + \mathrm{Arccos}\frac{۱}{۲} = \frac{\pi}{۲}$ (مثال ملموس)

$\mathrm{Arcsin}(\frac{-۱}{۱۰}) + \mathrm{Arccos}(-\frac{۱}{۱۰}) = \frac{\pi}{۲}$ (مثال ناملموس)

$\mathrm{Arcsin}\frac{۷}{۳} + \mathrm{Arccos}\frac{۷}{۳} =$ تعریف نشده (مثال نامربوط)

۸) $\mathrm{Arcsin}(\sin x) + \mathrm{Arccos}(\cos x) = \frac{\pi}{۲} \ (x \in R)$

۳ـ فرمولهای Arctanx

۱) $x \geq ۰ \Rightarrow ۰ \leq \mathrm{Arctan}x < \frac{\pi}{۲}$

۲) $x \leq ۰ \Rightarrow -\frac{\pi}{۲} < \mathrm{Arctan}x \leq ۰$

۳) $x \in R \Rightarrow -\frac{\pi}{۲} < \mathrm{Arctan}x < \frac{\pi}{۲}$

۴) $\tan(\mathrm{Arctan}x) = x \quad , (x \in R)$

۵) $\cot(\mathrm{Arctan}x) = \frac{۱}{x} , (x \neq ۰)$

۶) $\sin(\mathrm{Arctan}\,x) = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$

۷) $\cos(\mathrm{Arctan}x) = \frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$

۸) $\mathrm{Arctan}x + \mathrm{Arctan}\frac{۱}{x} = \frac{\pi}{۲} \quad , (x > ۰)$

۹) $\mathrm{Arctan}x + \mathrm{Arctan}\frac{۱}{x} = -\frac{\pi}{۲} \quad , (x < ۰)$

۱۰) $\mathrm{Arctan}(-x) = -\mathrm{Arctan}x$ یا $\mathrm{Arctan}(-x) + \mathrm{Arctan}x = ۰ \quad (x \in R)$

۴ـ فرمولهای Arccotx

۱) $x \geq ۰ \Rightarrow ۰ < \mathrm{Arccot}x \leq \frac{\pi}{۲}$

۲) $x \le 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} \le \text{Arccot}x < \pi$

۳) $x \in R \Rightarrow 0 < \text{Arccot}x < \pi$

۴) $\tan(\text{Arccot}x) = \frac{1}{x}, (x \in R - \{0\})$

۵) $\cot(\text{Arccot}x) = x \quad , (x \in R)$

۶) $\cos(\text{Arccot}x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

۷) $\sin(\text{Arccot}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

۸) $\text{Arctan}x + \text{Arccot}x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in R)$ $\begin{cases} \text{Arctan}\sqrt{3} + \text{Arccot}\sqrt{3} = \frac{\pi}{2} & \text{مثال ملموس} \\ \text{Arctan}(-100) + \text{Arccot}(-100) = \frac{\pi}{2} & \text{مثال ناملموس} \end{cases}$

۹) $\text{Arccot}(-x) = \pi - (\text{Arccot}x), (x \in R)$ یا $\text{Arccot}(-x) + \text{Arccot}x = \pi, (x \in R)$

۱۰) $\text{Arctan}(\tan x) + \text{Arccot}(\cot x) = \frac{\pi}{2}, (x \in R)$

روابط مجموع و تفاضل در آرکها: مجموع یا تفاضل Arcهای همنام را می‌توان مانند روابط نسبتهای مثلثاتی دو کمان، به صورت یک Arc نوشت ولی با توجه به دامنهٔ Arcها و محدویت مجموعه مقادیر آرکها باید در تبدیل آنها دقت بسیار بیشتری کرد.

$$1)\ \text{Arcsin}a + \text{Arcsin}b = \begin{cases} \text{Arcsin}(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}) & ,(0 < a,b < 1, 0 \le a^2+b^2 \le 1) \\ \pi - \text{Arcsin}(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}) & ,(0 < a,b < 1, 1 \le a^2+b^2 \le 2) \end{cases}$$

$$2)\ \text{Arccos}\,a + \text{Arccos}b = \text{Arccos}(ab - \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}), \quad (1 \le a \le b \le 1)$$

$$3)\ \text{Arctan}a + \text{Arctan}b = \begin{cases} \text{Arctan}\frac{a+b}{1-ab} & ,(a,b > 0, ab < 1, a+b \le 2) \\ \pi + \text{Arctan}\frac{a+b}{1-ab} & ,(a,b > 0, ab > 1 \text{ یا } a+b > 2) \\ \frac{\pi}{2} & ,(ab = 1) \end{cases}$$

تذکر: اگر در رابطه‌های فوق a و b منفی باشند، با توجه به روابط گفته شده، مثبت اعداد مزبور را در نظر می‌گیریم.

مثال: $\text{Arctan}(-a) + \text{Arccot}(-a) = -\text{Arctan}a + \pi - \text{Arccot}a$

$= \pi - (\text{Arctan}a + \text{Arccot}a) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

تذکر: لازم به ذکر است که کلیهٔ روابطی که در مورد نسبتهای مثلثاتی $a \pm b$ یا $2a$ یا $3a$ یا ... قبلاً بیان شده است، با در نظر گرفتن حدود کمانهایی که به صورت Arc هستند، در مورد Arc نیز برقرارند.

تذکر مهم: کمانهای Arcsinx و Arctanx و Arccosecx کمانهائی همواره حاده (مثبت یا منفی) هستند و به ازاء مقادیر مثبت x، کمانها، حاده‌ی مثبت و به ازاء مقادیر منفی x، کمانها، حاده‌ی منفی هستند.

تذکر مهم: کمانهای Arccosx و Arccotx و Arcsecx کمانهائی همواره مثبت (حاده یا منفرجه) هستند. به ازاء مقادیر مثبت x، کمانها، حاده‌ی مثبت و به ازاء مقادیر منفی x، کمانها، منفرجه مثبت هستند.

توابع متناوب:

تابع حقیقی f با دامنهٔ D_f را یک تابع متناوب گوئیم هرگاه عددی مانند $T \neq ۰$ وجود داشته باشد، به طوریکه:

۱) $\forall x \in D_f \Rightarrow x \pm T \in D_f$

۲) $\forall x \in D_f : f(x+T) = f(x)$

در این صورت T را یک دورهٔ تناوب تابع f می‌گوئیم. اگر T یک دورهٔ تناوب تابع f باشد، تمامی اعداد به صورت KT $(k \in z, k \neq ۰)$ نیز دوره‌ی تناوب تابع f خواهند بود. کوچکترین مقدار مثبت T را کوچکترین دوره‌ی تناوب یا تناوب اصلی یا اساسی f می‌گویند و معمولاً وقتی از دوره‌ی تناوب یک تابع صحبت می‌کنیم، منظور همان تناوب اصلی آن می‌باشد.

مثال: ثابت کنید تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \cos ax$ متناوب است و تناوب اصلی آن را بیابید؟

حل: $D_f = R$ پس شرط اول برقرار است یعنی $\forall x \in D_f \Rightarrow x \pm T \in D_f$. حال باید داشته باشیم:

$$\forall x \in D_f : f(x+T) = f(x)$$

$$\downarrow$$

$$\cos a(x+T) = \cos ax$$

$$ax + aT = ۲k\pi \pm ax \Rightarrow aT = ۲k\pi \Rightarrow T = \frac{۲k\pi}{a}$$

و چون T کوچکترین عدد مثبت است لذا باید $k = ۱$ باشد بنابراین تناوب اصلی تابع مزبور برابر است با $\frac{۲\pi}{|a|}$.

روشهای تعیین دورهٔ تناوب توابع متناوب مختلف:

۱ـ دورهٔ تناوب توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ برابر ۲π و دورهٔ تناوب توابع $y = \tan x$ و $y = \cot x$ برابر π است.

۲ـ اگر f تابعی متناوب با دوۀ تناوب T باشد آنگاه دوره‌ی تناوب تابع $y = f(ax)$ برابر $\frac{T}{|a|}$ است بنابراین دوره‌ی تناوب توابع $y = \sin ax$ و $y = \cos ax$ برابر $\frac{۲\pi}{|a|}$ و دوره‌ی تناوب توابع $y = \tan ax$ و $y = \cot ax$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است.

مثال: دوره‌ی تناوب $y = \sin ۳x$ و $y = \cot(-\frac{x}{۲})$ را بیابید؟

$$y = \sin ۳x \rightarrow T = \frac{۲\pi}{۳} \xrightarrow{\text{امتحان مسأله}} f(x+\frac{۲\pi}{۳}) = \sin ۳(x+\frac{۲\pi}{۳}) = \sin(۳x+۲\pi) = \sin ۳x = f(x)$$

$$y = \cot(-\frac{x}{۲}) \rightarrow T = \frac{\pi}{|-\frac{۱}{۲}|} = ۲\pi$$

۳ـ توابع sin و cos اگر به توان زوج برسند، دوره‌ی تناوبشان نصف می‌شود و اگر به توان فرد برسند، دوره‌ی تناوبشان تغییری نمی‌کند. همچنین دوره‌ی تناوب توابع tan و cot، چه دارای توان زوج و چه دارای توان فرد، تغییری نمی‌کند بنابراین دوره‌ی تناوب توابع $y = \sin^{2n}(ax+b)$ و $y = \cos^{2n}(ax+b)$ و $y = \tan^{n}(ax+b)$ و $y = \cot^{n}(ax+b)$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ می‌باشد. $(n \in N)$

ولی دورهٔ تناوب توابع $y = \sin^{2n+1}(ax+b)$ و $y = \cos^{2n+1}(ax+b)$ برابر $\frac{2\pi}{|a|}$ است.

مثال: دوره‌ی تناوب توابع $y = \tan^{17}3x$ و $y = \cos^{14}\frac{x}{2}$ را بیابید؟

حل: دورهٔ تناوب اولی برابر $\frac{\pi}{3}$ و دوره‌ی تناوب دومی برابر 2π است.

۴ـ یک تابع ممکن است متناوب باشد، ولی تناوب اصلی نداشته باشد مانند توابع ثابت $f(x) = c$ (c ثابت) در واقع در مورد هر تابع ثابت، هر عدد حقیقی مثبت، می‌تواند دورهٔ تناوب آن باشد اما کوچکترین دوره‌ی تناوب وجود ندارد.

۵ـ توابعی که به صورت جبری و مثلثاتی باشند یا کمان x دارای توان یا زیر رادیکال باشد متناوب نیستند ولی در حالت خاص می‌توان، توابع مرکبی ساخت که قسمت جبری آنها به صورت $nx-[nx]$ باشد و ضمناً متناوب هم باشند که در مثالها آورده شده است. ضمناً اگر کمان یک تابع مثلثاتی به صورت خطی $ax+b$ نباشد، تابع متناوب نخواهد بود.

مثال: توابع $y = x + \tan x$، $y = \cot\frac{1}{x^2}$، $y = \cos(x^5-1)$، $y = x\sin x$، $y = \tan\sqrt{x}$، $y = \sin\frac{1}{x}$ **و... متناوب نیستند.**

البته توابعی جبری نیز وجود دارند که متناوب هستند مانند تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & ,(x \in z) \\ 0 & ,(x \notin z) \end{cases}$ که متناوب بوده و دوره‌ی تناوب آن $T = 1$ است.

ضمناً تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & ,(x \in Q) \\ 0 & ,(x \notin Q) \end{cases}$ متناوب است ولی تناوب اصلی ندارد.

۶ـ هرگاه تابعی از جمع و تفریق چندین تابع تشکیل شده باشد، کوچکترین مضرب مشترک تناوب اصلی آنها، تناوب اصلی تابع خواهد بود.

مثال: دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin\frac{x}{3} + \cos 2x + \tan\frac{x}{2}$ **را بیابید؟**

$$\left.\begin{array}{l} y = \sin\frac{x}{3} \to T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi \\ y = \cos 2x \to T = \frac{2\pi}{2} = \pi \\ y = \tan\frac{x}{2} \to T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ک.م.م} = T = 6\pi$$

نکته: برای تعیین کوچکترین مضرب مشترک چند کسر، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$\text{ک.م.م چند کسر} = \frac{\text{ک.م.م صورتها}}{\text{ب.م.م مخرجها}}$$

مثال: تناوب اصلی تابع $y = \sin 2x + \cos\frac{x}{2} + \tan\frac{3x}{5}$ **را بیابید؟**

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi \\ T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \\ T_3 = \frac{\pi}{\frac{3}{5}} = \frac{5\pi}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ک.م.م} = T = \frac{20\pi}{1} = 20\pi$$

یعنی اگر در تابع فوق به جای x، $x + 20\pi$ قرار دهیم، $f(x)$ تغییری نمی‌کند.

۷ـ هرگاه تابعی مثلثاتی به صورت حاصلضرب چند نسبت مثلثاتی باشد، برای تعیین تناوب اصلی آن، ابتدا تابع را به مجموع یا تفاضل تبدیل کرده و سپس تناوب اصلی آن را حساب می‌کنیم.

مثال: دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin 3x \cos 5x$ را حساب کنید؟

$$y = \sin 3x \cos 5x = \frac{1}{2}[\sin(3x + 5x) + \sin(3x - 5x)]$$
$$= \frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$$
$$\left.\begin{array}{l} T_1 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \\ T_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ک.م.م} = T = \frac{\pi}{1} = \pi$$

۸ـ هرگاه تابعی تناوب اصلی داشته باشد، اما چنانچه بتوانیم به کمک فرمولهای مثلثاتی، شکل ظاهری آن را چنان عوض کنیم، که تناوب اصلی کوچکتری حاصل شود، در این صورت، این تناوب اصلی کوچکتر، تناوب اصلی تابع خواهد بود، به خصوص در توابع مثلثاتی، باید ضابطه‌ی تابع را به کمک اتحادها و فرمولهای مثلثاتی تا حد امکان ساده کرده و سپس دوره‌ی تناوب را پیدا کنیم.

مثال: دوره‌ی تناوب توابع $f(x) = \frac{2\sin x - 3\cos x}{5\sin x + 4\cos x}$ و $g(x) = \cot x - \tan x$ را بیابید؟

حل: ظاهراً دوره‌ی تناوب تابع f، 2π است اما اگر صورت و مخرج تابع را بر $\cos x$ تقسیم کنیم.

خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{2\tan x - 3}{5\tan x + 4}$$

که دوره‌ی تناوب آن $T = \pi$ است.

در مورد تابع g نیز، ظاهراً دوره‌ی تناوب π است اما به کمک فرمول $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$ خواهیم داشت $f(x)=2\cot 2x$ که دوره‌ی تناوب آن $T = \frac{\pi}{2}$ است.

۹ـ دوره‌ی تناوب توابع مقابل برابر $\frac{\pi}{2}$ است:

$$\begin{cases} y = \sin^2 x + \cos^4 x \\ y = \cos^2 x + \sin^4 x \\ y = \sin^2 x - \sin^4 x \\ y = \cos^2 x - \cos^4 x \end{cases}$$

مثال: دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = \sin^2 x + \cos^4 x$ را بیابید؟

حل: ظاهراً دوره‌ی تناوب 2π است اما به کمک فرمولهای طلائی داریم:

$$f(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2$$

که پس از خلاصه کردن خواهیم داشت: $f(x) = \frac{3 + \cos^2 2x}{4}$ که دوره‌ی تناوب اصلی آن $\frac{\pi}{2}$ است.

۱۰ـ هرگاه تابع f به صورت حاصل جمع یا تفاضل دو تابع متناوب g و h باشد، به طوری که دوره‌ی تناوب g، عددی گویا و دوره‌ی تناوب h عددی گنگ باشد، در این صورت، تابع h ممکن است متناوب نباشد.

مثال: آیا تابع $f(x) = \sin ۲x + \sin\pi x$ متناوب است یا نه چرا؟

حل: خیر زیرا $T_۱ = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$ عددی است گنگ و $T_۲ = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$ عددی است گویا و می‌دانیم که بین دو عدد ۲ و π کوچکترین مضرب مشترک وجود ندارد.

مثال: تابع $f(x) = \cos x + \cos\alpha x$ را در نظر بگیرید، ثابت کنید این تابع وقتی متناوب است که α گویا باشد.

حل: فرض می‌کنیم f تابعی متناوب بوده و T دوره‌ی تناوب آن باشد لذا:

$$f(x+T) = f(x) \Rightarrow \cos(x+T) + \cos\alpha(x+T) = \cos x + \cos\alpha x$$

چون این رابطه به ازاء هر x از دامنه برقرار است، پس به ازاء $x = ۰$ داریم:

$$\cos T + \cos\alpha T = ۲ \Rightarrow \begin{cases} \cos T = ۱ \Rightarrow T = ۲k\pi \,, (k \in Z) \\ \cos\alpha T = ۱ \Rightarrow \alpha T = ۲k'\pi, (k' \in Z) \end{cases}$$

چون $T \neq ۰$، دو رابطه را برهم تقسیم می‌کنیم، $\alpha = \frac{k'}{k}$، چون k و k' هر دو صحیح می‌باشند، لذا α عددی گویاست، به این ترتیب می‌توانیم این فرضیه را بیاوریم:

۱۱ـ مجموع چند تابع متناوب، ممکن است متناوب نباشد، می‌توان این مطلب را به صورت کلی مطرح کرد، توابع $f(x) = A\sin ax + B\cos bx$، $f(x) = A\cos ax + B\cos bx$ و $f(x) = A\sin ax + B\sin bx$ ($a \neq b$ و هیچکدام از a و b و A و B صفر نیستند) تنها وقتی می‌توانند متناوب باشند که $\frac{a}{b}$، عددی گویا باشد.

۱۲ـ دوره‌ی تناوب هر یک از سه تابع $f(x) = A\sin ax + B\cos ax$، $g(x) = \frac{A\sin ax}{B + k\sin ax}$ و $h(x) = \frac{A\cos ax}{B + k\cos ax}$ برابر است با $\frac{۲\pi}{|a|}$ ($A \,, B \neq ۰$)

۱۳ـ در تابع مرکب fog، اگر تابع g متناوب باشد، تابع fog نیز متناوب است و دوره‌ی تناوب آن یا برابر دوره‌ی تناوب g و یا کوچکتر از آن است. مثلاً تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{\cos x}$ متناوب و با دوره‌ی تناوب ۲π است و اگر f متناوب باشد، تابع [f] نیز متناوب است زیرا ترکیب دو تابع $y = f(x)$ و $y = [x]$ می‌باشد مثلاً دوره‌ی تناوب $[\cos x]$ برابر ۲π است، ضمناً تابع $g(x) = |\sin x|$ متناوب است ولی تناوب اصلی آن π است.

۱۴ـ هرگاه $y = f(x)$ تابعی متناوب باشد، بسادگی می‌توان ثابت کرد که توابع $y = f(x+a)$، $f(x-a)$ و $y = f(x) \pm a$، $y = af(x)$، $y = \frac{a}{f(x)}$ و $y = \frac{f(x)}{a}$ همگی متناوب‌اند و دورهٔ تناوبشان، همان دوره‌ی تناوب تابع f خواهد بود.

۱۵ـ هرگاه f تابعی متناوب با تناوب اصلی T باشد، آن گاه توابع $\sqrt[n]{f}$ ($f \geq ۰$)، $\sin(f)$، $\tan(f)$، $\cot(f)$، $\text{Arcsin}(f)$، $\text{Arccos}(f)$، $\text{Arctan}(f)$، $\text{Arccot}(f)$، $\text{cosec}(f)$، $\log(f)$ ($f > ۰$) و [f] نیز متناوب‌اند و تناوب اصلی همگی آنها، برابر همان T است.

یعنی نمادهائی نظیر $\sqrt{\ }$ و [ ]، Arcsin، log و ... روی متناوب بودن تابع و همچنین دوره‌ی تناوب آنها تأثیری نمی‌گذارند. در مورد تابع $\sqrt[n]{f}$، اگر n زوج و $f > ۰$، ممکن است بخشی از فاصله‌ی تناوب اصلی در دامنه‌ی تابع قرار گیرد. مثلاً در تابع $f(x) = \sqrt[n]{\sin x}$، $T = ۲\pi$ و اگر فاصله‌ی تناوب را $[۰, ۲\pi]$ اختیار کنیم فاصله‌ی $(\pi, ۲\pi)$ عضو دامنه‌ی $f(x)$ نیست زیرا در این فاصله sin

منفی است و رادیکال تعریف نشده است.

مثال: کدامیک از توابع زیر متناوب‌اند، دوره‌ی تناوب توابعی راکه متناوب‌اند بیابید؟

۱) $y = Arccos(\sin ۲x)$ متناوب است و تناوب اصلی‌اش برابر است با $\frac{۲\pi}{۲} = \pi$

۲) $y = \sqrt{Arccot(\sin ۵x)}$ متناوب است و تناوب اصلی‌اش برابر است با $\frac{۲\pi}{۵}$

۳) $y = [\log(\tan^۴ ۲x)]$ متناوب است و تناوب اصلی‌اش برابر است با $\frac{\pi}{۲}$

تذکر مهم: توابع $y = \cos(\sin x)$ و $y = |\sin x|$ و $y = \sin^{۲n}x$ و $y = \sec(\sin x)$ متناوب‌اند ولی دوره‌ی تناوب آنها π است. در حالیکه مثلاً توابع $y = \sin(\cos x)$ و یا $y = cosec(\cos x)$ متناوب‌اند و دوره‌ی تناوب آنها همان ۲π است در حالت کلی اگر f تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب اصلی T باشد، آن‌گاه توابع $g(x) = \cos f(x)$ و $g(x) = \sec(f(x))$ نیز متناوب بوده و برای یافتن تناوب اساسی آنها، $\frac{T}{۲}$ را امتحان می‌کنیم. اگر $\forall x \in D_g : g(x+\frac{T}{۲}) = g(x)$ آنگاه تناوب اصلی g، $\frac{T}{۲}$ است، در غیر این صورت تناوب اصلی g همان T است.

۱۶ـ هرگاه f تابعی متناوب بوده و تناوب اصلی داشته باشد، آن‌گاه تابع $|f|$ متناوب است، در بعضی از موارد، تناوب اصلی تابع $|f|$ برابر تناوب اصلی تابع f است و در بعضی از موارد، تناوب اصلی تابع $|f|$، نصف تناوب اصلی تابع f است لذا برای پیدا کردن تناوب اصلی $|f|$، بهتر است تناوب اصلی f را نصف کرده، آن را در مورد $|f|$ امتحان کنیم. اگر صدق کرد تناوب اصلی $|f|$ نصف تناوب اصلی f خواهد بود، در غیر این صورت تناوب اصلی $|f|$ برابر تناوب اصلی f خواهد بود.

مثال: تناوب اصلی توابع زیر را بیابید؟

الف) $g(x) = |\sin^۲x + \sin x|$

$$f(x) = \sin^۲x + \sin x \rightarrow T = ۲\pi \overset{\text{نصف می‌کنیم}}{\rightarrow} \pi$$

$$\Rightarrow g(x+\pi) = |\sin^۲(x+\pi) + \sin(x+\pi)| = |\sin^۲x - \sin x| \neq g(x)$$

لذا تناوب اصلی g همان ۲π است.

ب) $f(x) = |\sin x|$

$$f(x) = \sin x \rightarrow T = ۲\pi \overset{\text{نصف می‌کنیم}}{\rightarrow} \pi$$

$$g(x+\pi) = |\sin(x+\pi)| = |-\sin x| = |\sin x| = g(x)$$

لذا تناوب اصلی g برابر π است.

البته برای تعیین دوره‌ی تناوب $g(x) = |\sin x|$ می‌توانستیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$g(x) = |\sin x| = \sqrt{\sin^۲x}$$

که می‌بینیم دوره‌ی تناوب آن π است.

۱۷ـ توابع $y = |\sin ax|$، $y = |\cos ax|$ و $y = |\tan ax|$ و $y = |\cot ax|$ همگی متناوب بوده و تناوب اصلی آنها $\frac{\pi}{|a|}$ است.

۱۸ـ اگر $y = f(x)$ متناوب باشد، در این صورت تابع $y = f(|x|)$ در صورتی متناوب است که f زوج باشد لذا:
از میان توابع $y = \sin|x|$، $y = \cos|x|$ و $y = \tan|x|$ و $y = \cot|x|$، فقط $y = \cos|x|$ متناوب است و تناوب اصلی‌اش برابر 2π است. زیرا $\cos|x| = \cos x$ و می‌دانیم دوره‌ی تناوب $y = \cos x$، 2π است.

۱۹ـ دوره‌ی تناوب اصلی توابع زیر برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است.

۱) $y = |\sin ax|$
۲) $y = |\cos ax|$
۳) $y = |\tan ax|$
۴) $y = |\cot ax|$
۵) $y = \cos(\sin ax)$
۶) $y = \cos(\cos ax)$
۷) $y = \cos(\tan ax)$
۸) $y = \cos(\cot ax)$
۹) $y = \frac{A\sin ax + B\cos ax}{C\sin ax + D\cos ax}$, $(\frac{A}{C} \neq \frac{B}{D})$
۱۰) $y = |\sin ax + \cos ax|$
۱۱) $y = |\sin ax - \cos ax|$

۲۰ـ دوره‌ی تناوب اصلی توابع زیر برابر $\frac{\pi}{|2a|}$ است.

۱) $y = |\sin ax| + |\cos ax|$, $y = |\sin^n ax| + |\cos^n ax|$, $(n \neq 2 , n \in N)$
۲) $y = |\tan ax| + |\cot ax|$, $y = |\tan^n ax| + |\cot^n ax|$, $(n \in N)$
۳) $y = \sin^{2n} ax + \cos^{2n} ax$, $(n \neq 1 , n \in N)$
۴) $y = \cot ax - \tan ax$
۵) $y = \cot^{2n-1} ax - \tan^{2n-1} ax$
۶) $y = \tan^{2n} ax + \cot^{2n} ax$, $(n \in N)$

مثال: تناوب اصلی تابع $y = |\sin ax + \cos ax|$ برابر $\frac{\pi}{4}$ است a را بیابید؟

$$T = \frac{\pi}{|a|} \Rightarrow \frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow |a| = 4 \Rightarrow a = \pm 2$$

۲۱ـ اگر دوره‌ی تناوب تابع $y = f(x)$، برابر T باشد، دوره‌ی تناوب تابع $y = f(\frac{a}{b}x)$ برابر $T|\frac{b}{a}|$ می‌باشد.

مثال: هرگاه f تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب $T = 4$ باشد، دوره‌ی تناوب تابع $y = f(-\frac{2}{3}x)$ را بیابید؟

$$T = |-\frac{3}{2}| \times 4 = 6$$

۲۲ـ توابع $f(x) = nx - \lfloor nx \rfloor$ و $g(x) = \frac{x}{n} - \lfloor \frac{x}{n} \rfloor$ توابعی متناوب می‌باشند و دوره‌ی تناوب آنها به ترتیب برابر $\frac{1}{n}$ و n است. $(n \in N)$

۲۳ـ اگر $f(x) = x - \frac{1}{n}\lfloor nx \rfloor$ و $g(x) = x - n\lfloor \frac{x}{n} \rfloor$، در این صورت می‌توان آنها را به صورتهای $f(x) = \frac{1}{n}(nx - \lfloor nx \rfloor)$ و $g(x) = n(\frac{x}{n} - \lfloor \frac{x}{n} \rfloor)$ نوشت و لذا هر دو متناوب بوده و دوره‌ی تناوب اولی برابر $\frac{1}{n}$ و دوره‌ی تناوب دومی برابر n است. $(n \in N)$

۲۴ـ تابع $y=(-1)^{\lfloor nx \rfloor}$، $(n \neq N)$ متناوب است و دوره‌ی تناوب آن $\frac{2}{|n|}$ است.

۲۵ـ دوره‌ی تناوب تابع $y=(-1)^{\lfloor nx \rfloor}(nx-\lfloor nx \rfloor)$، $(n \in N)$ برابر $\frac{2}{|n|}$ است.

۲۶ـ تابع $f(x)=\lfloor x \rfloor+\left\lfloor x+\frac{1}{n}\right\rfloor+\dots+\left\lfloor x+\frac{n-1}{n}\right\rfloor-\lfloor nx \rfloor$ تابعی متناوب بوده و دوره‌ی تناوبش $\frac{1}{n}$ است. $(n \in N)$

۲۷ـ تابع $y=f(a\lfloor x \rfloor)$ که در آن f یک تابع مثلثاتی می‌باشد متناوب است، اگر a مضربی از π باشد.

مثالهایی متنوع

از میان توابع زیر، کدامیک متناوب هستند، دوره‌ی تناوب هر یک را که متناوب است بیابید؟

۱) $y=x-\lfloor x \rfloor \Rightarrow T=\frac{1}{1}=1$ متناوب است و

۲) $y=\lfloor 10x \rfloor-10x=-(10x-\lfloor 10x \rfloor) \Rightarrow T=\frac{1}{10}$ متناوب است و

۳) $y=|\sin 3x|+|\cos 3x| \Rightarrow T=\frac{\pi}{2\times 3}=\frac{\pi}{6}$ متناوب است و

۴) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x} \Rightarrow T=2\pi$ متناوب است و

۵) $y=\cos 2x+\tan^2 \pi x \begin{cases} T_1=\frac{2\pi}{2}=\pi & \text{اصم} \\ T_2=\frac{\pi}{\pi}=1 & \text{گویا} \end{cases} \Rightarrow$ متناوب نیست

۶) $y=\tan^4 x+\cot^4 x \Rightarrow T=\frac{\pi}{2}$ متناوب است و

۷) $y=\frac{-x}{5}+\tan \pi x+\left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor-\cot \pi x$

$=-\left(\underbrace{\frac{x}{5}-\left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor}_{T_1=5}\right)+\underbrace{\cot \pi x-\tan \pi x}_{T_2=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}} \overset{\text{ک.م.م}}{\Rightarrow} T=\frac{5}{1}=5$

۸) $y=\sin\frac{x}{\sqrt{3}}-2\cos^3\frac{x}{\sqrt{2}}$

$T_1=\frac{2\pi}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=2\sqrt{3}\pi \quad T_2=\frac{2\pi}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=2\sqrt{2}\pi$

این تابع متناوب نیست، زیرا کوچکترین مضرب مشترک این دو عدد وجود ندارد.

۹) $y=\underbrace{x-[x]}+\sin \pi x$

$T_1=1 \quad , T_2=\frac{\pi}{\pi}=1 \qquad \Rightarrow T=1$ متناوب است و

۱۰) $y=\underbrace{3x-[3x]}+\underbrace{\tan x}$

$T_1=\frac{1}{3} \quad , \quad T_2=\pi \quad \Rightarrow$ متناوب نیست

۱۱) $y=[x]+[x+\frac{1}{3}]+[x+\frac{2}{3}]=[3x]\Rightarrow T=\frac{1}{3}$ متناوب است و

۱۲) $y=\sin^6 5x+\cos^6 5x \Rightarrow T=\frac{\pi}{10}$ متناوب است و

۱۳) $y=\sin(90x)^\circ+\cos^5 50x\,grad$ بایستی درجه و گراد را به رادیان تبدیل کنیم.

$y=\sin 90\times\frac{\pi}{180}x+\cos^5 50\times\frac{\pi}{200}x$

$=\sin\frac{\pi}{2}x+\cos^5\frac{\pi}{4}x$

$T_1=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4 \quad ,T_2=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8 \quad \Rightarrow T=8$ متناوب است و

یادآوری:

$$\begin{cases} \text{درجه}\times\frac{\pi}{180}\rightarrow \text{رادیان} \\ \text{گراد}\times\frac{\pi}{200}\rightarrow \text{رادیان}\end{cases}$$

۱۴) $y=\cos|x| \Rightarrow T=2\pi$ متناوب است و

۱۵) $y=\cos(\sin 2x)+\sin(\cos 3x)$

$T_1=\frac{\pi}{2} \quad T_2=\frac{2\pi}{3} \overset{\text{ک.م.م}}{\Rightarrow} T=\frac{2\pi}{1}=2\pi$

۱۶ـ تست: دوره‌ی تناوب تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{2}{3}x-[\frac{2}{3}x]$ **کدام است؟**

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: $T=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$

معادلات مثلثاتی:

حل معادلات مثلثاتی نظیر $2\sin x-1=0$، $\tan^2 x-3=0$ و $\cos^2 3x+3\cos 3x-4=0$ و ... نظیر حل معادلات جبری $2x-1=0$، $x^2-3=0$ و $x^2+3x-4=0$ و ... می‌باشد، با این تفاوت که در حل معادلات جبری، x مستقیماً بدست می‌آید، در حالیکه در حل یک معادله مثلثاتی، ابتدا یکی از نسبتهای مثلثاتی کمان مجهول را بدست آورده و سپس از روی آن، مقدار مجهول را بدست می‌آوریم.

برای حل یک معادلهٔ مثلثاتی، به کمک روابط و اتحادهای مثلثاتی و دستورهای جبری، مرتباً آن را به معادله‌های ساده‌تری تبدیل نموده تا به یکی از صورتهای زیر در آید و سپس به کمک دستورهای گفته شده در زیر، مقدار مجهول یعنی x را بدست می‌آوریم. در قسمتهای بعدی k همواره عضو Z است.

۱) $\sin x=a$

طریقه حل: در صورتی که $-1\le a\le 1$ باشد، می‌توان نوشت:

$$\sin x=\sin\alpha\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\alpha\\ x=2k\pi+\pi-\alpha\end{cases}\Rightarrow(-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2} \quad ,\alpha=\operatorname{Arcsin}a)$$

۲) $\cos x=b$

طریقهٔ حل: در صورتی که $-1\le b\le 1$ باشد، می‌توان نوشت:

$$\cos x=\cos\alpha\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi+\alpha\\ x=2k\pi-\alpha\end{cases} \quad ,(0\le\alpha\le\pi\ ,\alpha=\operatorname{Arccos}b)$$

۳) $\tan x = c$

طریقهٔ حل: در این حالت می‌توان نوشت:

$$\tan x = \tan\alpha \Rightarrow \{x = k\pi + \alpha \quad ,(-\frac{\pi}{۲} < \alpha < \frac{\pi}{۲} \quad ,\alpha = \text{Arctan} c)$$

تذکر: در این حالت $C \in R$ است.

۴) $\cot x = d$

طریقهٔ حل: در این حالت می‌توان نوشت:

$$\cot x = \cot\alpha \Rightarrow \{x = k\pi + \alpha \quad ,(۰ < \alpha < \pi \quad ,\alpha = \text{Arccot} d)$$

تذکر: در این حالت نیز $d \in R$ است.

به جوابهائی که به صورت فوق نوشته شده باشند، جوابهای کلی (عمومی) معادله می‌گویند. ممکن است در یک معادله، جوابهایی که در فاصلهٔ مشخصی قرار داشته باشند، مورد نظر باشند در این صورت به k، اعداد صحیح نسبت داده تا جوابهای خاص در فاصلهٔ مورد نظر بدست آیند.

حالات خاص در حل معادلات مثلثاتی:

در حل معادلات مثلثاتی لازم است بدانیم که:

$$\begin{cases} \sin(۲k\pi + \frac{\pi}{۲}) = ۱ \\ \sin(۲k\pi - \frac{\pi}{۲}) = -۱ \\ \sin k\pi = ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos ۲k\pi = ۱ \\ \cos(۲k\pi + \pi) = \cos(۲k+۱)\pi = -۱ \\ \cos(k\pi + \frac{\pi}{۲}) = ۰ \end{cases}$$

لذا حالات خاص در حل معادلات مثلثاتی عبارتند از:

$$\begin{cases} ۱)\ \sin x = ۱ \quad \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ ۲)\ \sin x = -۱ \quad \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \\ ۳)\ \sin x = ۰ \quad \Rightarrow x = k\pi \end{cases}$$

(در این حالت ریشه یا جواب معادله مضاعف است)

(در این حالت نیز ریشه یا جواب معادله مضاعف است)

$$\begin{cases} ۴)\ \cos x = ۱ \quad \Rightarrow x = ۲k\pi \\ ۵)\ \cos x = -۱ \quad \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi \\ ۶)\ \cos x = ۰ \quad \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

(در این حالت ریشه یا جواب معادله مضاعف است)

(در این حالت نیز ریشه یا جواب معادله مضاعف است)

مثال: معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید؟

$$۱)\ ۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰ \quad \Rightarrow \sin ۳x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = a$$

$$\sin 3x = \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

۲) $\tan^3 x - 3\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan^3 x = 3\sqrt{3} \Rightarrow \tan^3 x = (\sqrt{3})^3$

$\Rightarrow \tan x = \sqrt{3} = c \Rightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow \{x = k\pi + \frac{\pi}{3}$

۳) $\cos 4x - 3\sin 2x + 4 = 0$

$1 - 2\sin^2 2x - 3\sin 2x + 4 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 2x + 3\sin 2x - 5 = 0$

$a + b + c = 0$:
- $\sin 2x = 1 \Rightarrow \{2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \{x = k\pi + \frac{\pi}{4}$
- $\sin 2x = \frac{c}{a} = -\frac{5}{2}$ غیرقابل قبول

۴) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow$ حالت خاص $2x = k\pi \Rightarrow \{x = \frac{k\pi}{2}$

۵) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 \Rightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x$

$\sin^2 x(\sin x - 1) + \cos^2 x(\cos x - 1) = 0$

$(1 - \cos^2 x)(\sin x - 1) + (1 - \sin^2 x)(\cos x - 1) = 0$

$(1 - \cos x)(\sin x - 1)(1 + \cos x + 1 + \sin x) = 0$

$\cos x = 1 \Rightarrow$ حالت خاص $\{x = 2k\pi$

$\sin x = 1 \Rightarrow$ حالت خاص $\{x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$\sin x + \cos x = 2$ غیر ممکن زیرا $-\sqrt{2} \le \sin x + \cos x \le \sqrt{2}$

ضمناً توجه کنید که $\sin x \le 1$ و $\cos x \le 1$ و cos,sinx هر دو با هم یک نمی‌شوند.

۶) $\sin 5x + \sin 11x = 0 \Rightarrow \sin 11x = \sin(-5x)$ **یادآوری:** $-\sin x = \sin(-x)$

$$\begin{cases} 11x = 2k\pi - 5x \\ 11x = 2k\pi + \pi + 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{8} \\ x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

۷) $\cos 13x + \cos 6x = 0 \Rightarrow \cos 13x = -\cos 6x$

$\cos 13x = \cos(\pi - 6x) \Rightarrow \begin{cases} 13x = 2k\pi + \pi - 6x \\ 13x = 2k\pi - \pi + 6x \end{cases}$ **یادآوری:** $-\cos x = \cos(\pi - x)$

$$\begin{cases} x = \frac{2k\pi}{19} + \frac{\pi}{19} \\ x = \frac{2k\pi}{7} - \frac{\pi}{7} \end{cases}$$

۸) $\sqrt{۲}\sin^{۲}(۳x+\frac{\pi}{۶})-\cos(\frac{\pi}{۳}-۳x)=۰$

توجه کنید که $۳x+\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{\pi}{۳}-۳x$ متمم‌اند.

$$\sqrt{۲}\sin^{۲}(۳x+\frac{\pi}{۶})-\sin(۳x+\frac{\pi}{۶})=۰$$

$$\sin(۳x+\frac{\pi}{۶})(\sqrt{۲}\sin(۳x+\frac{\pi}{۶})-۱)=۰$$

$$\begin{cases}\sin(۳x+\frac{\pi}{۶})=۰ \Rightarrow \text{حالت خاص}\ \{۳x+\frac{\pi}{۶}=k\pi \Rightarrow \{x=\frac{k\pi}{۳}-\frac{\pi}{۱۸}\\ \sin(۳x+\frac{\pi}{۶})=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \begin{cases}۳x+\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\\ ۳x+\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{۳\pi}{۴}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۳۶}\\ x=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{۷\pi}{۳۶}\end{cases}\end{cases}$$

۹) $\tan(۱+\frac{x}{۴}).\tan(۱-\frac{x}{۵})=۱$

$$\tan(۱+\frac{x}{۴})=\frac{۱}{\tan(۱-\frac{x}{۵})} \Rightarrow \tan(۱+\frac{x}{۴})=\cot(۱-\frac{x}{۵}) \Rightarrow$$

$$\tan(۱+\frac{x}{۴})=\tan(\frac{\pi}{۲}-۱+\frac{x}{۵}) \Rightarrow \{۱+\frac{x}{۴}=k\pi+\frac{\pi}{۲}-۱+\frac{x}{۵} \xrightarrow{\times ۲۰}$$

$$\{۲۰+۵x=۲۰k\pi+۱۰\pi-۲۰+۴x \Rightarrow \{x=۲۰k\pi+۱۰\pi-۴۰$$

نکتهٔ تستی:

$$\begin{cases}\tan x.\tan y=۱ \Rightarrow x+y=k\pi+\frac{\pi}{۲}\\ \cot x.\cot y=۱ \Rightarrow x+y=k\pi+\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

مثال: جواب کلی معادلهٔ $\tan ۲x.\tan ۵x=۱$ را بیابید؟

$$۲x+۵x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x=\frac{k\pi}{۷}+\frac{\pi}{۱۴}$$

۱۰) $\sin x+\sqrt{۳}\cos x=۱$

$$\sin x+\tan\frac{\pi}{۳}\cos x=۱$$

$$\sin x+\frac{\sin\frac{\pi}{۳}}{\cos\frac{\pi}{۳}}\cos x=۱ \Rightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{۳}+\cos x\sin\frac{\pi}{۳}=\cos\frac{\pi}{۳}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{۳})=\sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases}x+\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x+\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=۲k\pi-\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

۱۱) $\sin x+\cos x=\sqrt{۲}$

$$\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۲} \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۴})=۱ \Rightarrow \{x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \{x=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}$$

۱۲) $\cos(x+\frac{\pi}{۶}).\cos(x-\frac{\pi}{۶})=\frac{۱}{۴}$

یادآوری: $\cos(a+b).\cos(a-b)=\cos^{۲}a-\sin^{۲}b$

$\cos^۲x - \cos^۲\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \cos^۲x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \{x = ۲\pi \pm \frac{\pi}{۴} \\ \cos x = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \{x = ۲k\pi \pm \frac{۳\pi}{۴} \end{cases}$$

نکتهٔ تستی:

$$\begin{cases} \sin^۲x = \sin^۲\alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha \\ \cos^۲x = \cos^۲\alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha \\ \tan^۲x = \tan^۲\alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha \\ \cot^۲x = \cot^۲\alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha \end{cases}$$

مثال: جواب کلی معادلهٔ مقابل را بیابید؟

$۲\cos^۲x = ۱$

$\cos^۲x = \frac{۱}{۲} = \cos^۲\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \{x = k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$

۱۳) $\tan ۵x = \tan ۲x + \tan ۳x$

$A = \tan ۵x + \tan(-۲x) + \tan(-۳x) = ۰$

یادآوری: $x + y + z = ۰ \Rightarrow \tan x + \tan y + \tan z = \tan x.\tan y.\tan z$

$A = \tan ۵x.\tan(-۲x).\tan(-۳x) = ۰$

$$\begin{cases} ۵x = ۰ \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۵} \\ ۲x = ۰ \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} \\ ۳x = ۰ \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۳} \end{cases}$$

۱۴) $\tan ۲x - ۵\cot ۲x = ۴$

$\overset{\times \tan ۲x}{\Rightarrow} \tan^۲ ۲x - ۴\tan ۲x - ۵ = ۰$

$$a + c = b \quad \begin{cases} \tan ۲x = -۱ \Rightarrow \{x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۸} \\ \tan ۲x = \frac{-c}{a} = ۵ = \tan\alpha \Rightarrow \{x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\alpha}{۲}, (\alpha = \text{Arctan}\, ۵) \end{cases}$$

۱۵) $\sin x\cos^۳x - \cos x \sin^۳x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۴\sin x \cos x (\cos^۲x - \sin^۲x) = ۱$

$۲\sin ۲x\cos ۲x = ۱ \Rightarrow \sin ۴x = ۱ \Rightarrow \{۴x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \{x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$

۱۶) $۲\cos ۲x.\cos ۳x = \cos ۵x$

$۲\times\frac{۱}{۲}[\cos(۲x + ۳x) + \cos(۲x - ۳x)] = \cos ۵x$

$\cos x = ۰ \Rightarrow \{x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$

۱۷) $\sin 8x - \sin 3x = \sin 5x$

$\sin 8x = \sin 3x + \sin 5x$

$2\sin 4x\cos 4x = 2\sin\frac{3x+5x}{2}\cos\frac{3x-5x}{2}$

$\sin 4x(\cos 4x - \cos x) = 0$

$\sin 4x = 0 \Rightarrow \{4x = k\pi \Rightarrow \{x = \frac{k\pi}{4}$

$\cos 4x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + x \\ 4x = 2k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} \\ x = \frac{2k\pi}{5} \end{cases}$

۱۸) $6\sin^2 3x + \cos 12x = 4$

$6 \times \frac{1-\cos 6x}{2} + 2\cos^2 6x - 1 = 4$

$2\cos^2 6x - 3\cos 6x - 2 = 0 \Rightarrow \cos 6x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4}$

$\cos 6x = 2$ غیرقابل قبول

$\cos 6x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \cos 6x = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \{6x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \{x = \frac{k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}$

۱۹) $\tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2} = 4 - 2\tan x$

$-2\cot x + 2\tan x = 4$

یادآوری: $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$

$\cot x - \tan x = -2$

$2\cot 2x = -2 \Rightarrow \cot 2x = -1 \Rightarrow \{2x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \{x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

۲۰) $\text{Arccos}3x - \text{Arccos}x = \text{Arcsin}x$

$\text{Arccos}3x = \underbrace{\text{Arcsin}x + \text{Arccos}x}_{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \text{Arccos}3x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 3x = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow \{x = 0$

۲۱) $(\text{Arctan}x)^2 + (\text{Arccot}x)^2 = \frac{5\pi^2}{8}$

$(\text{Arctan}x)^2 + (\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}x)^2 = \frac{5\pi^2}{8}$

یادآوری: $\text{Arctan}x + \text{Arccot}x = \frac{\pi}{2}$

$\text{Arctan}x = t \Rightarrow t^2 + (\frac{\pi}{2} - t)^2 = \frac{5\pi^2}{8} \Rightarrow 16t^2 - 8\pi t - 3\pi^2 = 0$

$(4t - 3\pi)(4t + \pi) = 0 \begin{cases} t = \frac{3\pi}{4} \\ t = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$

یادآوری: $-\frac{\pi}{2} < \text{Arctan}x < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} \text{Arctan}x = \frac{۳\pi}{۴} & \text{غیرقابل قبول} \\ \text{یا} \\ \text{Arctan}x = \frac{-\pi}{۴} \Rightarrow x = \tan(-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow \{x = -۱ \end{cases}$$

۲۲) $\underbrace{\text{Arctan}۲x}_{\alpha} - \underbrace{\text{Arccot}x}_{\beta} = \frac{\pi}{۴}$

$\alpha - \beta = \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \tan(\alpha - \beta) = \tan\frac{\pi}{۴}$

$\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{۱ + \tan\alpha\tan\beta} = ۱ \Rightarrow \frac{۲x - \frac{۱}{x}}{۱ + ۲x.\frac{۱}{x}} = ۱ \Rightarrow ۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰ \quad \Rightarrow x = \frac{۳ \pm \sqrt{۱۷}}{۴}$

معادلات کلاسیک

معادله‌ی کلاسیک نوع اول:

هر معادله به صورت $a\sin x + b\cos x = c$ را یک معادله‌ی کلاسیک نوع اول می‌گویند، برای حل این گونه معادلات دو روش زیر را بیان می‌کنیم.

روش اول: می‌دانیم $\begin{cases} \sin x = \frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱ + \tan^۲\frac{x}{۲}} \\ \cos x = \frac{۱ - \tan^۲\frac{x}{۲}}{۱ + \tan^۲\frac{x}{۲}} \end{cases}$، با فرض $\tan\frac{x}{۲} = t$ داریم: $\begin{cases} \sin x = \frac{۲t}{۱ + t^۲} \\ \cos x = \frac{۱ - t^۲}{۱ + t^۲} \end{cases}$

با جایگذاری این مقادیر در معادله‌ی کلاسیک فوق، معادله‌ای درجه دوم بر حسب t به صورت زیر به دست می‌آید:

$(c + b)t^۲ - ۲at + (c - b) = ۰ \quad (*)$

از حل این معادله، t یعنی همان $\tan\frac{x}{۲}$ و از آنجا x به دست می‌آید.

نکته: شرط وجود جواب برای معادله‌ی کلاسیک نوع اول:

شرط اینکه معادله‌ی کلاسیک نوع اول، دارای جواب باشد، آنستکه معادله‌ی (*) که معادله‌ای از درجهٔ دوم بر حسب t است دارای جواب باشد لذا بایستی $\Delta' \geq ۰$ باشد، یعنی:

$a^۲ - (c + b)(c - b) \geq ۰ \Rightarrow a^۲ + b^۲ \geq c^۲$

بنابراین شرط وجود جواب برای معادله‌ی کلاسیک نوع اول آنستکه $a^۲ + b^۲ \geq c^۲$ باشد.

تست: کدام معادله‌ی زیر دارای جواب است؟

۱) $۳\sin x - ۲\cos x = ۲۰$ ۲) $\sin۲x + \cos۲x = ۳$

۳) $\sqrt{۳}\sin x + \cos x = ۵$ ۴) $\sin۳x - \sqrt{۲}\cos۳x = \sqrt{۳}$

حل: واضح است که گزینهٔ ۴ درست است زیرا: $1^2+\sqrt{2}^2 \geq \sqrt{3}^2$

روش دوم: در این روش طرفین معادله را بر a یا b تقسیم می‌کنیم، داریم:

$$\sin x + \frac{b}{a}\cos x = c$$

با فرض $\frac{b}{a} = \tan\alpha$ داریم:

$$\sin x + \tan\alpha\cos x = c$$

$$\sin x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos x = c \Rightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{a}\cos\alpha$$

با شرط $-1 \leq \frac{c}{a}\cos\alpha \leq 1$ معادله‌ی فوق به سادگی قابل حل است.

به مثالهای ۱۰ و ۱۱، در معادلات مثلثاتی حل شده، در چند صفحهٔ قبل توجه کنید.

نکته: هرگاه معادله‌ی $a\sin mx + b\cos mx = c$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، آنگاه $\sin mx = \frac{a}{c}$ و $\cos mx = \frac{b}{c}$

نکته: معادله‌ی $a\sin mx + b\cos mx = c$ در فاصله‌ی $[0,2m]$، با شرط $a^2+b^2 > c^2$، دارای $2m$ جواب و با شرط $b = c$، دارای $2m+1$ جواب است.

مثال: معادله‌ی $2\sin 3x + \cos 3x = 1$، در فاصله‌ی $[0,2\pi]$ چند جواب دارد؟

حل: $b = c \Rightarrow 2m+1 = 2(3)+1 = 7$

معادله‌ی کلاسیک نوع دوم:

هر معادله به صورت $a\tan x + b\cot x = c$ را یک معادله‌ی کلاسیک نوع دوم می‌گویند، با ضرب طرفین معادله در $\tan x$ یا $\cot x$ داریم:

$$\overset{\times \tan x}{\Rightarrow} \quad a\tan^2 x - c\tan x + b = 0 \quad (*)$$

از حل این معادله، $\tan x$ و از آنجا، x به دست می‌آید.

***نکته:* شرط وجود جواب برای معادله‌ی کلاسیک نوع دوم:**

شرط اینکه معادله کلاسیک نوع دوم، دارای جواب باشد آنستکه معادله‌ی (*) که معادله‌ای از درجه دوم است، دارای جواب باشد لذا بایستی $\Delta \geq 0$ باشد، یعنی: $c^2 - 4ab \geq 0 \Rightarrow c^2 \geq 4ab$

بنابراین شرط وجود جواب برای معادله‌ی کلاسیک نوع دوم آنستکه $c^2 \geq 4ab$ باشد، به مثال ۱۴ معادلات مثلثاتی حل شده در چند صفحه‌ی قبل توجه کنید.

نکته: در معادلات نوع اول و دوم، هرگاه دو ریشه، متمم باشند، آنگاه $a = b$ است.

مثال: معادله‌ی $2\tan x + (3-2m)\cot x = 4$، به ازاء چه مقداری از m، دو ریشه‌ی متمم دارد؟

حل: $2 = 3 - 2m \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

نکته: معادله‌ی $atanmx + bcotmx = c$ در فاصله‌ی $[0,2\pi]$، $4m$ جواب دارد.

معادله‌ی کلاسیک نوع سوم:

هر معادله به صورت $asin^2x + bsinxcosx + ccos^2x = d$ را یک معادله‌ی کلاسیک نوع سوم می‌گویند.

برای حل این گونه معادلات:

الف) اگر $a \neq d$ باشد، طرفین معادله را بر cos^2x تقسیم کرده، معادله‌ی حاصل را که معادله‌ای از درجه دوم بر حسب $tanx$ است حل می‌کنیم.

ب) اگر $a = d$ باشد، طرفین معادله را بر sin^2x تقسیم کرده، معادله‌ی حاصل را که معادله‌ای از درجه‌ی دوم برحسب $cotx$ است حل می‌کنیم.

مثال: معادله‌ی مثلثاتی $3sin^2x + 2sin2x + 5cos^2x = 6$ را حل کنید؟

$$3sin^2x + 4sinxcosx + 5cos^2x = 6$$

چون $a \neq d$ است معادله را بر cos^2x تقسیم می‌کنیم در این صورت داریم:

$$3tan^2x + 4tanx + 5 = 6(1 + tan^2x)$$

$$3tan^2x - 4tanx + 1 = 0 \Rightarrow a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} tanx = 1 \\ tanx = \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = k\pi + Arctan\frac{1}{3} \end{cases}$$

معادله‌ی کلاسیک نوع چهارم:

هر معادله به صورت $a(sinx \pm cosx) + bsinx\ cosx = c$ را یک معادله‌ی کلاسیک نوع چهارم می‌گویند، برای حل این گونه معادلات دو روش زیر را بیان می‌کنیم.

روش اول: با فرض $sinx + cosx = z$ داریم: $1 + 2sinxcosx = z^2$ و از آنجا $sinx\ cosx = \frac{z^2-1}{2}$

با جایگذاری این مقادیر در معادله‌ی فوق داریم:

$$az + b(\frac{z^2-1}{2}) = c \quad (*)$$

بـا حـل ایـن مـعادله z بـه دست آمـده، پس از تـعیین z، از حـل مـعادله‌ی $sinx+cosx = z$، x بـه دست مـی‌آید. چـون $sinx+cosx=z$، لذا معادله‌ی (*) در صورتی دارای جواب است که $-\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{2}$

روش دوم: می‌دانیم $sinx + cosx = \sqrt{2}cos(x - \frac{\pi}{4})$ به توان ۲ می‌رسانیم:

$$1 + 2sinxcosx = 2cos^2(x - \frac{\pi}{4})$$

$$sinxcosx = cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}$$

با جایگذاری این مقادیر در معادله‌ی فوق داریم:

$$a\sqrt{۲}\cos(x-\frac{\pi}{۴})+b[\cos^۲(x-\frac{\pi}{۴})-\frac{۱}{۲}]=c$$

از حل این معادله: $\cos(x-\frac{\pi}{۴})$ و از آنجا x به دست می‌آید.

تست: با فرض $\sin(x-\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{۲}$، مقدار m در معادله‌ی $m=\frac{۱}{\sin x}-\frac{۱}{\cos x}$ برابر است با:

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

حل:

$$\sin x-\cos x=m\sin x\cos x$$

$$\sqrt{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})=m[\frac{۱}{۲}-\sin^۲(x-\frac{\pi}{۴})]$$

$$\sqrt{۲}\times\frac{۱}{۲}=m(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴})\Rightarrow m=۲\sqrt{۲}$$

نکته: معادله‌ی $\sin mx=\pm ۱$، در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$، m جواب دارد.

نکته: معادله‌ی $\cos mx=-۱$، در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$، m جواب دارد.

نکته: معادله‌ی $\cos mx=۱$، در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$، $m+۱$ جواب دارد.

نکته: معادلات $\sin mx=۰$ و $\cos mx=۰$ در فاصله‌ی $[۰,\pi]$، $m+۱$ جواب و در فاصله‌ی $[۰,۲\pi]$، $۲m+۱$ جواب دارند.

توابع معکوس مثلثاتی:

می‌دانیم هرگاه، تابعی در یک فاصله یک به یک باشد و یا در آن فاصله، اکیداً یکنوا باشد، در این صورت در آن فاصله معکوس‌پذیر (وارون پذیر) خواهد بود.

با توجه به نمودار توابع مثلثاتی در می‌یابیم که این توابع در دامنهٔ خود معکوس‌پذیر نیستند، زیرا یک به یک نیستند. در واقع به عنوان مثال: اگر $f(x)=\sin x$ آنگاه:

$$f=\{(\frac{\pi}{۲},۱),(\frac{\pi}{۶},\frac{۱}{۲}),(\frac{۵\pi}{۶},\frac{۱}{۲}),...\}$$

وجود دو زوج مرتب $(\frac{۵\pi}{۶},\frac{۱}{۲})$ و $(\frac{\pi}{۶},\frac{۱}{۲})$ در f نشانگر آنستکه f یک به یک نیست.

اما با وجود این می‌توان با تحدید دامنهٔ (کوچک کردن دامنهٔ) هر یک از توابع مثلثاتی و با انتخاب مناسب دامنه، آنها را توابعی یک به یک و لذا معکوس‌پذیر نمود اکنون به معرفی توابع معکوس مثلثاتی می‌پردازیم.

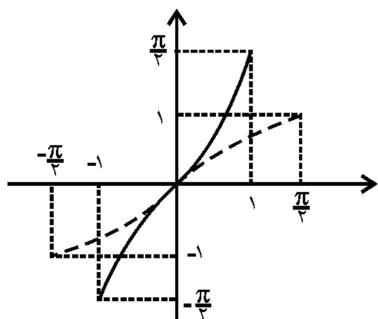
۱ـ $y=\text{Arcsin}x$ یا $y=\sin^{-۱}x$

تابع $y=\sin x$ در فاصلهٔ $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ تابعی اکیداً صعودی و در نتیجه یک به یک است. بنابراین معکوس‌پذیر است، ضابطهٔ تابع معکوس این تابع به صورت $y=f^{-۱}(x)=\text{Arcsin}x$ نمایش داده می‌شود.

$$\begin{cases} f(x)=\sin x \quad , \quad D_f=[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}] \quad ,R_f=[-۱,۱] \\ f^{-۱}(x)=\text{Arcsin}x \quad , \quad D_{f^{-۱}}=R_f=[-۱,۱] \quad ,R_{f^{-۱}}=D_f=[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}] \end{cases}$$

همانطور که می‌دانیم نمودارهای f و f^{-1} نسبت به خط نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند بنابراین:

$$y = \text{Arcsin}\,x \Leftrightarrow x = \sin y \quad ,(-1 \le x \le 1 \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2})$$



توجه کنید که دامنهٔ تابع $y = \sin x$ در حالت کلی، R است.

در شکل، هر خط افقی نمودار تابع $y = \sin x$ را در فاصلهٔ $x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند و لذا تابع $y = \sin x$ در فاصلهٔ مزبور یک به یک است.

ویژگیهای تابع $y = \text{Arcsin}x$

۱ـ $y = \text{Arcsin}x \Leftrightarrow x = \sin y$

۲ـ دامنهٔ این تابع $[-1,1]$ و برد آن $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ است و لذا مقدار Arcsinx همواره یک زاویه‌ی حاده یا قائمه مثبت و یا یک زاویهٔ حاده یا قائمه‌ی منفی است.

۳ـ این تابع در دامنه‌اش یعنی فاصلهٔ $[-1,1]$ پیوسته و اکیداً صعودی است (به نامساوی زیر توجه کنید) بنابراین نمودار مشتق همواره بالای محور xهاست.

$$\underset{\frac{\pi}{6}}{\text{Arcsin}\frac{1}{2}} < \underset{\frac{\pi}{4}}{\text{Arcsin}\frac{\sqrt{2}}{2}} < \underset{\frac{\pi}{3}}{\text{Arcsin}\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

۴ـ این تابع، تابعی فرد است زیرا:

$$\begin{cases} 1) D_f = [-1, 1] \\ 2) \forall x \in D_f : \text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}x \end{cases}$$

و بنابراین مبدأ مختصات مرکز تقارن آن است.

۵ـ مشتق این تابع برابر است با $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$ و تابع در فاصلهٔ $(-1,1)$ مشتق‌پذیر است. $(D_{y'} = (-1, 1))$ ضمناً $y' > 0$ و جدول تغییرات به صورت زیر می‌باشد.

x	-1	↗	0	↗	$+1$
y'	تعریف‌نشده +	+	۱	+ + +	تعریف‌نشده
y	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$\frac{\pi}{2}$

۶ـ این تابع اکسترمم نسبی ندارد. اما در نقطه‌ی ۱- می‌نیمم مطلقی برابر $-\frac{\pi}{2}$ و در نقطه ۱، ماکزیمم مطلقی برابر $\frac{\pi}{2}$ دارد.

۷ـ مبدأ مختصات نقطهٔ عطف منحنی است. به ازاء $x>0$ تقعر به سمت yهای مثبت و به ازاء $x<0$ تقعر به سمت yهای منفی است.

۸ـ معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطهٔ عطفش، عبارتست از $y = x$

۹ـ چون مشتق تابع در نقاطی به طولهای ۱ و ۱- موجود نیست و در واقع زمانی که $x \to 1^-$ و یا $x \to (-1)^+$ میل می‌کند، y' به سمت بی‌نهایت $(+\infty)$ میل می‌کند، لذا خطوط مماس در این نقاط موازی محور yهاست.

۱۰ـ چون $y = \sin x$ در دامنه‌اش یعنی R، یک به یک نیست لذا وارون آن یعنی $y = \arcsin x$ در دامنه‌اش یعنی $[-1,1]$، تابع نیست در شکل نمودار $y = \sin x$ و $y = \arcsin x$ رسم شده‌اند.

۱۱-چون $(x\text{Arcsin}x + \sqrt{۱ - x^۲} + c)' = \text{Arcsin}x$ لذا $\int \text{Arcsin}x\,dx = x\text{Arcsin}x + \sqrt{۱ - x^۲} + c$

۱۲- $\begin{cases} \lim\limits_{x \to ۱^+} \text{Arcsin}x = \text{موجود نیست} \\ \lim\limits_{x \to (-۱)^-} \text{Arcsin}x = \text{موجود نیست} \end{cases}$ و $\begin{cases} \lim\limits_{x \to ۱^-} \text{Arcsin}x = \frac{\pi}{۲} \\ \lim\limits_{x \to (-۱)^+} \text{Arcsin}x = -\frac{\pi}{۲} \end{cases}$

y=sinx

y=arcsinx

تست: هرگاه $y = \text{Arcsin}\sqrt{x}$، y' کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sin ۲y}$ ۲) $\frac{۱}{\tan ۲y}$ ۳) $\frac{۱}{۲\sqrt{x^۲-x}}$ ۴) $\frac{-۱}{\sqrt{x^۲-x}}$

$$y = \text{Arcsin}\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = \sin y \Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{x}} = y'\cos y \Rightarrow y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}\cos y}$$

$$y' = \frac{۱}{۲\sin y\cos y} = \frac{۱}{\sin ۲y}$$

ویژگیهای تابع $y = \text{Arccos}x$

۱ـ $y = \text{Arccos}x \Leftrightarrow x = \cos y$

۲ـ دامنهٔ این تابع $[-۱,۱]$ و برد آن $[۰,\pi]$ است و لذا مقدار Arccosx همواره یک زاویهٔ حادهٔ مثبت، قائمه و یا منفرجهٔ مثبت است.

۳ـ این تابع در دامنه‌اش یعنی فاصلهٔ $[-۱,۱]$ پیوسته و اکیداً نزولی است، (به نامساوی زیر توجه کنید) بنابراین نمودار مشتق تابع همواره زیر محور x هاست.

$$\underbrace{\text{Arccos}\left(-\frac{۱}{۲}\right)}_{\frac{۲\pi}{۳}} > \underbrace{\text{Arccos}\,۰}_{\frac{\pi}{۲}} > \underbrace{\text{Arccos}\frac{\sqrt{۳}}{۲}}_{\frac{\pi}{۶}}$$

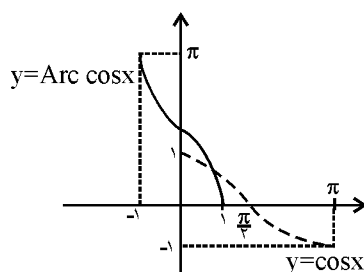
۴ـ این تابع، نه زوج است و نه فرد زیرا: $\text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccos}x$

۵ـ مشتق این تابع عبارتست از $y' = \frac{-۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}$ $(-۱ < x < ۱)$ و تابع در فاصله‌ی $(-۱,+۱)$ مشتق‌پذیر است و $y' < ۰$ و $D_{y'} = (-۱,۱)$ و جدول تغییرات تابع به صورت زیر می‌باشد.

x	-۱	↗	۰	↗	$+۱$
y'	تعریف‌نشده	$-$	-۱	$-$	تعریف‌نشده
y	π	↘	$\frac{\pi}{۲}$	↘	۰

۶ـ این تابع اکسترمم نسبی ندارد اما در نقطه‌ی $(+۱)$ مینیمم مطلقی برابر ۰ و در نقطهٔ (-۱) ماکزیمم مطلقی برابر π دارد.

۷ـ نمودار تابع $y = \text{Arccos}x$ به صورت زیر است.



۸ـ چون مشتق تابع در نقاطی به طولهای ۱ و ۱−موجود نیست و در واقع زمانی که $x \to 1^-$ و یا $x \to (-1)^+$ میل می‌کند، y' به سمت بی‌نهایت $(-\infty)$ میل می‌کند. لذا خطوط مماس در این نقاط موازی محور yهاست.

۹ـ نقطهٔ عطف تابع $\begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{vmatrix}$ ω می‌باشد. به ازاء $x > 0$، تقعر منحنی به سمت yهای منفی و به ازاء $x < 0$ تقعر منحنی به سمت yهای مثبت است.

۱۰ـ معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطهٔ عطفش، عبارتست از $y = -x + \frac{\pi}{2}$

۱۱ـ چون $(x\text{Arccos}x - \sqrt{1-x^2} + c)' = \text{Arccos}x$ لذا $\int \text{Arccos}x\,dx = x\text{Arccos}x - \sqrt{1-x^2} + c$

۱۲ـ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to (-1)^-} \text{Arccos}x = \text{موجود نیست} \\ \lim\limits_{x \to (-1)^+} \text{Arccos}x = \pi \end{cases}$ یا $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} \text{Arccos}x = \text{موجود نیست} \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \text{Arccos}x = 0 \end{cases}$

ویژگیهای تابع $y = \text{Arctan}x$

۱ـ $y = \text{Arctan}x \Leftrightarrow x = \tan y$

۲ـ دامنهٔ تعریف این تابع $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ است، در واقع مقدار Arctanx، همواره یک زاویهٔ حادهٔ منفی و یا یک زاویهٔ حاده مثبت است.

۳ـ تابع در سرتاسر دامنه‌اش یعنی R، پیوسته و اکیداً صعودی است (به نامساوی زیر توجه کنید) بنابراین نمودار مشتق‌اش همواره بالای محور xهاست.

$$\underset{-\frac{\pi}{6}}{\text{Arctan}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} < \underset{0}{\text{Arctan}\,0} < \underset{\frac{\pi}{4}}{\text{Arctan}\,1}$$

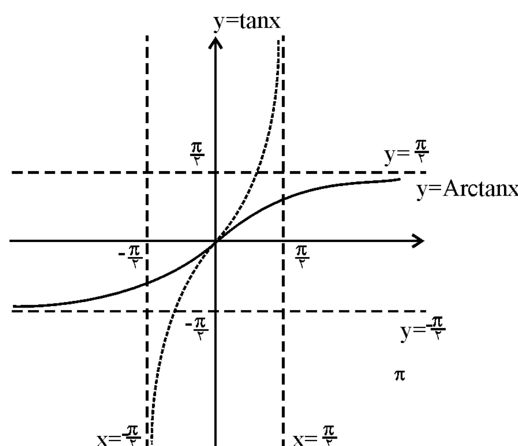
۴ـ این تابع، تابعی فرد است، زیرا: $\begin{cases} D_f = R \\ \text{Arctan}(-x) + \text{Arctan}x = 0 \end{cases}$ و لذا مبدأ مختصات مرکز تقارن منحنی است.

۵ـ مشتق این تابع عبارتست از $y' = \frac{1}{1+x^2}\ (x \in R)$ و تابع در سرتاسر R مشتق‌پذیر است و $y' > 0$, $D_{y'} = R$ جدول تغییرات به صورت زیر می‌باشد.

x	$-\infty$	↗	۰	↗	$+\infty$
y′	+	+	۱	+	
y	$-\frac{\pi}{2}$	↗	۰	↗	$\frac{\pi}{2}$

۶ـ این تابع اکسترمم نسبی و مطلق ندارد.

۷ـ نمودار تابع $y = \text{Arctan}x$ به صورت زیر است.



۸ـ مبدأ مختصات نقطهٔ عطف تابع است به ازاء $x > ۰$ تقعر منحنی به سمت yهای منفی و به ازاء $x < ۰$ تقعر منحنی به سمت yهای مثبت است.

۹ـ معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y = \text{Arctan}x$ در نقطهٔ عطفش عبارتست از: $y = x$

۱۰ـ چون $(x\text{Arctan}x - \frac{۱}{۲}\text{Ln}(x^{۲}+۱)+c)' = \text{Arctan}x$ لذا

$$\int \text{Arctan}x\,dx = x\text{Arctan}x - \frac{۱}{۲}\text{Ln}(x^{۲}+۱)+c$$

۱۱ـ

$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\text{Arctan}x = \frac{\pi}{۲}\\ \lim_{x\to-\infty}\text{Arctan}x = -\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

ویژگیهای تابع $y = \text{Arccot}x$

۱ـ $y = \text{Arccot}x \Leftrightarrow x = \cot y$

۲ـ دامنهٔ این تابع R و برد آن $(۰,\pi)$ است و لذا مقدار Arccotx، همواره یک زاویه‌ی حاده مثبت، قائمه و یا یک زاویـه‌ی منفرجه مثبت است.

۳ـ تابع در سرتاسر دامنه‌اش یعنی R پیوسته و اکیداً نزولی است (به نامساوی زیر توجه کنید) بنابراین نمودار مشتق آن همواره زیر محور xهاست.

$$\underset{\frac{۳\pi}{۴}}{\text{Arccot}(-۱)} > \underset{\frac{\pi}{۲}}{\text{Arccot}\,۰} > \underset{\frac{\pi}{۶}}{\text{Arccot}\sqrt{۳}}$$

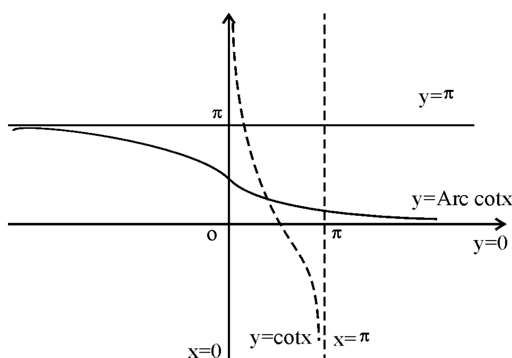
۴ـ این تابع، نه زوج است و نه فرد زیرا: $\text{Arccot}(-x) = \pi - \text{Arccot}x$

۵ـ مشتق این است تابع عبارتست از $y' = \frac{-۱}{۱+x^{۲}}\ (x \in R)$ و تابع در سرتاسر R مشتق‌پذیر است و $y' < ۰$, $D_{y'} = R$ و جدول تغییرات تابع به صورت زیر می‌باشد.

x	$-\infty$	↗	۰	↗	$+\infty$
y'		−	−۱	−	
y	π	↘	$\frac{\pi}{۲}$	↘	۰

۶ـ این تابع اکسترمم نسبی و مطلق ندارد.

۷ـ نمودار تابع $y = \text{Arccot}x$ به صورت زیر است.



۸ـ نقطهٔ $\omega\left|\begin{matrix}۰\\ \frac{\pi}{۲}\end{matrix}\right.$ نقطهٔ عطف تابع است، به ازاء $x > ۰$ تقعر منحنی به سمت yهای مثبت و ازاء $x < ۰$ تقعر منحنی به سمت yهای منفی است.

۹ـ معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y = \text{Arccot}x$ در نقطهٔ عطفش عبارتست از $y = -x + \frac{\pi}{۲}$

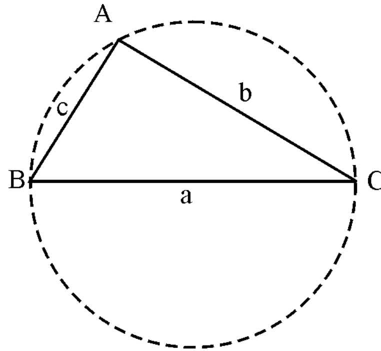
۱۰ـ چون $(x\text{Arccot}x + \frac{۱}{۲}\text{Ln}(x^{۲}+۱)+c)' = \text{Arccot}x$ لذا

$$\int \text{Arccot}x\,dx = x\text{Arccot}x + \frac{۱}{۲}\text{Ln}(x^{۲}+۱)+c$$

۱۱ـ

$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\text{Arccot}x = ۰\\ \lim_{x\to-\infty}\text{Arccot}x = \pi\end{cases}$$

روابط میان اضلاع و زوایای یک مثلث مسطح



۱ـ دستور (قانون) سینوسها: این دستور به یکی از دو صورت زیر است:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a=2R\sin A \\ b=2R\sin B \\ c=2R\sin C \end{cases}$$

که در آن R، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است.

۲ـ دستور (قانون) کسینوسها: این دستور به یکی از دو صورت زیر است:

$$\begin{cases} \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \\ c^2=b^2+a^2-2ab\cos C \end{cases}$$

۳ـ قانون تصویر در هر مثلث:

$$a = b\cos C + c\cos B$$

$$b = a\cos C + c\cos A$$

$$c = a\cos B + b\cos A$$

۴ـ قانون تانژانتها در هر مثلث:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}=\cot\frac{c}{2}\cot(\frac{A-B}{2})$$

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}=\cot\frac{B}{2}\cot(\frac{A-C}{2})$$

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}=\cot\frac{A}{2}\cot(\frac{B-C}{2})$$

۵ـ قانون زاویه‌ها در هر مثلث:

$$\sin(A+B)=\sin C \qquad \sin(\frac{A+B}{2})=\cos\frac{C}{2}$$

$\cos(A+B) = -\cos C \qquad \cos(\frac{A+B}{۲}) = \sin\frac{C}{۲}$

$\tan(A+B) = -\tan C \qquad \tan(\frac{A+B}{۲}) = \cot\frac{C}{۲}$

$\cot(A+B) = -\cot C \qquad \cot(\frac{A+B}{۲}) = \tan\frac{C}{۲}$

۶ـ فرمول زاویهٔ ساده:

$\mathrm{Sin}A = \frac{۲}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad , \quad \cos A = \frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲bc}$

$\mathrm{Sin}B = \frac{۲}{ac}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad , \quad \cos B = \frac{a^۲ + c^۲ - b^۲}{۲ac}$

$\mathrm{Sin}C = \frac{۲}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad , \quad \cos C = \frac{a^۲ + b^۲ - c^۲}{۲ab}$

۷ـ نیمسازها:

$t_a = \frac{\sqrt{bc[(b+c)^۲ - a^۲]}}{b+c} = \frac{۲bc\cos\frac{A}{۲}}{b+c}$

$t_b = \frac{\sqrt{ac[(a+c)^۲ - b^۲]}}{a+c} = \frac{۲ac\cos\frac{B}{۲}}{a+c}$

$t_c = \frac{\sqrt{ab[(a+b)^۲ - c^۲]}}{a+b} = \frac{۲ab\cos\frac{c}{۲}}{a+b}$

۸ـ ارتفاعها و مساحت:

$h_a = b\sin C = c\sin B$

$h_b = a\sin C = c\sin A$

$h_c = a\sin B = b\sin A \quad , S = p^۲\tan\frac{A}{۲}\tan\frac{B}{۲}\tan\frac{C}{۲} = r^۲\cot\frac{A}{۲}\cot\frac{B}{۲}\cot\frac{C}{۲}$

$S = \frac{۱}{۲}ah_a = \frac{۱}{۲}bh_b = \frac{۱}{۲}ch_c \quad , \quad S = \frac{۱}{۲}ab\sin C = \frac{۱}{۲}ac\sin B = \frac{۱}{۲}bc\sin A$

$S = \frac{ab\sin C}{۲} = \frac{ac\sin B}{۲} = \frac{bc\sin A}{۲}$

$S = \frac{abc}{۴R} \quad , \quad S = p.r \quad , \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ،(R شعاع دایره‌ی محیطی و r شعاع دایره‌ی محاطی داخلی می‌باشند)

$S = ۲R^۲\sin A\sin B\sin C$

اگر $A = ۹۰^\circ \leftarrow (S = \sqrt{p(p-a)} = \sqrt{(p-c)(p-b)})$

$S = \frac{a^۲\sin B\sin C}{۲\sin(B+C)} = \frac{b^۲\sin C\sin A}{۲\sin(C+A)} = \frac{c^۲\sin A\sin B}{۲\sin(A+B)}$

$S = \frac{۱}{۲}\left|\left[x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)\right]\right|$

۹ـ شعاع دایره محیطی:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$$

$$R = \frac{P}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

۱۰ـ شعاع دایره محاطی داخلی:

$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2} = (p-b)\tan\frac{B}{2} = (p-c)\tan\frac{C}{2}$$

$$r = \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

۱۱ـ شعاع دایره محاطی خارجی:

$$r_a = p\tan\frac{A}{2} = \frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$r_b = p\tan\frac{B}{2} = \frac{b\cos\frac{c}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$r_c = p\tan\frac{C}{2} = \frac{c\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

۱۲ـ میانه‌ها:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2+2ac\cos B}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+a^2)-c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+a^2+2bc\cos C}$$

بدترین دوست نادانی و بهترین رفیق دانش است. «سقراط»

دوستانی به دست آر صدیق و وفادار نه در شمارش بسیار. «ارسطو»

تست ۱:

۱ـ هرگاه $\cos x + \cos y = 1$، در این صورت مقدار $\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{y}{2}$ برابر است با:

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{7}{2}$

۲ـ چه زاویه‌ایست که اگر براندازه‌اش برحسب درجه، ۱۵ واحد اضافه شود، اندازه‌اش بر حسب گراد به دست آید؟

۱) 120° ۲) 150° ۳) 135° ۴) 75°

۳ـ حاصل عبارت $A=\frac{\tan 3x + \tan x}{\tan 3x - \tan x}$ برابر است با:

۱) $2\sin 2x$ ۲) $2\tan 2x$ ۳) $2\cos 2x$ ۴) $2\cot 2x$

۴ـ برای آن که ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - 2mx - 1 = 0$، سینوس و کسینوس یک کمان باشند، مقدار m برابر است با:

۱) ± 1 ۲) $\pm\sqrt{2}$ ۳) $\pm\sqrt{3}$ ۴) $\pm 2\sqrt{3}$

۵ـ حاصل $A=\frac{1}{\cos 32^\circ} + \frac{1}{\tan 58^\circ}$ کدام است؟

۱) $\cot 29^\circ$ ۲) $\tan 58^\circ$ ۳) $\tan 29^\circ$ ۴) $\cot 58^\circ$

۶ـ حاصل عبارت $A = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$ برابر است با:

۱) $\tan(x + \frac{\pi}{4})$ ۲) $\tan\frac{x}{2}$ ۳) $\tan 2x$ ۴) $1 + \tan 2x$

۷ـ هرگاه $5(\sin x + \cos x) = 2\sqrt{10}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام است؟

۱) -3 ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) ۳

۸ـ هرگاه α زاویه‌ای حاده باشد، کدام رابطه‌ی زیر، همواره درست است؟

۱) $\tan\alpha > 3\sin\alpha$ ۲) $\tan\alpha < 3\sin\alpha$ ۳) $\tan\alpha > \sin\alpha$ ۴) $\tan\alpha < \sin\alpha$

۹ـ حاصل $A = \tan 30^\circ + \tan 40^\circ + \tan 50^\circ + \tan 60^\circ$ کدام است؟

۱) $8\sin 20^\circ$ ۲) $8\cos 20^\circ$ ۳) $\frac{8\cos 20^\circ}{\sqrt{3}}$ ۴) $\frac{8\sin 20^\circ}{\sqrt{3}}$

۱۰ـ با فرض $\tan 35^\circ = 2a - 1$، حاصل عبارت $A=\frac{\sin 145^\circ - \sin 235^\circ}{\cos 325^\circ}$ برابر است با:

۱) $2a$ ۲) $4a$ ۳) $2a - 1$ ۴) $4a - 2$

۱ـ (۲) $۲\cos^۲\frac{x}{۲} - ۱ + ۲\cos^۲\frac{y}{۲} - ۱ = ۱ \Rightarrow \cos^۲\frac{x}{۲} + \cos^۲\frac{y}{۲} = \frac{۳}{۲}$

۲ـ (۳) $\begin{cases}\frac{D}{۹} = \frac{G}{۱۰}\\ D + ۱۵ = G\end{cases} \Rightarrow \frac{D}{۹} = \frac{D + ۱۵}{۱۰} \Rightarrow D = ۱۳۵^\circ$

۳ـ (۳) $\frac{\frac{\sin(۳x + x)}{\cos ۳x \cos x}}{\frac{\sin(۳x - x)}{\cos ۳x \cos x}} = \frac{\sin ۴x}{\sin ۲x} = \frac{۲\sin ۲x \cos ۲x}{\sin ۲x} = ۲\cos ۲x$

۴ـ (۲) $\begin{cases}x' = \sin\alpha\\ x'' = \cos\alpha\end{cases} \Rightarrow x'^۲ + x''^۲ = s^۲ - ۲p \Rightarrow \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = (\frac{m}{۲})^۲ + \frac{۱}{۲}$

$\frac{m^۲}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۲} \Rightarrow m^۲ = ۲ \Rightarrow m = \pm\sqrt{۲}$

۵ـ (۱) $T = \frac{۱}{\sin ۵۸^\circ} + \frac{\cos ۵۸^\circ}{\sin ۵۸^\circ} = \frac{۱ + \cos ۵۸^\circ}{\sin ۵۸^\circ} = \frac{۲\cos^۲ ۲۹^\circ}{۲\sin ۲۹^\circ \cos ۲۹^\circ} = \cot ۲۹^\circ$

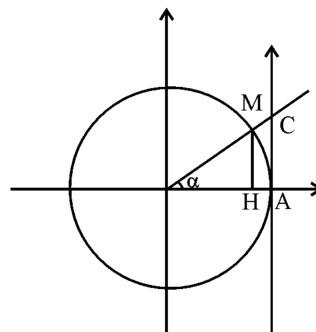
۶ـ (۱) $\frac{\sqrt{۲}\sin(x + \frac{\pi}{۴})}{\sqrt{۲}\cos(x + \frac{\pi}{۴})} = \tan(x + \frac{\pi}{۴})$

۷ـ (۴) $(\sin x + \cos x)^۲ = (\frac{۲\sqrt{۱۰}}{۵})^۲ \Rightarrow ۱ + \sin ۲x = \frac{۴۰}{۲۵} \Rightarrow \sin ۲x = \frac{۳}{۵}$

$\sin ۲x = \frac{۲\tan x}{۱ + \tan^۲ x} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{۲\tan x}{۱ + \tan^۲ x} \Rightarrow ۳\tan^۲ x - ۱۰\tan x + ۳ = ۰$

$\tan x = ۳$ یا $\frac{۱}{۳}$

۸ـ (۳) $\begin{cases}MH = \sin\alpha\\ AC = \tan\alpha\end{cases} \Rightarrow \sin\alpha < \tan\alpha$



نکته: $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \sin\alpha < \tan\alpha$

۹ـ (۳) $A = \frac{\sin ۹۰^\circ}{\cos ۳۰^\circ \cos ۶۰^\circ} + \frac{\sin ۹۰^\circ}{\cos ۴۰^\circ \cos ۵۰^\circ} = \frac{۴}{\sqrt{۳}} + \frac{۱}{\sin ۴۰^\circ \cos ۴۰^\circ}$

$= \frac{۴}{\sqrt{۳}} + \frac{۲}{\sin ۸۰} = \frac{۴}{\sqrt{۳}} + \frac{۲}{\cos ۱۰} = \frac{۴(\cos ۱۰ + \frac{\sqrt{۳}}{۲})}{\sqrt{۳}\cos ۱۰}$

$= \frac{۴(\cos ۱۰ + \cos ۳۰)}{\sqrt{۳}\cos ۱۰} = \frac{۸\cos ۲۰ \cos ۱۰}{\sqrt{۳}\cos ۱۰} = \frac{۸\cos ۲۰}{\sqrt{۳}}$

۱۰ـ (۴) $A = \frac{\sin ۳۵^\circ + \sin ۳۵^\circ}{\cos ۳۵^\circ} = ۲\tan ۳۵^\circ = ۴a - ۲$

تست ۲:

۱ـ حاصل $A=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}$ کدام است؟

۱) $\tan\alpha$ ۲) $\tan\beta$ ۳) $\tan\alpha+\tan\beta$ ۴) $\tan\alpha-\tan\beta$

۲ـ مقدار عبارت $Z=\tan 33^\circ+\tan 12^\circ+\tan 33^\circ\tan 12^\circ$ کدام است؟

۱) $\cot 33$ ۲) $\tan 45$ ۳) $\cot 12$ ۴) $\tan(-45)$

۳ـ حاصل $\cos 165^\circ\cos 105^\circ$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۴ـ حاصل $Y=\frac{2\sin 2x-1}{2\cos 2x+\sqrt{3}}$ کدام است؟

۱) $\tan(x+15^\circ)$ ۲) $-\tan(x+15^\circ)$ ۳) $\tan(x-15^\circ)$ ۴) $\tan(15^\circ-x)$

۵ـ حاصل عبارت $X=2\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha-1$ برابر است با:

۱) $-2\cos(2\alpha+\frac{\pi}{3})$ ۲) $2\cos(2\alpha+\frac{\pi}{3})$ ۳) $-2\sin(2\alpha+\frac{\pi}{3})$ ۴) $2\sin(2\alpha+\frac{\pi}{3})$

۶ـ حاصل عبارت $N=\cos^2(x+y)+\cos^2(x-y)-\cos 2x\cos 2y$ برابر است با:

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $2\cos 2x\cos 2y$ ۴) $4\sin 2x\sin 2y$

۷ـ حاصل عبارت $M=\frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{\sin(x+\frac{\pi}{4})}$ هنگامیکه $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ است کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $-\sqrt{2}$ ۳) 2 ۴) -2

۸ـ هرگاه $y=\frac{\pi}{6}+\text{Arctan}x$ باشد، برد تابع کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{3}<y<\frac{2\pi}{3}$ ۲) $0\le y\le\frac{\pi}{3}$ ۳) $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ ۴) $-\frac{\pi}{6}<y<\frac{\pi}{6}$

۹ـ مقدار $A=\frac{1-4\sin 10\sin 70}{\sin 10}$ کدام است؟

۱) $\sin 40$ ۲) $\cos 40$ ۳) 2 ۴) 1

۱۰ـ هرگاه $\sin x+\frac{1}{\sin x}=2$، آنگاه مقدار عبارت $T=\sin^{15}x+\cos^{20}x$ کدام است؟

۱) 2 ۲) 1 ۳) $\sqrt{2}-1$ ۴) $2+\sqrt{2}$

۱- (۲) **یادآوری:** $\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{۱+\tan x\tan y}$

$A=\tan(\alpha+\beta-\alpha)=\tan\beta$

۲- (۲)

$\tan۴۵^\circ=\tan(۳۳+۱۲)\Rightarrow\dfrac{\tan۳۳+\tan۱۲}{۱-\tan۳۳\tan۱۲}=۱$

$\tan۳۳+\tan۱۲=۱-\tan۳۳\tan۱۲^\circ\Rightarrow\tan۳۳+\tan۱۲+\tan۳۳\tan۱۲=۱=\tan۴۵^\circ$

۳- (۳)

$(-\cos۱۵^\circ)(-\sin۱۵^\circ)=\frac{۱}{۲}\sin۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$

۴- (۳)

$Y=\dfrac{۲(\sin۲x-\sin\frac{\pi}{۶})}{۲(\cos۲x+\cos\frac{\pi}{۶})}=\dfrac{۲\cos(x+\frac{\pi}{۱۲})\sin(x-\frac{\pi}{۱۲})}{۲\cos(x+\frac{\pi}{۱۲})\cos(x-\frac{\pi}{۱۲})}=\tan(x-\frac{\pi}{۱۲})=\tan(x-۱۵^\circ)$

۵- (۱)

$X=-\cos۲\alpha+\sqrt{۳}\sin۲\alpha=-\cos۲\alpha+\dfrac{\sin۶۰}{\cos۶۰}\sin۲\alpha$

$=\dfrac{-\cos۶۰\cos۲\alpha+\sin۶۰\sin۲\alpha}{\cos۶۰}=-۲\cos(۶۰+۲\alpha)=-۲\cos(۲\alpha+\frac{\pi}{۳})$

۶- (۱)

$N=\dfrac{۱+\cos(۲x+۲y)}{۲}+\dfrac{۱+\cos(۲x-۲y)}{۲}-\cos۲x\cos۲y$

$=۱+\frac{۱}{۲}(\cos(۲x+۲y)+\cos(۲x-۲y))-\cos۲x\cos۲y$

$=۱+\frac{۱}{۲}\times۲\cos۲x\cos۲y-\cos۲x\cos۲y=۱$

۷- (۲)

$M=\dfrac{\sqrt{(\sin x+\cos x)^۲}}{\sin(x+\frac{\pi}{۴})}=\dfrac{|\sin x+\cos x|}{\sin(x+\frac{\pi}{۴})}=\dfrac{-(\sin x+\cos x)}{\sin(x+\frac{\pi}{۴})}=\dfrac{-\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})}{\sin(x+\frac{\pi}{۴})}=-\sqrt{۲}$

توجه کنید که در فاصله‌ی $\pi<x<\frac{۳\pi}{۲}$ (ناحیه‌ی سوم) sin و cos هر دو منفی‌اند.

۸- (۱)

$-\frac{\pi}{۲}<\text{Arctan}x<\frac{\pi}{۲}$

$\frac{\pi}{۶}-\frac{\pi}{۲}<\frac{\pi}{۶}+\text{Arctan}x<\frac{\pi}{۶}+\frac{\pi}{۲}\quad\Rightarrow\quad-\frac{\pi}{۳}<y<\frac{۲\pi}{۳}$

۹- (۳)

$A=\dfrac{۱-۴(-\frac{۱}{۲})(\cos۸۰-\cos۶۰)}{\sin۱۰}=\dfrac{۱+۲(\sin۱۰-\frac{۱}{۲})}{\sin۱۰}=۲$

۱۰- (۲)

$\sin x+\dfrac{۱}{\sin x}=۲\Rightarrow\sin x=۱\Rightarrow\cos x=۰\Rightarrow T=۱+۰=۱$

نکته: $a+\dfrac{۱}{a}=۲\Rightarrow a=۱$

زندگی یک نبرد دائمی با ناملایمات است. «بتهوون»

تست ۳:

۱ـ هرگاه $-\frac{\pi}{۹} < x < \frac{\pi}{۹}$ باشد و $\cos۳x = \frac{m-۱}{۲}$، مقادیر m در کدام فاصله قرار دارند؟

۱) $(۱,۲]$ ۲) $(۰,۲)$ ۳) $(۲,۳]$ ۴) $[۳,۴)$

۲ـ حاصل عبارت $\cos۲۰^\circ + \cos۱۴۰^\circ - \sin۱۰^\circ$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\sin۲۰^\circ$ ۴) $\cos۲۰^\circ$

۳ـ حاصل عبارت $T = (۱ - \tan\frac{a}{۲})(\tan a + \frac{۱}{\cos a} - ۱)$ کدام است؟

۱) $۱ - \cot\frac{a}{۲}$ ۲) $۱ - \tan\frac{a}{۲}$ ۳) $۱ + \tan\frac{a}{۲}$ ۴) $۱ + \cot\frac{a}{۲}$

۴ـ هرگاه $x + \frac{۱}{x} = ۲\cos\alpha$ باشد، حاصل $x^۳ + \frac{۱}{x^۳}$ کدام است؟

۱) $\cos۳\alpha$ ۲) $۲\cos۳\alpha$ ۳) $\cos^۳\alpha$ ۴) $۲\cos^۳\alpha$

۵ـ هرگاه $x = ۱ - \sin۷۰^\circ$ باشد، حاصل $\sin^۲۱۰^\circ$ کدام است؟

۱) x ۲) ۲x ۳) $\frac{x}{۲}$ ۴) $\frac{۳x}{۲}$

۶ـ حاصل عبارت $A = \frac{\cos۱۰^\circ}{۱ + \cos۱۰^\circ} \times \frac{\sin۲۰^\circ}{۱ + \cos۲۰^\circ}$ برابر است با:

۱) $\sin۵^\circ$ ۲) $\tan۵^\circ$ ۳) $\cos۵^\circ$ ۴) $\cot۵^\circ$

۷ـ مقدار $B = ۲\sin۵۰\sin۱۴۰ + \cos۱۷۰$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۸ـ هرگاه $\frac{\sqrt{۲}}{۲} \leq \cos۳x\cos۲x + \sin۳x\sin۲x \leq ۱$ باشد، آنگاه حدود تغییرات x کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{۴} \leq x \leq \frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۴} \leq x \leq \frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۲} \leq x \leq \frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\pi \leq x \leq \frac{۵\pi}{۴}$

۹ـ هرگاه $A = \tan۱۵\tan۲۵\tan۶۵\tan۷۵$، آنگاه A کدام است؟

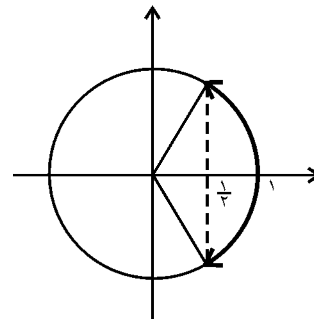
۱) ۲ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۱۰ـ هرگاه $\pi < x < ۲\pi$ آنگاه حاصل $B = \sqrt{\frac{۱ - \cos x}{۱ + \cos x}}$ برابر است با:

۱) $-\cot\frac{x}{۲}$ ۲) $-\tan\frac{x}{۲}$ ۳) $\tan\frac{x}{۲}$ ۴) $\cot\frac{x}{۲}$

۱ـ (۳)
$-\frac{\pi}{۹} < x < \frac{\pi}{۹} \Rightarrow -\frac{\pi}{۳} < ۳x < \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \cos ۳x \le ۱$

$\frac{۱}{۲} < \frac{m-۱}{۲} \le ۱ \Rightarrow ۱ < m-۱ \le ۲ \Rightarrow ۲ < m \le ۳$



۲ـ (۱)
$۲\cos ۸۰^\circ \cos ۶۰^\circ - \sin ۱۰^\circ = \cos ۸۰^\circ - \cos ۸۰^\circ = ۰$

۳ـ (۳)
$T = (۱-\tan\frac{a}{۲})(\frac{۲\tan\frac{a}{۲}}{۱-\tan^۲\frac{a}{۲}} + \frac{۱+\tan^۲\frac{a}{۲}}{۱-\tan^۲\frac{a}{۲}}) \Rightarrow \tan\frac{a}{۲} = t \Rightarrow T = (۱-t)(\frac{۲t}{۱-t^۲} + \frac{۱+t^۲}{۱-t^۲})$

$= \frac{۲t+۱+t^۲}{۱+t} = \frac{(۱+t)^۲}{۱+t} = ۱+t = ۱+\tan\frac{a}{۲}$

۴ـ (۲)
$x^۳ + \frac{۱}{x^۳} = (x+\frac{۱}{x})^۳ - ۳x.\frac{۱}{x}(x+\frac{۱}{x}) = ۸\cos^۳\alpha - ۶\cos\alpha$

$= ۲(۴\cos^۳\alpha - ۳\cos\alpha) = ۲\cos ۳\alpha$

۵ـ (۳)
$\sin ۷۰^\circ = \cos ۲۰^\circ \Rightarrow x = ۱-\sin ۷۰ = ۱-\cos ۲۰ = ۲\sin^۲ ۱۰^\circ \Rightarrow \sin^۲ ۱۰^\circ = \frac{x}{۲}$

۶ـ (۲)
$A = \frac{۲\sin ۱۰ \cos ۱۰}{۲\cos^۲ ۱۰} \times \frac{\cos ۱۰}{۲\cos^۲ ۵^\circ} = ۲\sin ۵^\circ \cos ۵^\circ \times \frac{۱}{۲\cos^۲ ۵^\circ} = \tan ۵^\circ$

۷ـ (۱)
$B = ۲(-\frac{۱}{۲})(\cos ۱۹۰^\circ - \cos ۹۰^\circ) + \cos ۱۷۰^\circ$

$= -\cos ۱۹۰^\circ + \cos ۱۷۰^\circ = \cos ۱۰^\circ - \cos ۱۰^\circ = ۰$

۸ـ (۱)
$\frac{\sqrt{۲}}{۲} \le \cos(۳x-۲x) \le ۱ \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲} \le \cos x \le ۱ \Rightarrow -\frac{\pi}{۴} \le x \le \frac{\pi}{۴}$

۹ـ (۳)
$A = \tan ۱۵ \tan ۲۵ \cot ۲۵ \cot ۱۵^\circ = ۱ \times ۱ = ۱$

۱۰ـ (۲)
$B = \sqrt{\frac{۲\sin^۲\frac{x}{۲}}{۲\cos^۲\frac{x}{۲}}} = |\tan\frac{x}{۲}| = -\tan\frac{x}{۲}, \begin{cases} \pi < x < ۲\pi \\ \frac{\pi}{۲} < \frac{x}{۲} < \pi \\ \tan\frac{x}{۲} < ۰ \end{cases}$

چون $\frac{x}{۲}$ در ربع دوم است لذا $\tan\frac{x}{۲}$ منفی است.

زندگی کم کم به هر کس می‌فهماند چه کاره است. «گوته»

تست ۴:

۱ـ هرگاه $-\frac{\pi}{۶} \le x \le \frac{\pi}{۶}$ باشد و $\frac{m}{۲} = (۱ - ۲\cos ۲x)\cos x$ حدود مقادیر m چیست؟

۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۰,۱]$ ۳) $[-۱,۱]$ ۴) $[\frac{۱}{۲},۱]$

۲ـ هرگاه $۳۰^\circ < x < ۴۲۰^\circ$ باشد، حدود تغییرات sinx کدام است؟

۱) $[\frac{۱}{۲},\frac{\sqrt{۳}}{۲}]$ ۲) $[-۱,۱]$ ۳) $[۰,۱]$ ۴) $[\frac{۱}{۲},۱]$

۳ـ حاصل کسر $T = \frac{\frac{۱}{\sin ۴x} + \cot ۴x}{\cot x - \tan x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

۴ـ حاصل عبارت $P = \frac{۲}{\cos ۵۰^\circ} \times \frac{\tan ۷۵^\circ + \tan ۲۵^\circ}{\tan ۷۵^\circ - \tan ۲۵^\circ}$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵ـ کدامیک از عبارات زیر منفی است؟

۱) $\cos ۲۱۳^\circ - \cos ۲۱۵^\circ$ ۲) $\sin ۶۷^\circ - \cos ۶۷^\circ$ ۳) $\sin ۳۳۰^\circ - \sin ۳۲۸^\circ$ ۴) $\tan ۲۲۷^\circ - \tan ۲۲۵^\circ$

۶ـ هرگاه $\sin ۲\alpha > ۰$ و $\cos^۲\alpha - \cos\alpha < ۰$ باشند، انتهای کمان α در کدام ناحیه‌ی دایره‌ی مثلثاتی واقع است؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

۷ـ فرض می‌کنیم $\frac{\pi}{۶} \le x \le \frac{۳\pi}{۴}$ باشد، تغییرات tanx کدام است؟

۱) $[\frac{\sqrt{۳}}{۳},+\infty)$ ۲) $(-\infty,-۱]$ ۳) $[\frac{\sqrt{۳}}{۳},۱]$ ۴) $(-\infty,-۱]\cup[\frac{\sqrt{۳}}{۳},+\infty)$

۸ـ هرگاه $\tan(x - \frac{y}{۲}) = ۳$ و $\tan(x + \frac{y}{۲}) = ۲$ باشند، حاصل $\tan ۲x + \tan y$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) $-\frac{۸}{۷}$ ۳) $-\frac{۱}{۷}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

۹ـ حاصل $C = \frac{۳ - \tan^۲ ۱۰^\circ}{۱ - ۳\tan^۲ ۱۰^\circ}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}\tan ۱۰^\circ$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}\cot ۱۰^\circ$ ۳) $\sqrt{۳}\cot ۱۰^\circ$ ۴) $\sqrt{۳}\tan ۱۰^\circ$

۱۰ـ به فرض $\sin\alpha + \sin\beta = ۲\sin(\alpha+\beta)$، $(\alpha+\beta \ne k\pi)$، حاصل $\tan\frac{\alpha}{۲}.\tan\frac{\beta}{۲}$ برابر است با:

۱) ۳ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱ـ (۱)
$$\cos x\,(۲(۲\cos^{۲}x-۱)-۱)=\frac{m}{۲}\Rightarrow ۴\cos^{۳}x-۳\cos x=\frac{m}{۲}\Rightarrow \cos ۳x=\frac{m}{۲}$$
$$(-\frac{\pi}{۶}\le x\le\frac{\pi}{۶}\Rightarrow -\frac{\pi}{۲}\le ۳x\le\frac{\pi}{۲})$$
$$\Rightarrow ۰\le\cos ۳x\le ۱\Rightarrow ۰\le\frac{m}{۲}\le ۱\Rightarrow ۰\le m\le ۲$$

۲ـ (۲)
$$۳۰^\circ < x < ۴۲۰^\circ \Rightarrow -۱\le \sin x\le ۱$$
توجه داشته باشید که فاصله‌ی $[۳۰^\circ, ۴۲۰^\circ]$، یک دور کامل دایره را شامل می‌شود.

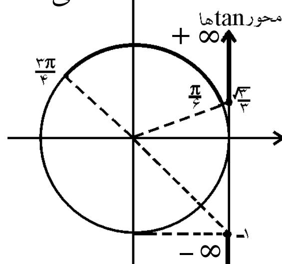
۳ـ (۱)
$$T=\frac{\frac{۱+\cos ۴x}{\sin ۴x}}{۲\cot ۲x}=\frac{۲\cos^{۲}۲x}{۴\sin ۲x\cos ۲x\cot ۲x}=\frac{\cos ۲x}{۲\sin ۲x\cdot\frac{\cos ۲x}{\sin ۲x}}=\frac{۱}{۲}$$

۴ـ (۴)
$$P=\frac{۲}{\cos ۵۰^\circ}\times\frac{\frac{\sin ۱۰۰^\circ}{\cos ۷۵\cos ۲۵}}{\frac{\sin ۵۰}{\cos ۷۵\cos ۲۵}}=\frac{۲}{\cos ۵۰}\times\frac{۲\sin ۵۰\cos ۵۰}{\sin ۵۰}=۴$$

۵ـ (۱)
$$\pi<\alpha<\beta<\frac{۳\pi}{۲}\ (\text{ناحیه‌ی سوم})\Rightarrow \cos\alpha<\cos\beta\Rightarrow \cos\alpha-\cos\beta<۰$$
$$\Rightarrow \cos ۲۱۳-\cos ۲۱۵<۰$$

۶ـ (۱)
$$\left\{\begin{array}{l}۲\sin\alpha\cos\alpha>۰\\ \cos\alpha\underbrace{(\cos\alpha-۱)}_{\text{منفی}}<۰\Rightarrow\cos\alpha>۰\end{array}\right\}\Rightarrow\sin\alpha>۰$$

۷ـ (۴)



$$\begin{cases}\frac{\pi}{۶}<x<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\frac{\sqrt{۳}}{۳}\le\tan x<+\infty\\ \frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow -\infty<\tan x\le -۱\end{cases}\Rightarrow \text{اجتماع}$$

۸ـ (۲)
$$\begin{cases}\tan ۲x=\tan((x+\frac{y}{۲})+(x-\frac{y}{۲}))=\frac{\tan(x+\frac{y}{۲})+\tan(x-\frac{y}{۲})}{۱-\tan(x+\frac{y}{۲})\tan(x-\frac{y}{۲})}=\frac{۲+۳}{۱-۶}=-۱\\ \tan y=\tan((x+\frac{y}{۲})-(x-\frac{y}{۲}))=\frac{\tan(x+\frac{y}{۲})-\tan(x-\frac{y}{۲})}{۱+\tan(x+\frac{y}{۲})\tan(x-\frac{y}{۲})}=\frac{۲-۳}{۱+۶}=\frac{-۱}{۷}\end{cases}$$
$$\Rightarrow \tan ۲x+\tan y=\frac{-۸}{۷}$$

۹ـ (۲)
$$c=\frac{۱}{\tan ۱۰}\times\frac{۳\tan ۱۰-\tan^{۳}۱۰}{۱-۳\tan^{۲}۱۰}=\frac{۱}{\tan ۱۰}\times\tan ۳۰^\circ=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\cot ۱۰^\circ$$

۱۰ـ (۲)
$$۲\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha-\beta}{۲}=۴\sin\frac{\alpha+\beta}{۲}\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}\Rightarrow\cos(\frac{\alpha}{۲}-\frac{\beta}{۲})=۲\cos(\frac{\alpha}{۲}+\frac{\beta}{۲})$$
$$\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\beta}{۲}+\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}=۲\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\beta}{۲}-۲\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}\Rightarrow ۳\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}=\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\beta}{۲}$$
$$\Rightarrow\tan\frac{\alpha}{۲}\tan\frac{\beta}{۲}=۱/۳$$

تست ۵:

۱ـ حاصل $\tan(۲\text{Arctan}\frac{۱}{۲})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۲ـ حاصل $\sin(\text{Arcsin}\frac{۳}{۵} + \text{Arctan}\frac{۳}{۴})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۰}{۱۳}$ ۲) $\frac{۹}{۱۳}$ ۳) $\frac{۱۲}{۲۵}$ ۴) $\frac{۲۴}{۲۵}$

۳ـ حاصل عبارت $P = \text{Arccot}(-\frac{۱۰}{۹}) - \text{Arccot}\frac{۹}{۱۰}$ کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۳}$

۴ـ هرگاه $\alpha = \pi + \text{Arccot}m$ باشد، $\sin۲\alpha$ برابر است با:

۱) $\frac{۲m}{m^۲-۱}$ ۲) $\frac{۲m}{m^۲+۱}$ ۳) $\frac{m^۲-۱}{۲m}$ ۴) $\frac{m^۲+۱}{۲m}$

۵ـ جواب معادله‌ی $\text{Arctan}x + \text{Arctan}۳x = \frac{\pi}{۲}$ برابر است با:

۱) $x = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $x = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $x = \sqrt{۳}$ ۴) $x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

۶ـ حاصل عبارت $A = \tan(\pi + \text{Arctan}x) + \cot(\frac{\pi}{۲} - \text{Arctan}x)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $x + \tan x$ ۳) $x + \cot x$ ۴) $۲x$

۷ـ هرگاه $x = \text{Arcsin}\frac{۴}{۵}$ باشد، $\cos۲x$ برابر است با:

۱) $\frac{۷}{۲۵}$ ۲) $-\frac{۷}{۲۵}$ ۳) $\frac{۱۶}{۲۵}$ ۴) $-\frac{۱۶}{۲۵}$

۸ـ حاصل $\tan^۲(\frac{۱}{۲}\text{Arccos}\frac{۳}{۱۰})$ برابر است با:

۱) $\frac{۷}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۷}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۳}{۷}$

۹ـ معادله‌ی $\text{Arcsin}(\cos۲x) = \frac{\pi}{۶}$ در فاصله‌ی $۰ < x < ۲\pi$ چند جواب دارد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۰ـ حاصل عبارت $B = \text{Arcsin}(\sin^۴\frac{\pi}{۷} - \cos^۴\frac{\pi}{۷})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳\pi}{۱۴}$ ۲) $-\frac{۲\pi}{۷}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۱۴}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۷}$

۱ـ (۳) $\text{Arctan}\frac{۱}{۲}=\alpha \Rightarrow \tan\alpha=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \tan ۲\alpha=\frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^{۲}\alpha}=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۴}}=\frac{۴}{۳}$

۲ـ (۴) $\text{Arcsin}\frac{۳}{۵}=\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\frac{۳}{۵} \quad , \text{Arctan}\frac{۳}{۴}=\beta \Rightarrow \tan\beta=\frac{۳}{۴}$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos\alpha=\sqrt{۱-\sin^{۲}\alpha}=\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\frac{۴}{۵}$

$\cos^{۲}\beta=\frac{۱}{۱+\tan^{۲}\beta}=\frac{۱}{۱+\frac{۹}{۱۶}}=\frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow \cos\beta=\frac{۴}{۵}$

$\sin\beta=\sqrt{۱-\cos^{۲}\beta}=\sqrt{۱-\frac{۱۶}{۲۵}}=\frac{۳}{۵}$

$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta)=\frac{۱۲}{۲۵}+\frac{۱۲}{۲۵}=\frac{۲۴}{۲۵}$

۳ـ (۳) $p=\pi-\text{Arccot}\frac{۱۰}{۹}-\text{Arccot}\frac{۹}{۱۰}=\pi-\text{Arccot}\frac{۱۰}{۹}-(\text{Arctan}\frac{۱۰}{۹})$

$=\pi-(\text{Arctan}\frac{۱۰}{۹}+\text{Arccot}\frac{۱۰}{۹})=\pi-\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi}{۲}$

۴ـ (۲) $\text{Arccot}m=\theta \Rightarrow \cot\theta=m \Rightarrow \tan\theta=\frac{۱}{m}$

$\sin ۲\alpha=\sin ۲(\pi+\theta)=\sin(۲\pi+۲\theta)=\sin ۲\theta=\frac{۲\tan\theta}{۱+\tan^{۲}\theta} \Rightarrow \sin ۲\theta=\frac{\frac{۲}{m}}{۱+\frac{۱}{m^{۲}}}=\frac{۲m}{m^{۲}+۱}$

۵ـ (۲) روش اول $\tan(\text{Arctan}x+\text{Arctan}۳x)=\tan\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{x+۳x}{۱-x.۳x}=$ تعریف نشده $\Rightarrow ۱-۳x^{۲}=۰$

$\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ قابل قبول

روش دوم: با امتحان کردن $\sqrt{۳}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ نیز به سادگی به همین جواب می‌رسید.

۶ـ (۴) $A=\tan(\text{Arctan}x)+\tan(\text{Arctan}x)=x+x=۲x$

۷ـ (۲) $x=\text{Arcsin}\frac{۴}{۵} \Rightarrow \sin x=\frac{۴}{۵} \quad , \cos ۲x=۱-۲\sin^{۲}x=۱-۲(\frac{۱۶}{۲۵})=-\frac{۷}{۲۵}$

۸ـ (۳) $\text{Arccos}\frac{۳}{۱۰}=\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{۳}{۱۰} \quad , \tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}=?$

$\tan^{۲}\frac{\alpha}{۲}=\frac{۱-\cos\alpha}{۱+\cos\alpha}=\frac{۱-\frac{۳}{۱۰}}{۱+\frac{۳}{۱۰}}=\frac{۷}{۱۳}$

۹ـ (۴) $\text{Arcsin}(\cos ۲x)=\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{۶}=\cos ۲x \Rightarrow \cos ۲x=\cos\frac{\pi}{۳}$

$\Rightarrow ۲x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳} \Rightarrow x=k\pi\pm\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶},\frac{۷\pi}{۶},\frac{۱۱\pi}{۶}$

۱۰ـ (۱) $B=\text{Arcsin}(-\cos\frac{۲\pi}{۷})=-\text{Arcsin}(\cos\frac{۲\pi}{۷})=-\text{Arcsin}(\sin(\frac{\pi}{۲}-\frac{۲\pi}{۷}))$

$=-\text{Arcsin}(\sin\frac{۳\pi}{۱۴})=-\frac{۳\pi}{۱۴}$

تست ۶:

۱ـ دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin\frac{x}{۳}\cos\frac{x}{۳}\cos\frac{۲x}{۳}$، کدام است؟

۱) π ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

۲ـ دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin^{۴}۲x - \sin^{۲}۲x$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۸}$ ۴) π

۳ـ دوره‌ی تناوب تابع $y = \lfloor ۲x \rfloor + \lfloor ۵x \rfloor - ۷x$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۲ ۴) ۱

۴ـ دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = (-۱)^{\left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor} \cos x$ کدام است؟

۱) π ۲) ۲π ۳) ۳ ۴) ۴

۵ـ دوره‌ی تناوب تابع $y = (-۱)^{\lfloor x \rfloor}(x - \lfloor x \rfloor)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۶ـ دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin(۲\pi x + \frac{\pi}{۳}) + ۲\sin(۳\pi x + \frac{\pi}{۴}) + ۳\sin ۵\pi x$ برابر است با:

۱) π ۲) ۱۵ ۳) ۲ ۴) ۳۰

۷ـ کدامیک از توابع زیر متناوب است؟

۱) $y = \sin x^{۳}$ ۲) $y = \cos\frac{۱}{x}$ ۳) $y = x\tan x$ ۴) $y = ۵$

۸ـ دوره‌ی تناوب تابع $y = \sin^{۴}۴x + \cos^{۴}۴x$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۱۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۸}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

۹ـ هرگاه دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = \tan ax + \cot ax$ برابر $\frac{۳\pi}{۴}$ باشد، مقدار a، کدام است؟ $(a > ۰)$

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۰ـ دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = \sin^{۲}\frac{\pi}{۶}x + x - ۴\left\lfloor \frac{x}{۴} \right\rfloor$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۱ـ (۲) $y=\frac{۱}{۲}\sin\frac{۲x}{۳}\cos\frac{۲x}{۳}=\frac{۱}{۴}\sin\frac{۴x}{۳}\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{\frac{۴}{۳}}=\frac{۳\pi}{۲}$

۲ـ (۲) $y=\sin^{۲}۲x(\sin^{۲}۲x-۱)=-\sin^{۲}۲x\cos^{۲}۲x=-\frac{۱}{۴}\sin^{۲}۴x\rightarrow T=\frac{\pi}{۴}$

۳ـ (۴) $y=\underbrace{\lfloor ۲x\rfloor-۲x}_{T_۱=\frac{۱}{۲}}+\underbrace{\lfloor ۵x\rfloor-۵x}_{T_۲=\frac{۱}{۵}}\Rightarrow T=۱$

۴ـ (۱) $T=\pi\Rightarrow f(x+\pi)=(-۱)^{\left\lfloor\frac{x+\pi}{\pi}\right\rfloor}\cos(x+\pi)=(-۱)^{\left\lfloor\frac{x}{\pi}\right\rfloor+۱}(-\cos x)=(+۱)^{\left\lfloor\frac{x}{\pi}\right\rfloor}\cos x=f(x)$

۵ـ (۱) $f(x+۲)=(-۱)^{\lfloor x+۲\rfloor}(x+۲-\lfloor x+۲\rfloor)=f(x)$

۶ـ (۳) $T_۱=\frac{۲\pi}{۲\pi}=۱\quad,T_۲=\frac{۲\pi}{۳\pi}=\frac{۲}{۳}\quad,T_۳=\frac{۲\pi}{۵\pi}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow T=۲$

۷ـ (۴) تابع ثابت، متناوب است.

۸ـ (۳) $y=۱-\frac{۱}{۲}\sin^{۲}۸x\Rightarrow T=\frac{\pi}{۸}$

۹ـ (۱) $\frac{\pi}{a}=\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow a=\frac{۴}{۳}$

۱۰ـ (۴) $f(x)=\sin^{۲}\frac{\pi}{۶}x+x-۴\left\lfloor\frac{x}{۴}\right\rfloor$

$T_۱=\frac{\pi}{\frac{\pi}{۶}}=۶\qquad T_۲=۴\qquad\rightarrow$ ک.م.م $T=۲۴$

سعی کن فرمانده‌ی روح خود باشی.	«چرچیل»

سخن گفتن یک نوع احتیاج است ولی گوش دادن هنر است.	«گوته»

سخن گفتن به موقع و سکوت نمودن به موقع، نشانه‌ی عقل است.	«سقراط»

صلح کن با مه، ببین مهتاب را	«مولوی»

تست ۷:

۱ـ جواب کلی معادلهٔ $\tan 5x \tan x = -1$ کدام است؟

۱) $k\pi - \frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{8}$ ۳) $\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{k\pi}{8} + \frac{\pi}{8}$

۲ـ معادلهٔ $\frac{\sin^4 x - \cos^4 x}{\sin x \cos x} = 2\sqrt{3}$، در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۳ـ جواب کلی معادلهٔ $\cos x \cos 7x - \cos 3x \cos 5x = 0$ برابر است با:

۱) $\frac{k\pi}{8}$ ۲) $\frac{k\pi}{4}$ ۳) $\frac{k\pi}{3}$ ۴) $k\pi$

۴ـ معادلهٔ $\sin 5x - \sin 3x = \sin x$، در فاصلهٔ $[0, \frac{\pi}{2}]$ چند ریشه دارد؟

۱) یک ریشه ۲) دو ریشه ۳) سه ریشه ۴) چهار ریشه

۵ـ مجموعه جواب کلی معادلهٔ $\tan(x - \frac{\pi}{12}) + \tan(\frac{7\pi}{12} - x) = 2$ کدام است؟

۱) $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ ۲) $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۳) $x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ۴) $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$

۶ـ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\frac{\sin 3x + \sin x}{\sin x} = 1$، به کدام صورت است؟

۱) $\frac{k\pi}{3}$ ۲) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

۷ـ جواب کلی معادلهٔ مثلثاتی $\log_a^{\sin x} + \log_a^{\cos x} = \log_a^{0/25}$ کدام است؟

۱) $\{x = k\pi + \frac{\pi}{6}$ ۲) $\{x = k\pi + \frac{\pi}{3}$

۳) $\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

۸ـ جواب کلی معادلهٔ $\sin^2(x - \frac{\pi}{8}) + 2\cos(\frac{5\pi}{8} - x) - 3 = 0$ کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{8}$ ۲) $2k\pi + \frac{\pi}{8}$ ۳) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ۴) $2k\pi + \frac{5\pi}{8}$

۹ـ اگر معادلهٔ $\tan 2x + m\cot 2x = 2\sqrt{2}$ دارای جواب باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m \leq 2$ ۲) $m < 2$ ۳) $m \geq 2$ ۴) $m > 2$

۱۰ـ مجموع جوابهای معادلهٔ $\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$ که در شرط $0 \leq x \leq 2\pi$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{5\pi}{2}$

۱ـ (۳) $\tan 5x = -\cot x = \cot(-x) = \tan(\frac{\pi}{2} + x) \Rightarrow 5x = k\pi + \frac{\pi}{2} + x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

۲ـ (۱) $\frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \cot 2x = -\sqrt{3} \Rightarrow 2x = k\pi - \frac{\pi}{6}$

$x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{6k\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$

۳ـ (۲) $\frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 6x) - \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x) = 0$

$\cos 6x = \cos 2x \Rightarrow \begin{cases} 6x = 2k\pi + 2x \\ 6x = 2k\pi - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{k\pi}{4} \end{cases}$

۴ـ (۳) $2\cos\frac{5x + 3x}{2}\sin\frac{5x - 3x}{2} = \sin x \Rightarrow 2\cos 4x \sin x = \sin x$

$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = 0$

$\cos 4x = \frac{1}{2} \Rightarrow \{4x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow \{x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$

۵ـ (۴) **نکته:** $a + \frac{1}{a} = 2 \Rightarrow a = 1$

$\tan(x - \frac{\pi}{12}) + \cot(x - \frac{\pi}{12}) = 2$

$\Rightarrow \tan(x - \frac{\pi}{12}) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{12} = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$

۶ـ (۳) $\frac{2\sin 2x \cos x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \frac{4\sin x\cos x\cos x}{\sin x} = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4} = \cos^2\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

یادآوری: $\cos^2 x = \cos^2\alpha \Rightarrow x = k\pi \pm \alpha$

۷ـ (۳) $\text{lig}_a^{\sin x \cos x} = \log_a^{0/25} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$

$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases}$

با توجه به دامنه‌ی تابع (که ربع اول است) جوابها قابل قبولند.

۸ـ (۴) $\sin^2(x - \frac{\pi}{8}) + 2\sin(x - \frac{\pi}{8}) - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin(x - \frac{\pi}{8}) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{8} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{8} \\ \sin(x - \frac{\pi}{8}) = \frac{c}{a} = -3 \text{ غیرقابل قبول} \end{cases}$

۹ـ (۱) $\tan^2 2x - 2\sqrt{2}\tan 2x + m = 0 \Rightarrow \Delta' \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{2})^2 - m \geq 0 \Rightarrow m \leq 2$

۱۰ـ (۲) $\sin(x + \frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{4} - x) = 1 \Rightarrow \sin^2(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - 3\frac{\pi}{4} \end{cases}$

$\rightarrow x_1 + x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$

یادآوری: $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$

فصل نهم

بخش پذیری

۱ـ باقیمانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x - a$: اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای برحسب x باشد، آنگاه $f(x)$ را بر $x - a$ تقسیم می‌کنیم، خارج قسمت را $Q(x)$ نامیده و باقیمانده را R می‌نامیم یعنی:

طبق امتحان عمل تقسیم داریم:

$$\begin{array}{r|l} f(x) & x-a \\ \hline R & Q(x) \end{array}$$

$$f(x) = (x - a)\,Q(x) + R$$

چون $f(a) = (a - a)\,Q(a) + R = \circ + R$ لذا $R = f(a)$

تذکر: اگر $f(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه $R = \circ$ است.

تذکر: در اینجا، R یک عدد است زیرا درجه‌اش بایستی از درجهٔ مقسوم علیه (همان $x - a$) که برابر ۱ است، کمتر باشد.

تست: اگر باقیماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای $2x^4 + mx + 2$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد، باقی‌ماندهٔ آن بر $x - 1$ کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۶ ۳) ۴ د) ۶

$x + 1 = \circ \Rightarrow x = -1 \Rightarrow R = f(-1) \Rightarrow 2 = 2 - m + 2 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow f(x) = 2x^4 + 2x + 2$

$x - 1 = \circ \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 + 2 + 2 = 6$

۲ـ باقیماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$:

$$ax + b = \circ \Rightarrow x = \frac{-b}{a} \Rightarrow R = f\left(\frac{-b}{a}\right)$$

۳ـ هرگاه باقیماندهٔ $f(x)$ بر $ax + b$، R باشد، باقیماندهٔ $f(x)$ بر $x + \frac{b}{a}$ نیز همان R است.

$$f(x) = (ax + b)q(x) + R = a\left(x + \frac{b}{a}\right)q(x) + R = \left(x + \frac{b}{a}\right)q(x) + R$$

۴ـ باقیماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax^n + b$:

$$ax^n + b = \circ \Rightarrow x^n = \frac{-b}{a}$$

حال $f(x)$ را بر حسب قوای نزولی x^n مرتب کرده، در $f(x)$، هر کجا x^n وجود دارد، $\frac{-b}{a}$، می‌گذاریم و این عمل را آنقدر ادامه می‌دهیم که دیگر در $f(x)$، x^n دیده نشود، عبارت بدست آمده همان باقی مانده خواهد بود.

تست: باقیماندهٔ $x^5 + x^3 + x + 1$ بر $x^2 + 2$ برابر است با:

۱) $x + 1$ ۲) $2x + 1$ ۳) $3x + 1$ ۴) $4x + 1$

$x^2 + 2 = \circ \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow f(x) = x(x^2)^2 + x(x^2) + x + 1$

$\xrightarrow{x^2=-2} R = f(x^2=-2) = 4x - 2x + x + 1 = 3x + 1$ باقی مانده

توجه کنید که چون مقسوم علیه از درجهٔ ۲ است لذا باقی مانده، یک عبارت حداکثر از درجهٔ ۱ مانند $ax+b$ خواهد بود.

تست: باقی ماندهٔ تقسیم $x^4 + ax^3 + bx^2 + x + 1$ بر $x^2 - 1$ برابر صفر است، b کدام است؟

۱) -3 ۲) -2 ۳) 2 ۴) 3

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$

$(x^2)^2 + ax.x^2 + bx + x + 1 \Rightarrow 1 + ax + b + x + 1 \equiv 0$

$(a+1)x + (b+2) \equiv 0x + 0 \Rightarrow \begin{cases} a+1=0 \\ b+2=0 \quad \Rightarrow b=-2 \end{cases}$

تست: باقیماندهٔ $x^{48} - 2x^4 + 1$ بر x^3 کدام است؟

۱) 0 ۲) x^2+1 ۳) 1 ۴) $x^2 - x + 1$

$x^3 = 0 \Rightarrow (x^3)^{16} - 2x.x^3 + 1 = 0 - 2x(0) + 1 = 1 \Rightarrow R = 1$

تست: باقیماندهٔ $ax^{3n+2} + bx^{2n+1} + c$ بر $x^n + 1$ کدام است؟ $(n > 2)$

۱) $ax^2 + bx - c$ ۲) $ax^2 - bx + c$ ۳) $-ax^2 + bx + c$ ۴) $ax^2 + bx + c$

$x^n = -1 \Rightarrow a(x^n)^3x^2 + b(x^n)^2x + c = -ax^2 + bx + c$

۵) باقی ماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax^2 + bx + c$:

کافی است مقسوم علیه را مساوی صفر قرار داده و بزرگترین عامل یعنی x^2 را استخراج کرده و سپس مطابق حالت قبل (حالت ۴) عمل می‌کنیم.

مثال: ثابت کنید $x^4 + 2x^2\cos 2\alpha + 1$ بر $x^2 + 2x\sin\alpha + 1$ بخش‌پذیر است؟

$x^2 + 2x\sin\alpha + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -2x\sin\alpha - 1$

$(x^2)^2 + 2x^2\cos\alpha + 1 = (-2x\sin\alpha - 1)^2 + 2(-2x\sin\alpha - 1)\cos 2\alpha + 1$

$= 4x^2\sin^2\alpha + 4x\sin\alpha + 1 - 4x\sin\alpha\cos 2\alpha - 2\cos 2\alpha + 1$

$= 4(-2x\sin\alpha - 1)\sin^2\alpha + 4x\sin\alpha + 4x\sin\alpha\cos 2\alpha - 2\cos 2\alpha + 2$

$= -8x\sin^3\alpha - 4\sin^2\alpha + 4x\sin\alpha\underbrace{(1-\cos 2\alpha)}_{2\sin^2\alpha} + 2\underbrace{(1-\cos 2\alpha)}_{2\sin^2\alpha}$

$= -8x\sin^3\alpha - 4\sin^2\alpha + 8x\sin^3\alpha + 4\sin^2\alpha$

$= 0 \Rightarrow R = 0$ لذا بخش پذیر است.

مثال: اگر $x^4 + mx + n$ بر $x^2 - 2x - 3$ بخش‌پذیر باشد، m و n را بیابید؟

حل: روش اول: وقتی که مقسوم علیه قابل تجزیه است می‌نویسیم $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$، لذا مقسوم باید هم بر

$x-۳$ و هم بر $x+۱$ بخش‌پذیر باشد به عبارت دیگر باقیماندهٔ $f(x)$ بر $x-۳$ و $x+۱$ یعنی $p(۳)$ و $p(-۱)$ برابر صفر باشند.

$$\Rightarrow \begin{cases} p(۳) = ۸۱ + ۳m + n = ۰ \\ p(-۱) = ۱ - m + n = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳m + n = -۸۱ \\ m - n = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -۲۰ \\ n = -۲۱ \end{cases}$$

روش دوم: برای اینکه $f(x)$ بر $x^۲ - ۲x - ۳$ بخش‌پذیر باشد باید باقیمانده صفر باشد لذا اگر فرض کنیم سه جمله‌ای $ax^۲ + bx + c$ خارج قسمت باشد آنگاه داریم:

$$x^۴ + mx + n = (x^۲ - ۲x - ۳)(ax^۲ + bx + c)$$

واضح است که $a = ۱$ بوده و داریم:

$$x^۴ + ۰x^۳ + ۰x^۲ + mx + n \equiv x^۴ + (b - ۲)x^۳ + (c - ۲b - ۳)x^۲ - (۲c + ۳b)x - ۳c$$

لذا

$$\begin{cases} b - ۲ = ۰ \\ c - ۲b - ۳ = ۰ \\ -۲c - ۳b = m \\ -۳c = n \end{cases} \xrightarrow[\text{حل دستگاه}]{\text{پس از}} \begin{cases} n = -۲۱ \\ m = -۲۰ \\ c = ۷ \\ b = ۲ \end{cases}$$

با این روش علاوه بر اینکه m و n بدست می‌آیند خارج قسمت تقسیم که $x^۲ + ۲x + ۷$ می‌باشد، نیز بدست می‌آید.

روش سوم: $x^۴ + mx + n$ را بر $x^۲ - ۲x - ۳$ تقسیم کرده، باقیماندهٔ تقسیم را متحد با صفر قرار می‌دهیم. پس از تقسیم خارج قسمت $x^۲ + ۲x + ۷$ و باقیمانده $(m + ۲۰)x + n + ۲۱$ بدست می‌آید پس:

$$R = (m + ۲۰)x + n + ۲۱ \equiv ۰ = ۰x + ۰ \Rightarrow \begin{cases} m + ۲۰ = ۰ \\ , \\ n + ۲۱ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -۲۰ \\ , \\ n = -۲۱ \end{cases}$$

۶) هرگاه باقیماندهٔ $f(x)$ بر $x-a$ برابر $R_۱$ و بر $x - b$ برابر $R_۲$ باشد، باقیماندهٔ $f(x)$ بر $(x - a)(x - b)$، (که حداکثر از درجهٔ

اول

است) را می‌توان از فرمول زیر بدست آورد.

$$R(x) = \frac{R_۱ - R_۲}{a-b}x + \frac{R_۲a - R_۱b}{a-b} \quad \text{یا} \quad R_۱.\frac{x-b}{a-b} + R_۲.\frac{x-a}{b-a}$$

یا $\qquad (a \neq b)$,

$$R(x) = (\frac{R_۱ - R_۲}{a-b})(x - b) + R_۲ \quad \text{یا} \quad (\frac{R_۱ - R_۲}{a-b})(x - a) + R_۱$$

اثبات: فرض می‌کنیم $R(x) = mx + n$، حال بر طبق تقسیم مقابل داریم:

$$\begin{array}{l|l} f(x) & (x-a)(x-b) \\ \hline - & Q(x) \\ R(x) = mx + n & \end{array} \qquad f(x) = (x - a)(x - b)\, Q(x) + mx + n$$

$$-\begin{cases} R_۱ = ma + n \\ R_۲ = mb + n \end{cases} \Rightarrow m(a - b) = R_۱ - R_۲ \qquad \boxed{m = \frac{R_۱ - R_۲}{a - b}}$$

$ma + n = R_1 \Rightarrow n = R_1 - ma = R_1 - \frac{R_1 - R_2}{a-b}a$

$n = \frac{R_1 a - R_1 b - R_1 a + R_2 a}{a-b} = \frac{R_2 a - R_1 b}{a-b}$

$\Rightarrow R(x) = mx + n = \frac{R_1 - R_2}{a-b}x + \frac{R_2 a - R_1 b}{a-b}$

تست: اگر باقیماندهٔ $f(x)$ بر $x+2$ و $x+3$ به ترتیب برابر ۱- و ۲ باشد، باقیماندهٔ $f(x)$ بر x^2+5x+6 برابرست با:

۱) $3x$ ۲) $-3x$ ۳) $-3x+7$ ۴) $-3x-7$

$f(x) = (x^2 + 5x + 7)\,Q(x) + mx + n$

$\begin{cases} -1 = f(-2) = -2m + n \\ 2 = f(-3) = -3m + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ n = -7 \end{cases} \Rightarrow R(x) = mx + n \quad \Rightarrow \quad \boxed{R(x) = -3x - 7}$

با استفاده از فرمول:

$R(x) = \frac{R_1 - R_2}{a-b}x + \frac{R_2 a - R_1 b}{a-b}$

$= \frac{-1-2}{-3-(-2)}x + \frac{2(-2)-(-1)(-3)}{-3-(-2)} = -3x - 7$

۷) هر گاه باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ و $g(x)$ بر $b(x)$ به ترتیب برابر $r(x)$ و $s(x)$ باشد در این صورت باقیماندهٔ تقسیم $f(x).g(x)$ بر $b(x)$ برابر است با باقیماندهٔ تقسیم $r(x).s(x)$ بر $b(x)$.

اثبات:

$\begin{cases} f(x) = b(x)\,Q_1(x) + r(x) \\ g(x) = b(x)Q_2(x) + s(x) \end{cases} \quad \times$

$f(x).g(x) = (b(x))^2 Q_1(x)\, Q_2(x) + b(x)s(x)Q_1(x) + b(x)\, r(x)\, Q_2(x) + r(x)s(x)$

سه عبارت اول سمت راست تساوی فوق، هر سه بر $b(x)$ بخش‌پذیرند لذا باقیماندهٔ $f(x)g(x)$ بر $b(x)$ با باقیماندهٔ $r(x)s(x)$ بر $b(x)$ یکی است.

تست: اگر باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ و $g(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ به ترتیب $x - 2$ و $x + 2$ باشد باقیماندهٔ $f(x).g(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$ کدام است؟

۱) $3x-6$ ۲) $2x-6$ ۳) $3x+6$ ۴) $2x+6$

حل: کافی است باقیماندهٔ $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$ بر $x^2 - 3x + 2$ را بیابیم.

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 3x - 2$

$R(x) = 3x - 2 - 4 = 3x - 6$

یادآوری اتحادهای چاق و لاغر:

$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$

$x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1)$, (n فرد)

۸) برای اثبات بخش‌پذیری $f(x)$ بر $A = (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$ و یا بر $B = (x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1)$ کافی است ثابت کنیم باقیماندهٔ $f(x)$ به ترتیب بر $(x - 1)A = x^n - 1$ صفر است و یا A است و بر $(x + 1)B = x^n + 1$ صفر است و یا B است.

مثال: ثابت کنید $x^5 + x + 1$ بر $x^2 + x + 1$ بخش‌پذیر است؟

حل: طبق اتحاد $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ داریم:

باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x^3 - 1$

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x^3.x^2 + x + 1 = 1(x^2) + x + 1 = x^2 + x + 1$$

لذا:

$$x^5 + x + 1 = (x^3 - 1)Q(x) + x^2 + x + 1$$

و یا

$$x^5 + x + 1 = (x^2 + x + 1)\underbrace{[(x - 1)Q(x) + 1]}_{Q'(x)}$$

$$= (x^2 + x + 1)Q'(x) + 0$$

و این یعنی $f(x)$ بر $x^2 + x + 1$ بخش‌پذیر است.

مثال: ثابت کنید $f(x) = x^{9999} + x^{8888} + x^{7777} + \dots + x^{1111} + 1$ بر $x^9 + x^8 + x^7 + \dots + x + 1$ بخش‌پذیر است؟

حل: با توجه به اتحاد $x^{10} - 1 = (x - 1)(x^9 + x^8 + \dots + x + 1)$ داریم:

$$x^{10} = 1 \Rightarrow (x^{10})^{999}.x^9 + (x^{10})^{888}.x^8 + \dots + (x^{10})^{111}.x + 1$$

$$= 1x^9 + 1x^8 + \dots + 1x + 1 = x^9 + x^8 + \dots + x + 1$$

لذا

$$f(x) = (x^{10} - 1)Q(x) + x^9 + x^8 + \dots + x + 1$$

و یا

$$f(x) = (x^9 + x^8 + \dots + x + 1)\underbrace{[(x - 1)Q(x) + 1]}_{Q'(x)}$$

$$= (x^9 + x^8 + \dots + x + 1)Q'(x) + 0$$

یعنی $f(x)$ بر $x^9 + x^8 + \dots + x + 1$ بخش‌پذیر است.

۹) باقیماندهٔ $x^n \pm a^n$ بر $x \pm a$ $(n \in N , a > 0)$

الف) $x^n - a^n$ همواره بر $x - a$ بخش‌پذیر است. زیرا:

$$x - a = 0 \Rightarrow x = a \Rightarrow R = x^n - a^n = a^n - a^n = 0$$

ب) $x^n - a^n$ به ازاء n زوج بر $x + a$ بخش‌پذیر است. زیرا:

$$x + a = 0 \Rightarrow x = -a \Rightarrow R = x^n - a^n = (-a)^n - a^n \xlongequal{\text{زوج } n} a^n - a^n = 0$$

ج) $x^n - a^n$ به ازاء n فرد بر $x + a$ بخش‌پذیر نیست و باقیمانده‌اش $-2a^n$ است.

$$x + a = 0 \Rightarrow x = -a \Rightarrow R = x^n - a^n = (-a)^n - a^n \xlongequal{\text{فرد } n} -a^n - a^n = -2a^n$$

د) $x^n + a^n$ به ازاء n فرد بر $x + a$ بخش‌پذیر است. زیرا:

$x + a = 0 \Rightarrow x = -a \Rightarrow R = x^n + a^n = (-a)^n + a^n \xrightarrow{\text{فرد } n} -a^n + a^n = 0$

ه) $x^n + a^n$ به ازاء n زوج بر $x + a$ بخش‌پذیر نیست و باقیمانده‌اش $2a^n$ است زیرا:

$x + a = 0 \Rightarrow x = -a \Rightarrow R = x^n + a^n = (-a)^n + a^n \xrightarrow{\text{زوج } n} a^n + a^n = 2a^n$

و) $x^n + a^n$ هرگز بر $x - a$ بخش‌پذیر نیست و باقیمانده‌اش بر $x - a$، $2a^n$ است زیرا:

$x - a = 0 \Rightarrow x = a \Rightarrow R = x^n + a^n = a^n + a^n = 2a^n$

۱۰) بخش پذیری $x^n \pm a^n$ بر $x^k \pm a^k$ $(n,k \in N , a > 0)$

الف) $x^n + a^n$ هیچگاه بر $x^k - a^k$ بخش‌پذیر نیست.

تست: باقیماندهٔ $x^{15} + a^{15}$ بر $x^3 - a^3$ برابر است با:

۱) a^{15} ۲) 0 ۳) $2a^{15}$ ۴) $-2a^{15}$

$x^3 - a^3 = 0 \Rightarrow x^3 = a^3 \Rightarrow R = (x^3)^5 + a^{15} = (a^3)^5 + a^{15} = 2a^{15}$

ب) $x^n + a^n$ وقتی بر $x^k + a^k$ بخش‌پذیر است که $\frac{n}{k}$ فرد باشد یعنی: $n = (2p + 1)k , p \in z$

مثال: آیا $x^{60} + 1$ بر $x^{20} + 1$ بخش‌پذیر است یا نه، چرا؟

بلی، زیرا: $\frac{60}{20} = 3$ فرد است.

تست: کدام درست است؟

۱) $x^4 + a^4$ بر $x^2 + a^2$ بخش‌پذیر است.
۲) $x^9 + a^9$ بر $x^3 + a^3$ بخش‌پذیر است.
۳) $x^{15} + a^{15}$ بر $x^5 - a^5$ بخش‌پذیر است.
۴) $x^{48} + a^{48}$ بر $x^6 + a^6$ بخش‌پذیر است.

حل: گزینهٔ (۲) درست است زیرا: $\frac{9}{3} = 3$ فرد است.

تست: عبارت $x^{24} + 1$ بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟

۱) $x^{12} + 1$ ۲) $x^3 + 1$ ۳) $x^6 + 1$ ۴) $x^8 + 1$

حل: گزینه‌ی ۴ صحیح است. زیرا $\frac{24}{8} = 3$ فرد است، در واقع داریم: $x^{24} + 1 = (x^8)^3 + 1 = (x^8 + 1)(x^{16} - x^8 + 1)$

ج: $x^n - a^n$ زمانی بر $x^k + a^k$ بخش‌پذیر است که $\frac{n}{k}$ زوج باشد یعنی: $p \in z$ و $n = 2pk$

مثال: عبارت $x^{48} - 1$ بر کدام یک از عبارات $x^{24} + 1$، $x^{12} + 1$، $x^8 + 1$، $x^6 + 1$، $x^4 + 1$، $x^3 + 1$، $x^2 + 1$ بخش‌پذیر است؟ طبق نکته‌ی فوق بر همگی بخش‌پذیر است.

د) $x^n - a^n$ بر $x^k - a^k$ وقتی بخش‌پذیر است که n بر k بخش‌پذیر باشد یعنی: $p \in z$ و $n = pk$

مثال: عبارت $x^{30} - a^{30}$ بر $x^{15} - a^{15}$، $x^{10} - a^{10}$، $x^6 - a^6$، $x^5 - a^5$، $x^3 - a^3$، $x^2 - a^2$ و $x - a$ بخش‌پذیر است (طبق نکته د)

۱۱) بخش‌پذیری $f(x)$ بر $(x - a)^n$: قضیه: شرط لازم و کافی برای آنکه چند جمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)^n$ بخش‌پذیر باشد، آنستکه $p(x)$ و همهٔ مشتقات متوالی آن تا مرتبهٔ $(n-1)$ام، بر $x - a$ بخش‌پذیر باشند یعنی داشته باشیم:

$p(a) = p'(a) = p''(a) = \dots = p^{(n-1)}(a) = 0$

مثال: ثابت کنید $f(x) = x^{n+1} - (n+1)x + n$ بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر است؟

حل:

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$f'(x) = (n+1)x^n - (n+1)$ $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$ بسادگی دیده می‌شود

لذا بخش‌پذیر است.

مثال: a و b و c را چنان بیابید تا $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ بر $(x+1)^2(x-3)$ بخش‌پذیر باشد؟

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \Rightarrow \\ f(3) = 0 \Rightarrow \\ f'(3) = 0 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} -1 + a - b + c = 0 \\ 27 + 9a + 3b + c = 0 \\ 27 + 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} - \begin{cases} 9a + 3b + c = -27 \\ a - b + c = 1 \end{cases} \\ + \text{-------------} \\ \begin{cases} 8a + 4b = -28 \\ 6a + b = -27 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 3 \\ c = 9 \end{cases} \end{array}$$

تست: چند جمله‌ای $x^4 + x^3 + x - 1$ بر کدام عبارت بخش‌پذیر است؟

۱) $x^2 - x - 1$ ۲) $x^2 - x + 1$ ۳) $x^2 + x - 1$ ۴) $x^2 + x + 1$

حل: $x^4 + x^3 + x - 1 = (x^4 - 1) + (x^3 + x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + x(x^2 + 1)$

$= (x^2 + 1)\underbrace{(x^2 - 1 + x)}$

لذا گزینه ۲ درست است.

تست: هرگاه باقیماندهٔ $f(x)$ بر $x - 1$ برابر ۵ باشد، باقیماندهٔ $f(x^3)$ بر $x - 1$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱۲۵ ۳) ۵ ۴) ۱۵

$f(x) = (x - 1)\,Q(x) + 5$

$x \to x^3 \Rightarrow f(x^3) = (x^3 - 1)\,Q(x) + 5$

$= (x - 1)\underbrace{(x^2 + x + 1)Q(x)}_{Q'(x)} + 5$

$= (x - 1)\,Q'(x) + 5$

پس باقیماندهٔ مطلوب برابر ۵ است.

۱۲) حل مسأله از طریق همنشتی:

مثال: اگر باقیماندهٔ $f(x)$ و $g(x)$ بر $x^۲+x+۱$ به ترتیب $x-۱$ و $۲x+۳$ باشند مطلوبست باقیماندهٔ:

الف) $۲f(x)-۳g(x)$ بر $x^۲+x+۱$

ب) $f(x).g(x)$ بر $x^۲+x+۱$

حل:

الف)

$$\begin{cases} f(x) \overset{x^۲+x+۱}{\equiv} x-۱ \\ g(x) \overset{x^۲+x+۱}{\equiv} ۲x+۳ \end{cases} \Rightarrow -\begin{cases} ۲f(x) \overset{x^۲+x+۱}{\equiv} ۲x-۲ \\ ۳g(x) \overset{x^۲+x+۱}{\equiv} ۶x+۹ \end{cases}$$

$$۲f(x)-۳g(x) \overset{x^۲+x+۱}{\equiv} -۴x-۱۱$$ باقیمانده

ب)

$$\times\begin{cases} f(x) \overset{x^۲+x+۱}{\equiv} x-۱ \\ g(x) \overset{x^۲+x+۱}{\equiv} ۲x+۳ \end{cases}$$

$$f(x).g(x) \overset{x^۲+x+۱}{\equiv} ۲x^۲+x-۳ \overset{x^۲+x+۱}{\equiv} ۲x^۲+x-۳-۲(x^۲+x+۱)$$

$$f(x).g(x) \overset{x^۲+x+۱}{\equiv} -x-۵$$ باقیمانده

تست: اگر باقیماندهٔ A بر ۱۷ برابر ۱۵ باشد، باقیماندهٔ $۳A-۲۱$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۰

حل:

$$A \overset{۱۷}{\equiv} ۱۵ \Rightarrow ۳A \overset{۱۷}{\equiv} ۴۵ \Rightarrow ۳A-۲۱ \overset{۱۷}{\equiv} ۴۵-۲۱$$

$$۳A-۲۱ \overset{۱۷}{\equiv} ۲۴ \overset{۱۷}{\equiv} ۷$$ باقیمانده

تست: اگر باقیماندهٔ x و y و z بر m به ترتیب a و b و c باشد، باقیمانده $xyz-abc$ بر m کدام است؟

۱) $m-۱$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

$$\times\begin{cases} x \overset{m}{\equiv} a \\ y \overset{m}{\equiv} b \\ z \overset{m}{\equiv} c \end{cases}$$

$$xyz \overset{m}{\equiv} abc \Rightarrow m \mid xyz-abc \Rightarrow$$ باقیمانده $=۰$

۱۳) می‌دانیم هرگاه عبارتی بر چند عبارت که دو به دو نسبت به هم اولند بخش‌پذیر باشد، بر حاصلضربشان نیز بخش‌پذیر است. لذا برای اثبات اینکه ثابت کنیم $f(x)$ بر $(x-a)(x-b)(x-c)$ بخش‌پذیر است، می‌توان ثابت کرد $f(x)$ بر $x-a$ و $x-b$ و $x-c$ بخش‌پذیر است.

مثال: ثابت کنید $f(x)=(x-y)^۳+(y-z)^۳+(z-x)^۳$ بر عبارت $(x-y)(y-z)(z-x)$ بخش‌پذیر است؟

حل: ثابت می‌کنیم $f(x)$ بر $x-y$ و $y-z$ و $z-x$ بخش‌پذیر است.

$$x-y=۰ \Rightarrow x=y \Rightarrow f(x=y)=(x-x)^۳+(x-z)^۳+(z-x)^۳=۰$$

لذا $f(x)$ بر $x-y$ بخش‌پذیر است، بهمین ترتیب ثابت می‌شود که $f(x)$ بر $y-z$ و $z-x$ نیز بخش‌پذیر است، لذا بر حاصلضربشان نیز بخش‌پذیر است.

مثال: چند جمله‌ای از درجه‌ی چهارم $f(x)$ را چنان بیابید که $f(x+۲)$ بر $x^۲-x+۱$ و $f(x-۱)$ بر $x^۲+۴x+۴$

بخش‌پذیر بوده $f(\circ) = ۱۶۲$ باشد؟

$$\begin{cases} f(x+۲) = (x-۱)^۲ Q(x) \xrightarrow{\text{x را به x-۲ تبدیل می‌کنیم.}} \\ f(x-۱) = (x+۲)^۲ Q'(x) \xrightarrow{\text{x را به x+۱ تبدیل می‌کنیم.}} \end{cases} \begin{cases} f(x) = (x-۳)^۲ Q(x) \\ f(x) = (x+۳)^۲ Q'(x) \end{cases}$$

حال چون $f(x)$ بر $(x-۳)^۲$ و $(x+۳)^۲$ که نسبت به هم اولند بخش‌پذیر است، لذا بر حاصلضربشان نیز بخش‌پذیر است و چون $f(x)$ از درجهٔ چهارم است لذا: $f(x) = k(x-۳)^۲(x+۳)^۲$

و یا $f(x) = k(x^۲-۹)^۲ \Rightarrow f(\circ) = ۸۱k \xrightarrow{f(\circ)=۱۶۲} ۸۱k = ۱۶۲$

$\Rightarrow k = ۲ \Rightarrow f(x) = ۲(x^۲-۹)^۲$

عمر ضایع مکن ایدل، که جهان می‌گذرد. «سعدی»

علم نور است و جهل تاریکی. «اوحدی»

عبادت به جز خدمت خلق نیست. «سعدی»

فقط یک چراغ است که مرا هدایت می‌کند و آن چراغ تجربه است. «پاتریک هانری»

کسی که کم فکر می‌کند، زیاد حرف می‌زند. «تولستوی»

کسی را سزد گنج، کو برده رنج. «فردوسی»

کسی که مرتکب اشتباه نشده، اکتشافی هم نکرده است. «گالیله»

تست ۱:

۱ـ اگر باقیماندهٔ $f(x)$ بر $x-1$ برابر ۲ باشد، باقیماندهٔ $f(x^3)$ بر $x-1$ برابر است با:

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۲

۲ـ اگر n و $m \in N$ باشند، برای اینکه $x^{mn}+1$ بر x^m+1 بخش‌پذیر باشد، لازم است که:

۱) $m=2k$ ۲) $m=2k+1$ ۳) $n=2k$ ۴) $n=2k+1$

۳ـ عبارت $A=(x^3+x^2+4)^3-(x^3-2x+3)^3$ بر کدام یک از عبارات زیر بخش پذیر است؟

۱) $(x-1)^2$ ۲) x^2-1 ۳) $(x+1)^2$ ۴) x^2+1

۴ـ باقیماندهٔ تقسیم $x^{16}+2x^{13}+x^7-1$ بر x^2+x+1 کدام است؟

۱) $1-4x$ ۲) $4x-1$ ۳) $4x+1$ ۴) $-4x-1$

۵ـ به ازاء چه مقادیری از a و n، عبارت $(a-2)x^n-2ax^{n-1}+8$ بر $x-2$ بخش‌پذیر است؟

۱) $\begin{cases}a=2\\n=3\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}a=\text{دلخواه}\\n=5\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}a=2\\n=\text{دلخواه}\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}a=\text{دلخواه}\\n=2\end{cases}$

۶ـ کدام نادرست است؟ $(n \in N)$

۱) x^n-a^n همیشه بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

۲) x^n+a^n هیچوقت بر $x-a$ بخش‌پذیر نیست.

۳) x^n+a^n وقتی بر $x+a$ بخش‌پذیر است که n فرد باشد.

۴) x^n-a^n همیشه بر $x+a$ بخش‌پذیر است.

۷ـ اگر x^2-x-6 یک عامل $x^4+ax^3-9x^2+bx-6$ باشد، مقدار $4a+b$ کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲- ۳) ۱۳- ۴) ۲۵

۸ـ باقیماندهٔ تقسیم x^5-ax^2+2 بر $x+2$ برابر ۶ است، a کدام است؟

۱) ۱۲- ۲) ۳- ۳) ۱۵- ۴) ۹-

۹ـ باقیماندهٔ $P(x)=(ax^k+c)^{2n+1}+(cx^k+a)^{2n+1}$ بر x^k+1 چیست؟ $(n \in N)$

۱) ۰ ۲) $(a+c)^{2n+1}$ ۳) a^{2n+1} ۴) ۱

۱۰ـ اگر $(x^2+4x+b)(x^2+ax+2)=x^4-48x+28$، در این صورت $a+b$ چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۰ ۴) ۲۰

۱ـ (۴)
$f(x)=(x-1)q(x)+2$

$f(x^3)=(x^3-1)q(x^3)+2=(x-1)(x^2+x+1)q(x^3)+2=(x-1)q'(x)+2$

۲ـ (۴)
$x^m+1=0\Rightarrow x^m=-1\Rightarrow R=x^{mn}+1=(x^m)^n+1=(-1)^n+1=0\Rightarrow n=2k+1$

۳ـ (۳)
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$(x^3+x^2+4)^3-(x^3-2x+3)^3=(x^3+x^2+4-x^3+2x-3)(...)$

$=(x^2+2x+1)(...)=(x+1)^2(...)$

۴ـ (۲)
$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$x^3-1=0\Rightarrow x^3=1\Rightarrow R=x^{16}+2x^{13}+x^7-1=(x^3)^5x+2(x^3)^4x+(x^3)^2x-1$

$=1x+2x+x-1=4x-1$

$\Rightarrow x^{16}+2x^{13}+x^7-1=(x^3-1)q(x)+4x-1=(x-1)(x^2+x+1)q(x)+4x-1$

$=(x^2+x+1)q'(x)+4x-1$

۵ـ (۴)
$x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow R=(a-2)2^n-2a2^{n-1}+8=a2^n-2^{n+1}-a2^n+8=-2^{n+1}+8=0\Rightarrow \begin{cases}n=2\\ a=\text{دلخواه}\end{cases}$

۶ـ (۴) x^n-a^n هنگامی بر $x+a$ بخش‌پذیر است که n زوج باشد.

۷ـ (۳) راه اول:
$x^2-x-6=0\Rightarrow x^2=x+6$

$R=(x^2)^2+axx^2-9x^2+bx-6=(x+6)^2+ax(x+6)-9(x+6)+bx-6$

$=x^2+12x+36+ax^2+6ax-9x-54-9(x+6)+bx-6$

$=(1+a)(x+6)+3x-24+6ax+bx$

$=(4+a+6a+b)x+6a-18=0x+0\Rightarrow\begin{cases}6a-18=0 & \Rightarrow a=3\\ 14+7a+b=0\Rightarrow b=-25\end{cases}$

$4a+b=-13$

راه دوم: از حل دستگاه a و b واز آنجا $4a+b$ بدست می‌آیند.
$x^2-x-6=0\Rightarrow x=3\,,\,x=-2\Rightarrow\begin{cases}f(3)=0\\ f(-2)=0\end{cases}$

۸ـ (۴)
$x+2=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow R=-32-4a+2=6\Rightarrow a=-9$

۹ـ (۱)
$x^k+1=0\Rightarrow x^k=-1\qquad p(x^k=-1)=(-a+c)^{2n+1}+(-c+a)^{2n+1}=0$

۱۰ـ (۱)
$x^4-48x+28=x^4+(4+a)x^3+Ax^2+Bx+2b$

$\begin{cases}4+a=0\\ 2b=28\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\ b=14\end{cases}\Rightarrow a+b=10$

تست ۲:

۱ـ باقی ماندهٔ تقسیم $(x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1) \div (1+2x^{2})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ ۴) $-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

۲ـ اگر باقیماندهٔ $ax^{3}+bx^{2}+2x+c$ بر $x-1$، ۲ باشد باقیماندهٔ $ax^{2}+bx+c$ بر $x-\frac{c}{a}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1

۳) ۰ ۴) با این معلومات محاسبه نمی‌شود.

۳ـ کثیر الجملهٔ $f(x) = (x-3)^{2m}+(x-2)^{m}-1$ بر کدام یک از عبارات زیر بخش‌پذیر است؟

۱) فقط بر $x-3$ ۲) فقط بر $x-2$ ۳) بر $(x-2)(x-3)$ ۴) بر $(x+2)(x-3)$

۴ـ اگر عبارت $ax^{4}-x^{2}+b$ بر $x^{2}+2$ بخش‌پذیر باشد، باقیماندهٔ تقسیم $x^{2}-2ax+b$ بر $x+2$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۰ ۳) ۴ ۴) ۲

۵ـ هرگاه باقیماندهٔ $f(x)$ بر $x-1$ و $x-2$ به ترتیب برابر ۲ و ۳ باشد، باقیماندهٔ $f(x)$ بر $x^{2}-3x+2$ کدام است؟

۱) $x-1$ ۲) $1-x$ ۳) $-x-1$ ۴) $x+1$

۶ـ باقیماندهٔ تقسیم $x^{5}+x^{3}+7$ بر $x^{2}-x$ برابر است با:

۱) $7-2x$ ۲) $-2x-7$ ۳) $2x-7$ ۴) $2x+7$

۷ـ هرگاه $f(x) = x^{5}-4x^{3}+2$، باقیماندهٔ تقسیم $f(3x+1)$ بر $3x+1$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) -5

۸ـ هرگاه باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ و $g(x)$ بر $x^{2}+2x+2$ به ترتیب x و $x+2$ باشد، باقیماندهٔ تقسیم $f(x)-g(x)$ بر $x^{2}+2x+2$ برابر است با:

۱) $x^{2}+2x$ ۲) x ۳) -2 ۴) ۱

۹ـ برای اینکه عبارت $x^{3}\cos^{3}\alpha - mx\sin 2\alpha + \sin^{3}\alpha$ بر $x\cos\alpha - \sin\alpha$ بخش‌پذیر باشد، کافی است؟

۱) $m = \cos\alpha$ ۲) $m = \sin\alpha$ ۳) $m = \cot\alpha$ ۴) $m = \tan\alpha$

۱۰ـ برای آنکه عبارت $2x^{2}-2x\sin\alpha-1$ بر $x-\cos\alpha$ بخش‌پذیر باشد، باید:

۱) $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{4}$ ۲) $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{8}$ ۳) $\alpha = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ ۴) $\alpha = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

۱ـ (۳) $۲x^۲+۱=۰\Rightarrow x^۲=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow R=(x^۲)^۲+x(x^۲)+x^۲+x+۱=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}+x+۱$
$=\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۴}$

۲ـ (۳) $x-۱=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow R=a+b+۲+c=۲\Rightarrow a+b+c=۰$
$x-\frac{c}{a}=۰\Rightarrow x=\frac{c}{a}\Rightarrow R'=a(\frac{c}{a})^۲+b(\frac{c}{a})+c=\frac{c^۲+bc+ca}{a}=\frac{c(c+b+a)}{a}=\frac{c\times ۰}{a}=۰$

۳ـ (۳) $x-۳=۰\Rightarrow x=۳\Rightarrow f(۳)=۰$
$x-۲=۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow f(۲)=۰$

۴ـ (۴) $x^۲=-۲\Rightarrow R=a(x^۲)^۲-x^۲+b=۴a+۲+b=۰\Rightarrow ۴a+b=-۲$
$x=-۲\Rightarrow R'=۴+۴a+b=۴-۲=۲$

۵ـ (۴) $R(x)=\frac{R_۱-R_۲}{a-b}x+\frac{R_۲a-R_۱b}{a-b}$
$=\frac{۲-۳}{۱-۲}x+\frac{۳(۱)-۲(۲)}{۱-۲}=x+۱$

۶ـ (۴) $x^۲-x=۰\Rightarrow x^۲=x\Rightarrow R=(x^۲)^۲.x+(x^۲)x+۷=x^۲+x^۲+۷$
$=x+x+۷=۲x+۷$

۷ـ (۳) $f(۳x+۱)=(۳x+۱)^۵-۴(۳x+۱)+۲\Rightarrow R=۲$

۸ـ (۳) دو معادله را از یکدیگر کم می‌کنیم.
$$-\begin{cases}f(x)=(x^۲+۲x+۲)q_۱(x)+x\\ g(x)=(x^۲+۲x+۲)q_۲(x)+x+۲\end{cases}$$
$f(x)-g(x)=(x^۲+۲x+۲)\,q'(x)-۲\Rightarrow R=-۲$

۹ـ (۲) $x\cos\alpha-\sin\alpha=۰\Rightarrow x=\tan\alpha\Rightarrow R=\tan^۳\alpha.\cos^۳\alpha-m\tan\alpha\sin۲\alpha+\sin^۳\alpha$
$R=\sin^۳\alpha-۲m\sin^۲\alpha+\sin^۳\alpha=۰\Rightarrow m=\sin\alpha$

۱۰ـ (۴) $x=\cos\alpha\Rightarrow R=۲\cos^۲\alpha-۲\cos\alpha\sin\alpha-۱=۰$
$\cos۲\alpha-\sin۲\alpha=۰\Rightarrow \tan۲\alpha=۱$
$\Rightarrow ۲\alpha=k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \alpha=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}$

چنان نمای که هستی، نه چنان که مینمائی. «بایزد بسطامی»

نشاید یافت بی‌رنج از جهان گنج. (ویس و رامین)

تست ۳:

۱ـ باقیماندهٔ تقسیم $y(x+1)^n - x(y+1)^n + x - y$ بر $x^2 - xy$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) $x+y$ ۳) $x-y$ ۴) x

۲ـ کدام نادرست است؟

۱) $x^{30} + y^{135}$ بر $x^2 + y^9$ بخش‌پذیر است. ۲) $x^{15} + y^{15}$ بر $x + y$ بخش‌پذیر است.

۳) $10^{100} - 17^{100}$ بر ۱۸۹ بخش‌پذیر است. ۴) $x^{53} + x^2$ بر $x^3 - 1$ بخش‌پذیر است.

۳ـ برای آنکه چند جمله‌ای $p(x) = x^3 + ax^2 + (b+1)x + 1$ بر $x^2 + bx + 1$ بخش‌پذیر باشد، چه رابطه‌ای باید بین a و b برقرار باشد؟

۱) $a+b=1$ ۲) $a-b=1$ ۳) $a-b=0$ ۴) $a+b=0$

۴ـ باقیماندهٔ $p(x)$ بر $4x-1$ برابر ۴ است، باقیماندهٔ $P(x^2)$ بر $2x+1$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

۵ـ هرگاه باقیماندهٔ $p(x)$ بر $x^2 - 3x$ برابر $x+1$ باشد، باقی‌ماندهٔ $p(x)$ بر $x^2 - 3x$ کدام است؟

۱) x ۲) $2x$ ۳) $3x$ ۴) $4x$

۶ـ شرط لازم و کافی برای آنکه چند جمله‌ای $x^4 + ax^3 + bx + c$ بر $(x-1)^3$ بخش‌پذیر باشد، آن است که:

۱) $a = -2$ ۲) $a = -\frac{1}{2}$ ۳) $a = \frac{1}{2}$ ۴) $a = 2$

۷ـ هرگاه باقیماندهٔ $f(x)$ بر $2x-1$، R باشد، باقیماندهٔ $f(x)$ بر $x - \frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) R ۲) $\frac{R}{2}$ ۳) $2R$ ۴) $R-\frac{1}{2}$

۸ـ برای آنکه چند جمله‌ای $ax^3 + 3x^2 + bx - 3$ بر $x^2 - 1$ بخش‌پذیر باشد باید:

۱) $a = b$ ۲) $a = -b$ ۳) $a = 2b$ ۴) $a = -2b$

۹ـ $x^{12} + 1$ بر کدام یک از عبارات زیر بخش‌پذیر است؟

۱) x^2+1 ۲) x^3+1 ۳) x^4+1 ۴) x^6+1

۱۰ـ عبارت $(a + b)^p - b^p$، $(p \in N)$ همواره بر:

۱) b بخش‌پذیر است. ۲) a بخش‌پذیر است. ۳) p بخش‌پذیر است. ۴) $a-b$ بخش‌پذیر است.

۱ـ (۱) $x(x-y)=0 \to \begin{matrix} x=0 \\ x=y \end{matrix}$

به جای x، ۰ می‌گذاریم. $\Rightarrow R = y(0+1)^n - 0(y+1)^n + 0 - y = 0$ بر x بخش‌پذیر است.

به جای x، y می‌گذاریم. $\Rightarrow R = x(x+1)^n - x(x+1)^n + x - x = 0$ بر x−y بخش‌پذیر است.

پس بر x(x−y) نیز بخش‌پذیر است.

۲ـ (۴) $x^3 = 1 \Rightarrow R(x^3)^{17}x^2 + x^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$

توضیح ۳ گزینه دیگر: گزینه (۱) $x^2 = -y^9 \Rightarrow R = (x^2)^{15} + y^{135} = (-y^9)^{15} + y^{135} = 0$

گزینه (۲) چون n فرد است پس $x^{15} + y^{15}$ بر x+y بخش‌پذیر است.

گزینه (۳) $17^{100} - 10^{100} = (17^2)^{50} - (10^2)^{50} = 289^{50} - 100^{50} = (289-100)(...) = 189(..)$

۳ـ (۱) $x^2 = -bx - 1 \Rightarrow R = x^2 x + ax^2 + (b+1)x + 1$

$$= (-bx-1)x + a(-bx-1) + (b+1)x + 1$$

$$= -bx^2 - x - abx - a + bx + x + 1$$

$$= -b(-bx-1) - x - abx - a + bx + x + 1 = 0$$

$$= (b^2 - ab + b)x + 1 - a = 0x + 0 \Rightarrow \begin{cases} 1-a=0 \\ b^2 - ab + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a=1, b=0 \Rightarrow a+b=1$$

۴ـ (۴) $p(x) = (4x-1)q(x) + 4$

$p(x^2) = (4x^2-1)q(x^2) + 4 = (2x-1)(2x+1)q(x^2) + 4$

$p(x^2) = (2x-1)q'(x) + 4 \Rightarrow R = 4$

۵ـ (۴) $p(x) = (x^2 - 3x)q(x) + x + 1$

$xp(x) = x(x^2-3x)q(x) + x^2 + x$

کافی است باقیمانده‌ی x^2+x را بر x^3-3x بیابیم.

$x^2 = 3x \Rightarrow R = 3x + x = 4x$

۶ـ (۱) ***یادآوری:*** شرط لازم و کافی برای آنکه چند جمله‌ای p(x) بر $(x-a)^n$ بخش‌پذیر باشد آنستکه p(x) و p′(x) و p″(x) و ... و $p^{(n-1)}(x)$ همگی بر x−a بخش‌پذیر باشند لذا:

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + b$

$f''(x) = 12x^2 + 6ax \Rightarrow f''(1) = 12 + 6a = 0 \Rightarrow a = -2$

۷ـ (۱) $f(x) = (2x-1)q(x) + R = 2(x - \frac{1}{2})q(x) + R = (x - \frac{1}{2})q'(x) + R$

۸ـ (۲) $x^2 = 1 \Rightarrow R = ax^2x + 3x^2 + bx - 3 = ax + 3 + bx - 3 = (a+b)x = 0 = 0x \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow a=-b$

۹ـ (۳) $x^4 = -1 \Rightarrow R = (x^4)^3 + 1 = (-1)^3 + 1 = 0$

۱۰ـ (۲) $a^n - b^n$ همواره بر a−b بخش‌پذیر است پس $(a+b)^p - b^p$ بر a + b − b بخش‌پذیر است.

تست ۴:

۱ـ اگر باقیماندهٔ تقسیم ax^6+bx^3+1 بر x^3+1، برابر ۱ باشد، باقیماندهٔ $x^2+ax+2b$ بر $x+2$، کدام است؟

۱) -4 ۲) -2 ۳) ۲ ۴) ۴

۲ـ اگر $f(x)$ بر $2x^2-1$ بخش‌پذیر باشد، $f(\sin x)$ بر کدام یک از عبارتهای زیر بخش‌پذیر است؟

۱) $\sin^2 x$ ۲) $\sin 2x$ ۳) $\cos^2 x$ ۴) $\cos 2x$

۳ـ اگر چند جمله‌ای $p(x)=ax^{2n+1}+x^{2n}+2$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴ـ اگر باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $2x^3-3x+1$ برابر x^2+x+1 باشد، باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۵ـ اگر باقیماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر x^2-x+1 برابر x و باقیماندهٔ تقسیم $g(x)$ بر x^2-x+1 برابر $x-1$ باشد، باقیماندهٔ تقسیم $f(x)g(x)$ بر x^2-x+1 کدام است؟

۱) x ۲) $x-1$ ۳) ۱ ۴) -1

۶ـ باقیماندهٔ تقسیم x^{10} بر x^2+x+1 کدام است؟

۱) $-x$ ۲) x ۳) $x-1$ ۴) $x+1$

۷ـ باقیماندهٔ تقسیم $p(x)=(x-3)^{2k}+(x-2)^{k-1}$ بر $(x-2)(x-3)$ کدام است؟ $(1<k\in N)$

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $x-1$

چیزی بگو که ارزش آن بیش از خاموشی باشد.	«فیثاغورث»

جوانی آدمی مانند صبح یکروز زیباست.	«جان میلتون»

نهد شاخ پرمیوه، سر بر زمین.	(سعدی)

۱ـ (۴) $x^{۳} = -۱ \Rightarrow R = a(x^{۳})^{۲} + bx^{۳} + ۱ \Rightarrow ۱ = a - b + ۱ \Rightarrow a = b$

$x = -۲ \Rightarrow R' = ۴ - ۲a + ۲b = ۴ - ۲a + ۲a = ۴$

۲ـ (۴) $f(x) = (۱ - ۲x^{۲})\,q(x) \Rightarrow f(\sin x) = (۱ - ۲\sin^{۲}x)\,q(x) = \cos ۲x\, q(x)$

۳ـ (۳) $x = -۱ \Rightarrow R = a(-۱)^{۲n+۱} + (-۱)^{۲n} + ۲ = -a + ۳ = ۰ \Rightarrow a = ۳$

۴ـ (۱) $f(x) = (۲x^{۳} - ۳x + ۱)q(x) + x^{۲} + x + ۱$

چون مجموع ضرایب $۲x^{۳} - ۳x + ۱ = ۰$، صفر است یکی از ریشه‌های آن $x = ۱$ است لذا عبارت $(۲x^{۳} - ۳x + ۱)q(x)$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است بنابراین کافی است باقیماندهٔ $x^{۲} + x + ۱$ را بر $x-۱$ بیابیم.

$x = ۱ \Rightarrow R = ۱^{۲} + ۱ + ۱ = ۳$

۵ـ (۴) کافی است باقیماندهٔ $x(x-۱)$ را بر $x^{۲} - x + ۱$ بیابیم.

$x^{۲} = x - ۱ \Rightarrow R = x(x - ۱) = x^{۲} - x = x - ۱ - x = -۱$

۶ـ (۲) $x^{۳} - ۱ = (x - ۱)(x^{۲} + x + ۱)$

$x^{۳} = ۱ \Rightarrow R = (x^{۳})^{۳}x = x \leftarrow$ باقیمانده $x^{۱۰}$ بر $x^{۳} - ۱$

$\Rightarrow x^{۱۰} = (x^{۳} - ۱)q(x) + x$

$x^{۱۰} = (x - ۱)(x^{۲} + x + ۱)q(x) + x$

$= (x^{۲} + x + ۱)q'(x) + x \Rightarrow R = x$

۷ـ (۱) باقیمانده‌ی $p(x)$ بر $x - ۳$ $\quad P(۳) = ۰ + ۱ = ۱$

باقیمانده‌ی $p(x)$ بر $x - ۲$ $\quad p(۲) = ۱ + ۰ = ۱$

$$R(x) = \frac{R_۱ - R_۲}{a - b}x + \frac{R_۲ a - R_۱ b}{a - b} = \frac{۱ - ۱}{۳ - ۲}x + \frac{(۱)(۳) - (۱)(۲)}{۳ - ۲} = ۱$$

بهترین و عالیترین آرزوها را در خود بپرورانید. **«حضرت علی (ع)»**

آنچه هستید شما را بهتر معرفی می‌کند، تا آنچه می‌گوئید. **«امرسون»**

فصل دهم

تابع

تعریف زوج مرتب یا دوتائی مرتب:

هر زوج مرتب، یک دوتائی به صورت (a,b) می‌باشد که ترتیب قرارگرفتن a و b در آن مهم است. a را مختص یا مؤلفه‌ی اول و b را مختص یا مؤلفه‌ی دوم می‌گویند.

تذکر ۱: هرگاه A(x,y) یک نقطه‌ی دلخواه از صفحه‌ی مختصات (R^2) باشد x و y را به ترتیب مختص اول و مختص دوم زوج مرتب (x,y) می‌گویند.

تذکر ۲: دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) را مساوی هم می‌گویند اگر و فقط اگر که $\begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$ باشد.

تعریف تابع

دو مجموعه‌ی دلخواه A و B را در نظر بگیرید، f را از A، به B یک تابع گویند هرگاه هر عضو از A، حداکثر با یک عضو از B در رابطه باشد و آنرا به صورت $f: A \to B$ یا $A \xrightarrow{f} B$ نمایش می‌دهند.

مثال: با فرض $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{۶, ۷, ۸, ۹\}$، $f= \{(۱,۶)و(۲,۷)و(۳,۶)\}$ یک تابع از A به B هست در حالیکه $g = \{(۱,۹)و(۱,۷)\}$ از A به B یک تابع نیست.

در این تعریف مجموعه‌ی A را مجموعه‌ی آغاز (مبدأ یا شروع) و مجموعه‌ی B را مجموعه‌ی مقصد (هدف یا انجام یا پایان یا هم دامنه) می‌گویند.

تعریف دامنه و برد یک تابع

مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های اول زوجهای مرتب f را دامنه‌ی تعریف یا حوزه‌ی تعریف تابع f می‌گویند و آنرا با D_f نمایش می‌دهند.

و مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های دوم زوجهای مرتب f را برد یا حوزه‌ی مقادیر تابع f می‌گویند و آنرا با R_f نمایش می‌دهند.

نکته: همواره $\begin{cases} D_f \subseteq A \\ R_f \subseteq B \end{cases}$

تعریف تابع به صورتی دیگر:

هر تابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B

مجموعه‌ایست از زوجهای مرتب که مؤلفهٔ اول آنها از A و مؤلفه‌ی دوم آنها از B انتخاب شده‌اند و هیچ دو زوج مرتبی از آن

دارای عضوهای اول یکسان و عضوهای دوم متفاوت نباشند به عبارت دیگر:

f تابع است. $\Leftrightarrow (x , y_1) \in f , (x , y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$

تست: هرگاه $f = \{(1,-1) , (2,3b) , (0,0) , (1,a+1) , (2,6)\}$ یک تابع از x به y باشد، a-b کدام است؟

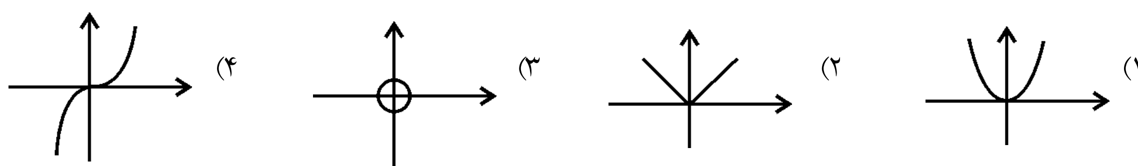
۱) ۰ ۲) ۲- ۳) ۴- ۴) $\frac{3}{2}$

حل: $\begin{cases} a+1=-1 \\ 3b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow a-b=-4$

تشخیص تابع از روی نمودار

یک نمودار، وقتی نمودار یک تابع است که هر خط موازی محور yها (خط عمودی)، آنرا در بیش از یک نقطه قطع نکند، به عبارت دیگر، حداکثر در یک نقطه قطع کند. (قطع نکرد اشکالی ندارد و تابع هست)

تست: کدام نمودار زیر، نمودار یک تابع نیست؟



پاسخ صحیح گزینه‌ی ۳ می‌باشد.

ضابطه یا معادله‌ی یک تابع

به رابطه‌ای که بین مؤلفه‌های اول و دوم زوجهای مرتب هر تابع (در صورت وجود) برقرار است ضابطه‌ی تابع می‌گویند و آنرا با $y = f(x)$ نمایش می‌دهند. البته ممکن است برخی از توابع ضابطه‌ی خاصی نداشته باشند و یا برخی از توابع بیش از یک ضابطه داشته باشند. در تعریف فوق x را متغیر مستقل و y را که تابع x است، متغیر وابسته یا متغیر تابع می‌گویند.

مثال: در توابع زیر، ضابطه‌ی تابع را در صورت وجود بیابید؟

$f = \{(1,3) , (0,2) , (-7,-5) , (100,102)\} \rightarrow y = x + 2$ یا $f(x) = x + 2$

$g = \{(2,7) , (3,26) , (0,-1) , (4,63)\} \rightarrow y = x^3-1$ یا $f(x) = x^3-1$

$h = \{(2,\pi) , (0,\frac{1}{100}) , (4,a)\} \rightarrow$ (بدون ضابطه)

$p = \{(2,7) , (4,11) , (6,15) , (3,-9) , (11,-121)\} \rightarrow p(x) = \begin{cases} 2x+3, (x=2k) \\ -x^2 \quad , (x=2k+1) \end{cases}$

تشخیص تابع از روی ضابطه

رابطه‌ی $y = f(x)$ از A به B، هنگامی یک تابع را تعریف می‌کند که به ازاء هر x از A، حداکثر یک y از B داشته باشیم.

مثال: از روابط داده شده‌ی زیر، کدامیک از R به R یک تابع می‌باشند. (x متغیر مستقل و y متغیر تابع)

۱) $y = x^۳$	تابع هست	
۲) $y = \|x\|$	تابع هست	
۳) $\|y\| = x$	تابع نیست	$(۱,۱) \in f$, $(۱,-۱) \in f$
۴) $y^۲ = x^۲$	تابع نیست	$(۲,۲) \in f$, $(۲,-۲) \in f$
۵) $\|x\| = \|y\|$	تابع نیست	$(۱,۱) \in f$, $(۱,-۱) \in f$
۶) $y = x^۲$	تابع هست	
۷) $x = y^۲$	تابع نیست	$(۱,-۱) \in f$, $(۱,۱) \in f$
۸) $y = \cos x$	تابع هست	
۹) $x = \cos y$	تابع نیست	$(\frac{۱}{۲},\frac{\pi}{۳}) \in f$, $(\frac{۱}{۲},-\frac{\pi}{۳}) \in f$
۱۰) $x^۲ + y^۲ = ۹$	تابع نیست	$(۰,۳) \in f$, $(۰,-۳) \in f$
۱۱) $(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۰$	تابع هست	$\Rightarrow \begin{cases} x-۱=۰ \\ y+۲=۰ \end{cases} \Rightarrow f=\{(۱,-۲)\}$
۱۲) $y = \arccos x$	تابع نیست	$(۱,۰) \in f$, $(۱,۲\pi) \in f$

نکته: هر مجموعه‌ائی که فقط یک زوج مرتب داشته باشد، تابع است.

نکته: { } نیز یک تابع هست زیرا هیچ دو زوج مرتبی در تهی نیست که مؤلفه‌ی اولشان یکسان و مولفه‌ی دومشان متفاوت باشند.

تست: کدام ضابطه‌ی زیر، ضابطه‌ی یک تابع نیست؟

۱) $f(x) = \begin{cases} x^۲ & ,(x \geq ۱) \\ ۲x-۱ & ,(x \leq ۱) \end{cases}$

۲) $g(x) = \begin{cases} x^۳ & ,(x \geq ۲) \\ ۵x-۱ & ,(x \leq ۲) \end{cases}$

۳) $h(x) = \begin{cases} ۲x+۳ & ,(x > ۱) \\ ۴x-۱ & ,(x < ۲) \end{cases}$

۴) گزینه‌های (۲) و (۳)

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۴ می‌باشد. g تابع نیست زیرا از یک طرف $g(۲) = ۸$ و از طرف دیگر $g(۲) = ۹$، h نیز تابع نیست زیرا از یک طرف $h(۱/۵) = ۶$ و از طرف دیگر $h(۱/۵) = ۵$

تابع ثابت: تابعی است که برد آن تنها یک عضو داشته باشد، ضابطه‌ی این تابع به صورت $y = c$ یا $f(x) = c$ می‌باشد و نمودارش یک خط افقی است.

تابع همانی: تابعی است که هر x به خودش نظیر می‌شود (تصویر می‌شود)، ضابطه‌ی این تابع به صورت $y = x$ یا $f(x) = x$ می‌باشد و نمودارش نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم است.

تذکر مهم: توجه داشته باشید که بعضاً تابع همانی را به اشتباه، تابعی تعریف می‌کنند که دامنه و بردش یکی باشند. به عنوان مثال، دامنه و برد تابع $f = \{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۱)\}$ یکی است، اما این تابع، تابع همانی نیست. زیرا به عنوان مثال $f(۱) \neq ۱$

تست: هرگاه تابع $f = \{(۲,n-۱) , (۰,۰) , (-۱,-۱) , (۳m,۶)\}$، تابعی همانی باشد، $m + n$ کدام است؟

۱) ۴　۲) ۳　۳) ۵　۴) ۶

حل:
$$\begin{cases} n-۱=۲ \\ ۳m=۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=۳ \\ m=۲ \end{cases} \Rightarrow m+n=۵$$

تابع صریح و تابع ضمنی:

هرگاه در ضابطه‌ی تابع، مقدار y با صراحت (صراحتاً) برحسب x تعریف شده باشد، یعنی ضابطه‌ی تابع به صورت $y = f(x)$ باشد، تابع را تابع صریح می‌گویند. مانند: $f(x) = x^۵ + x$ یا $g(x) = \sin^۲ x$ و... اما هرگاه در ضابطه‌ی تابع، y صراحتاً برحسب x تعریف نشده باشد (x و y قاطی پاطی باشند)، یعنی ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x,y) = ۰$ باشد، آنگاه تابع را تابع ضمنی می‌گویند. مانند $x^۳ + y^۳ = ۸$ یا $۲x - ۳y + ۶ = ۰$ یا ....

تذکر: هر تابع صریح به سادگی، به صورت ضمنی در می‌آید، (کافی است y را سمت راست ببریم) اما هر تابع ضمنی به سادگی قابل تبدیل به صریح نبوده، حتی در برخی از موارد، این عمل امکان‌پذیر نیست.

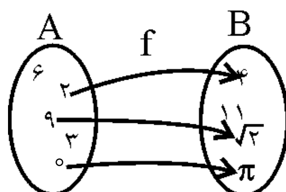
تابع حقیقی: به تابعی می‌گویند که بردش زیر مجموعه‌ای از R باشد.

تذکر: هرگاه $f: A \to B$ یک تابع باشد، دامنه‌ی تابع به مجموعه مقادیری می‌گویند که می‌توان به x نسبت داد و به ازاء آنها مقدار معینی برای y به دست آورد به عبارت دیگر: $D_f = \{x \in A$ تعریف شده باشد: $f(x)\}$ لذا همیشه دامنه‌ی تابع زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی آغاز یعنی A است.

نکته: به خاطر داشته باشید که $\begin{cases} \text{دامنه = حدود تغییرات } x \\ \text{برد = حدود تغییرات } y \end{cases}$

مثال: در تابع روبرو، دامنه عبارتست از $D_f = \{۲,۹,۰\}$

دو عدد ۶ و ۳، عضو دامنه نیستند.



تست: دامنهٔ تابع $f: N \to N$ با ضابطه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ کدام است؟

۱) N　۲) $\{۳,۴\}$　۳) $\{۱,۲,۳,۴\}$　۴) $\{۳\}$

$$y^۲ = ۲۵ - x^۲ \overset{y^۲ \geq ۰}{\Rightarrow} ۲۵ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow -۵ \leq x \leq ۵ \overset{x \in N}{\Rightarrow} x = \text{۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵}$$

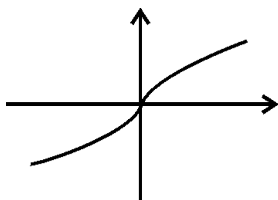
اما فقط به ازاء $x = ۳$ یا $x = ۴$ مقداری طبیعی برای y به دست می‌آید پس دامنه عبارتست از $\{۳,۴\}$

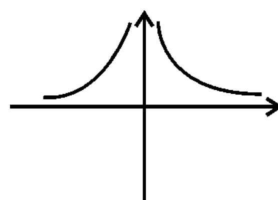
تذکر: هرگاه ضابطهٔ تابعی به صورت $y = f(x)$ باشد و مجموعه‌ی آغازش داده نشده باشد، در این صورت وسیعترین زیر مجموعه‌ای از R که به ازاء اعضای آن، f(x) تعریف شده باشد را دامنه‌ی تابع در نظر می‌گیرند.

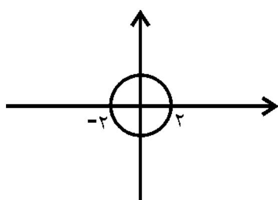
تعیین دامنه‌ی توابع و رابطه‌ها از روی نمودارشان:

برای تعیین دامنه‌ی توابع و رابطه‌ها، از روی نمودارشان، کافی است طول (x) نقاط نمودار تابع را در نظر بگیریم.

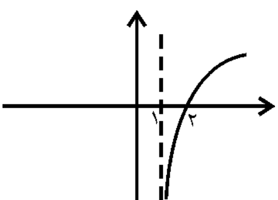
مثال: دامنه‌ی توابع و رابطه‌های زیر را از روی نمودارشان بیابید؟

۱)  $\Rightarrow D_f = R$

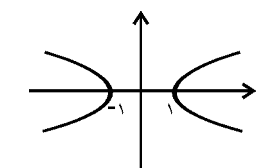
۲)  $\Rightarrow D_f = R-\{۰\}$

۳) 

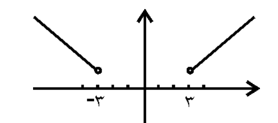
$\Rightarrow D_f = [-۲,۲]$

۴) 

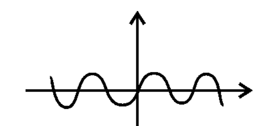
$\Rightarrow D_f = (۱,+\infty)$

۵) 

$\Rightarrow D_f = (-\infty,-۱] \cup [۱,+\infty)$

۶) 

$\Rightarrow D_f = (-\infty,-۳) \cup (۳,+\infty)$

۷)  $\Rightarrow D_f = R$

روشهای تعیین دامنه‌ی تعریف توابع حقیقی:

۱) دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای به صورت $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ و $g(x)=|a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0|$، مجموعه‌ی اعداد حقیقی می‌باشد.

مثال: دامنه‌ی توابع $y=x^2$ و $y=x^3+x^2+x+1$ و ...، R می‌باشد.

۲) دامنه‌ی هر تابع گویا (تابع گویا، تابعی است که هر دوی صورت و مخرجش چند جمله‌ای باشند) به صورت $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ عبارتست از: $R-$ {ریشه یا ریشه‌های مخرج}

مثال:

$$۱)\ y=\frac{x^2+7}{x^2-4} \Rightarrow D_f=R-\{\pm 2\}$$

$$۲)\ y=\frac{2x-1}{x^2+x+1} \Rightarrow D_f=R$$ (مخرج ریشه‌ی حقیقی ندارد)

تست: هرگاه دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{x^4+1}{x^2+ax+b}$، $R-\{3\}$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۵ ۳) ۳ ۴) ۳-

حل: با توجه به دامنه‌ی تابع، مخرج فقط یک ریشه دارد که برابر ۳ است و چون مخرج از درجه‌ی ۲ است، لذا بایستی به صورت $(x-3)^2$ باشد در نتیجه:

$$x^2+ax+b=x^2-6x+9 \Rightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=9 \end{cases} \Rightarrow a+b=3$$

۳) دامنه‌ی هر تابع گنگ به صورت $f(x)=\sqrt[2n+1]{g(x)}$، عبارتست از دامنه‌ی زیر رادیکال یعنی: $D_f=D_g$

مثال: دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{x^2-x}}$، عبارتست از دامنه‌ی تابع $g(x)=\frac{1}{x^2-x}$، یعنی $R-\{0,1\}$

۴) دامنه‌ی هر تابع گنگ به صورت $f(x)=\sqrt[2n]{g(x)}$ عبارتست از:

$$D_f=\{x\in R : g(x)\geq 0\}$$

مثال: دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ عبارتست از $(x\geq 1)\cup(x\leq -1)$

۵) دامنه‌ی هر تابع لگاریتمی به صورت $f(x)=\log_{g(x)}^{h(x)}$ عبارتست از اشتراک ۱) $h(x)>0$ و ۲) $g(x)>0$ و ۳) $g(x)\neq 1$، بالاخص دامنه‌ی توابع $y=\log_a^{f(x)}$ $(a\neq 1, a>0)$ و $y=Ln(f(x))$ می‌شود $\{x : f(x)>0\}$

مثال: $f(x)=\log_{2x-6}^{(x-2)}$

$$\begin{cases} x-2>0 \\ 2x-6>0 \\ 2x-6\neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>3 \\ x\neq\frac{7}{2} \end{cases} \rightarrow D_f=(3,\frac{7}{2})\cup(\frac{7}{2},+\infty)$$

۶) دامنه‌ی توابع مثلثاتی

$$۱)\ \begin{cases} y=\sin x \\ y=\cos x \end{cases} \Rightarrow D_y=R$$

$$۲)\ \begin{cases} y=\sin(f(x)) \\ y=\cos(f(x)) \end{cases} \Rightarrow D_y=D_f$$

۳) $\begin{cases} y=\tan x \\ y=\cot x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_y = R - \{x : x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k\in z\} \\ D_y = R - \{x : x = k\pi, k\in z\} \end{cases}$

۴) $\begin{cases} y=\tan(f(x)) \\ y=\cot(f(x)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_y = D_f - \{x : x = k\pi + \frac{\pi}{2}, K\in z\} \\ D_y = D_f - \{x : x = k\pi, k\in z\} \end{cases}$

مثال: دامنه‌ی تابع $y=\sin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ **عبارتست از دامنه‌ی تابع** $y=\sqrt{\frac{x}{x+1}}$

$\frac{x}{x+1} \geq 0 \quad \Rightarrow D_f = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$

۷) دامنه‌ی توابع معکوس مثلثاتی

۱) $\begin{cases} y=\text{Arcsin}x \\ y=\text{Arccos}x \end{cases} \Rightarrow D_y = [-1, 1]$

۲) $\begin{cases} y=\text{Arcsin}(f(x)) \\ y=\text{Arccos}(f(x)) \end{cases} \Rightarrow D_y = \{x \mid -1 \leq f(x) \leq 1\}$

۳) $\begin{cases} y=\text{Arctan}x \\ y=\text{Arccot}x \end{cases} \Rightarrow D_y = R$

۴) $\begin{cases} y=\text{Arctan}(f(x)) \\ y=\text{Arccot}(f(x)) \end{cases} \Rightarrow D_y = D_f$

تست: دامنه‌ی تابع $y = \text{Arcsin}(\frac{x-1}{x+1})$ **کدام است؟**

۱) $-1 < x \leq 1$ ۲) $x \geq 0$ ۳) $0 < x \leq 1$ ۴) $x \geq 1$ یا $x < -1$

$-1 \leq \frac{x-1}{x+1} \leq 1 \quad \Rightarrow \left|\frac{x-1}{x+1}\right| \leq 1 \overset{x\neq -1}{\Rightarrow} |x-1| \leq |x+1| \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \leq x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x \geq 0$

۸) دامنه‌ی توابع قدر مطلقی به صورت $y = |f(x)|$ عبارتست از $D_y = D_f$

۹) دامنه‌ی توابع جزء صحیحی به صورت $y = \lfloor f(x) \rfloor$ عبارتست از $D_y = D_f$

۱۰) هرگاه تابعی از مجموع یا تفاضل یا حاصلضرب دو یا چند تابع تشکیل شده باشد دامنه‌ی تابع می‌شود اشتراک دامنه‌ها یعنی:

$D_{f\pm g} = D_{fg} = D_f \cap D_g$

۱۱) دامنه‌ی تقسیم دو تابع، عبارتست از اشتراک دامنه‌های صورت و مخرج به جز ریشه یا ریشه‌های مخرج، یعنی:

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in Dg : g(x) = 0\}$

توجه داشته باشید که تابع گویا، حالت خاصی از تابع کسری است.

مثال: دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1}$ **را بیابید؟**

دامنه‌ی صورت $= [0,+\infty)$

دامنه‌ی مخرج $= R$

$$\Rightarrow \quad D_f = ([0,+\infty)\cap R) - \{\pm 1\} = [0,1) \cup (1,+\infty)$$

۱۲) دامنه‌ی رابطه‌ها و توابع ضمنی: برای تعیین دامنه‌ی رابطه‌ها و توابع ضمنی به صورت $f(x,y) = 0$، ابتدا معادله را برحسب y حل کرده، (y را استخراج نموده)، سپس دامنه‌ی آن را پیدا می‌کنیم.

مثال: دامنه‌ی رابطه‌ی ضمنی $x^2 + y^2 = 4$ را بیابید؟

$$y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2} \Rightarrow 4 - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow D_f = [-2,2]$$

۱۳) دامنه‌ی ترکیب دو تابع: دامنه‌ی توابع fog و gof و fof و gog به صورت زیر به دست می‌آید.

$$D_{gof} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$

$$D_{fof} = \{x \in D_f : f(x) \in D_f\}$$

$$D_{gog} = \{x \in D_g : g(x) \in D_g\}$$

تذکر: البته می‌توان ضابطه‌ی توابع فوق را به دست آورده، سپس دامنه‌اشان را پیدا کنیم.

مثال: هرگاه $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{1-x}$ باشند، دامنه‌ی تابع gof را حساب کنید؟

روش اول:

$$D_{gof} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$$
$$= \{x \in [2,+\infty) : \sqrt{x-2} \in (-\infty, 1]\}$$
$$= \{x \in [2,+\infty) : \sqrt{x-2} \leq 1\}$$
$$= \{x \in [2,+\infty) : x-2 \leq 1\} = \{x \in [2,+\infty) : x \leq 3\} = [2,3]$$

روش دوم:

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1-\sqrt{x-2}}$$

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq 2 \\ 1-\sqrt{x-2} \geq 0 \quad \Rightarrow 1 \geq \sqrt{x-2} \Rightarrow 1 \geq x-2 \Rightarrow 3 \geq x \end{cases} \quad \Rightarrow D_{gof} = [2,3]$$

تذکر مهم: در حالت کلی نمی‌توان گفت که دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{p(x)} \times \sqrt{q(x)}$ با دامنه‌ی تابع $g(x) = \sqrt{p(x)q(x)}$ برابر است، همچنین در حالت کلی، نمی‌توان گفت که دامنه‌ی تابع $f(x) = \dfrac{\sqrt{p(x)}}{\sqrt{q(x)}}$ با دامنه‌ی تابع $g(x) = \sqrt{\dfrac{p(x)}{q(x)}}$ برابر است.

مثال: دامنه‌ی توابع $f(x) = \sqrt{x}.\sqrt{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x(x-1)}$ را بیابید؟

$$f(x) = \sqrt{x}.\sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \overset{\text{اشتراک}}{\Rightarrow} \quad x \geq 1 \Rightarrow D_f = [1,+\infty)$$

$g(x)=\sqrt{x(x-1)} \Rightarrow x(x-1)\geq 0 \overset{\text{تعیین علامت}}{\Rightarrow} x\leq 0$ یا $x\geq 1 \Rightarrow D_g=(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$

۱۴) دامنه‌ی توابع $y=|x|$، $y=\lfloor x\rfloor$، $y=a^x$ $(a\neq 1, a>0)$، $y=e^x$، $y=\text{sign}(x)$، R می‌باشد.

۱۵) دامنه‌ی تابع $y=a^{f(x)}$ برابر است با دامنه‌ی خود $f(x)$ $(a>0, a\neq 1)$

۱۶) دامنه‌ی تابع $y=e^{f(x)}$ برابر است با دامنه‌ی خود $f(x)$

۱۷) برای به دست آوردن دامنه‌ی یک تابع، هرگز نباید تابع را ساده کرد، به طوری که عامل یا عواملی حذف شوند و یا شکل ظاهری تابع تغییر کند (مگر در موارد خاص، مثلاً این که این عامل یک عدد مخالف صفر و یا یک عبارت مخالف صفر باشد) البته اگر پس از تعیین دامنه، ضابطه‌ی تابع را ساده کنیم، اشکالی ندارد.

مثال: دامنه‌ی توابع زیر را بیابید؟

۱) $y=\frac{x-1}{x-1} \Rightarrow D_f=R-\{1\}\Rightarrow y=1$

۲) $y=\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \Rightarrow D_f=R-\{0,-1\} \Rightarrow y=\frac{x}{x+1}$

۳) $y=\frac{x}{x^3-x}\Rightarrow D_f=R-\{0,1,-1\} \Rightarrow y=\frac{1}{x^2-1}$

۴) $y=\frac{x^4-81}{x^2+9}=x^2-9 \Rightarrow D_f=R$

در این مثال به دلیل اینکه، عبارت x^2+9، مخالف صفر است، اشکالی ندارد که اول ضابطه‌ی تابع را ساده کرده و سپس دامنه را بیابیم.

۵) $y=\text{Arcsin}x+\text{Arccos}x \Rightarrow D_f=[-1,1] \Rightarrow y=\frac{\pi}{2}$

نکته: $|x|\leq 1 \Rightarrow \text{Arcsin}x+\text{Arccos}x=\frac{\pi}{2}$

۶) $y=\tan x.\cot x \Rightarrow D_f=R-\{x|\ x=k\pi, x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in z\} \Rightarrow y=1$

چند مثال جالب و دیدنی

دامنهٔ توابع زیر را بیابید؟

۱) $y=\sqrt{x-|x|}$

$x-|x|\geq 0\Rightarrow |x|\leq x \Rightarrow |x|=x \Rightarrow x\geq 0\Rightarrow D_f=[0,+\infty)$

۲) $y=\sqrt[4]{\frac{|x|-1}{|x|+1}} \Rightarrow \frac{|x|-1}{|x|+1}\geq 0\Rightarrow |x|-1\geq 0\Rightarrow |x|\geq 1 \Rightarrow D_f=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

۳) $y=\sqrt{\cos x^2} \Rightarrow 0\leq \cos x^2 \Rightarrow 2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq x^2\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}$

$\sqrt{2k\pi-\frac{\pi}{2}}\leq x\leq \sqrt{2k\pi+\frac{\pi}{2}} \Rightarrow D_f=\left[\sqrt{2k\pi-\frac{\pi}{2}}, \sqrt{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right] \quad ,k\in N$

۴) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(\log_2^x)}$

$$\begin{cases} 1)\, x > 0 \\ 2)\, \log_2^x > 0 \Rightarrow \log_2^x > \log_2^1 \Rightarrow x > 1 \\ 3)\, \log_{\frac{1}{3}}(\log_2^x) \geq 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}(\log_2^x) \geq \log_{\frac{1}{3}}^1 \Rightarrow \log_2^x \leq 1 \Rightarrow \log_2^x \leq \log_2^2 \Rightarrow x \leq 2 \end{cases}$$

اشتراک هر سه $\Rightarrow 1 < x \leq 2 \Rightarrow D_f = (1,2]$

$$5)\; y = \frac{1}{\lfloor |x| \rfloor - 1}$$

$$\lfloor |x| \rfloor = 1 \Rightarrow 1 \leq |x| < 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2 \\ \text{یا} \\ -2 < x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow D_f = R - ((-2,-1] \cup [1,2))$$

$$6)\; y = \sqrt{\sin x + \cos x}$$

$$\sin x + \cos x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \geq 0 \Rightarrow \sin(x + \frac{\pi}{4}) \geq 0$$

$\Rightarrow$ ربع اول و دوم $\Rightarrow 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \pi \Rightarrow 2k\pi - \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \Rightarrow D_f = [2k\pi - \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{3\pi}{4}]$

$$7)\; y = 2^{\frac{1}{x-3}} + Ln(x-2) + sign\frac{1}{x^2 - 16}$$

$$\begin{cases} x \neq 3 \quad (1) \\ x > 2 \quad (2) \\ x \neq \pm 4 (3) \end{cases} \overset{\text{اشتراک}}{\Rightarrow} D_f = (2,3) \cup (3,4) \cup (4,+\infty)$$

$$8)\; y = Arctan\sqrt{x-1} + Arccos(\log\frac{x}{2})$$

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ \frac{x}{2} > 0 \\ -1 \leq \log\frac{x}{2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 0 \\ 10^{-1} \leq \frac{x}{2} \leq 10^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 0 \\ \frac{1}{5} \leq x \leq 20 \end{cases} \overset{\cap}{\Rightarrow} D_f = [1,20]$$

$$9)\; y^2 \underbrace{-2x}_{b} y + \underbrace{2x^2 - 2}_{c} = 0 \overset{\Delta'}{\Rightarrow} y = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 2x^2 + 2}}{1} = x \pm \sqrt{2 - x^2}$$

$$\begin{cases} y_1 = x + \sqrt{2 - x^2} \\ y_2 = x - \sqrt{2 - x^2} \end{cases} \Rightarrow 2 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \Rightarrow D_{y_1} = D_{y_2} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$10)\; y = \sqrt[4]{\lfloor x \rfloor - \lfloor x^2 \rfloor} \Rightarrow \lfloor x \rfloor - \lfloor x^2 \rfloor \geq 0$$

$x < 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor < 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor - \lfloor x^2 \rfloor < 0$ غیرقابل قبول

$x \geq 0 \Rightarrow$

$0 \leq x < \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0, \lfloor x^2 \rfloor = 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor - \lfloor x^2 \rfloor = 0 \\ 1 \leq x < \sqrt{2} \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1, \lfloor x^2 \rfloor = 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor - \lfloor x^2 \rfloor = 0 \end{cases}$

$\sqrt{2} \leq x \Rightarrow \lfloor x \rfloor < \lfloor x^2 \rfloor \Rightarrow \lfloor x \rfloor - \lfloor x^2 \rfloor < 0$ غیرقابل قبول

$$\Rightarrow D_f = [0, \sqrt{2})$$

۱۱) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ $\begin{cases}x\geq ۰\\ ۰\leq \sin\sqrt{x}\end{cases}\Rightarrow ۲k\pi\leq\sqrt{x}\leq(۲k+۱)\pi\Rightarrow ۴k^۲\pi^۲\leq x\leq(۲k+۱)^۲\pi^۲$

$\Rightarrow D_f=[۴k^۲\pi^۲,(۲k+۱)^۲\pi^۲]$, $k\in Z$

۱۲) $y=\sqrt[۳]{۱+\sqrt{\sin x}}$ $\Rightarrow \sin x\geq ۰$ $\Rightarrow$ ربع اول و دوم $\Rightarrow$ $D_f=[۲k\pi , ۲k\pi+\pi]$

۱۳) $y=\sqrt{x^۲-۹}+\sqrt{۴-|x|}$ $\Rightarrow \begin{cases}x^۲\geq ۹ \Rightarrow x\leq -۳ \text{ یا } x\geq ۳\\ |x|\leq ۴ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۲\end{cases}$ $\overset{\text{اشتراک}}{\Rightarrow}$ $D_f=\{\ \}$

یعنی در این تابع، به جای x، هیچ عددی نمی‌توان قرار داد و f اش را حساب کرد.

۱۴) $y=\dfrac{x}{۲\lfloor x\rfloor+۱}$ $\Rightarrow ۲\lfloor x\rfloor+۱=۰$ $\Rightarrow \lfloor x\rfloor=\dfrac{-۱}{۲}$ غیرممکن $\Rightarrow$ $D_f=R$

۱۵) $y=\sqrt{\cos ۲\pi x-۱}$ $\Rightarrow y=\sqrt{-۲\sin^۲\pi x}$

$-۲\sin^۲\pi x\geq ۰$ $\Rightarrow \sin^۲\pi x=۰$ $\sin\pi x=۰$ $\Rightarrow \pi x=k\pi$ $\Rightarrow x=k, k\in z$ $\Rightarrow D_f=Z$

۱۶) $y=۱+۲^{\frac{\sqrt{x-۱}}{x-۲}}$ $\Rightarrow \begin{cases}x-۱\geq ۰\\ x-۲\neq ۰\end{cases}$ $\Rightarrow D_f=[۱,۲)\cup(۲,+\infty)$

۱۷) $y=\dfrac{۲}{||x|-۲|-۱}$

$\Rightarrow ||x|-۲|-۱=۰$ $\Rightarrow ||x|-۲|=۱$ $\Rightarrow \begin{cases}|x|-۲=۱\\ |x|-۲=-۱\end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases}x=\pm ۳\\ x=\pm ۱\end{cases}$ $\Rightarrow D_f=R-\{\pm ۱,\pm ۳\}$

۱۸) $f=\{(۲,۱),(۳,-۱),(۴,۹),(۱,۸),(-۱,۰)\}$

$g=\{(۱,۱۰),(۹,۲۰),(۱۰,۱۰۰),(۴,۰),(۱۸,۵),(-۱,۱۱)\}$

۱- $D_{f+g}=D_f\cap D_g=\{۴,۱,-۱\}$

۲- $D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\in D_g:g(x)=۰\}=\{۴,۱,-۱\}-\{۴\}=\{۱,-۱\}$

۳- $D_{۲f}=D_{f+f}=D_f\cap D_f=D_f=\{۲,۳,۴,۱,-۱\}$

۴- $D_{gof}=\{x\in D_f: f(x)\in D_g\}=\{۲,۳,۴\}$

۵- $D_{۲f+۵g}=D_{۲f}\cap D_{۵g}=D_f\cap D_g=\{۴,۱,-۱\}$

۶- $D_{(۳g)o(۲f)}=\{x\in D_{۲f}:(۲f)(x)\in D_{۳g}\}=\{۴\}$

۷- $D_{fof}=\{x\in D_f : f(x)\in D_f\}=\{۲,۳\}$

۸- $D_{\frac{۱}{f}}=D_f-\{x\in D_f:f(x)=۰\}=\{۲,۳,۴,۱\}$

۱۹) $y=(\sqrt{x-۳})^۲+\dfrac{۱}{x-۳}\Rightarrow \begin{cases}x-۳\geq ۰\\ x-۳\neq ۰\end{cases}$ $\Rightarrow D_f=(۳,+\infty)\Rightarrow y=x-۳+\dfrac{۱}{x-۳}$

۲۰) $y=\dfrac{۵x+۱}{۹^x+۳^x-۲}$

$۹^x + ۳^x - ۲ = ۰ \Rightarrow (۳^x)^۲ + ۳^x - ۲ = ۰ \Rightarrow$ مجموع ضرائب صفر است. $\Rightarrow \begin{cases} ۳^x = ۱ \\ ۳^x = -۲ \text{ غیرممکن} \end{cases}$

$۳^x = ۳^۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow D_f = R - \{۰\}$

۲۱) $f(x) = \begin{cases} x^۲ & ,(x > ۱) \\ x + ۵ & ,(x < ۱) \end{cases}$,$g(x) = \begin{cases} x^۳ & ,(x \geq ۱) \\ -۱ & ,(x < ۰) \end{cases} \Rightarrow D_{f-g} = (R - \{۱\}) \cap ((-\infty, ۰) \cup [۱, +\infty))$
$= (-\infty, ۰) \cup (۱, +\infty)$

۲۲) $y = \sqrt{x\text{Arcsin}x} \Rightarrow \begin{cases} -۱ \leq x \leq ۱ \\ x\text{Arcsin}x \geq ۰ \end{cases}$

$f(x) = \text{Arcsin}x \Rightarrow D_f = [-۱, ۱]\ , -\frac{\pi}{۲} \leq \text{Arcsin}x \leq \frac{\pi}{۲}$

$\begin{cases} -۱ \leq x < ۰ \Rightarrow -\frac{\pi}{۲} \leq \text{Arcsin}x < ۰ \Rightarrow x\text{Arcsin}x > ۰ \\ ۰ \leq x \leq ۱ \Rightarrow ۰ \leq \text{Arcsin}x \leq \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x\text{Arcsin}x > ۰ \end{cases} \Rightarrow D_y = [-۱, ۱]$

۲۳) $y = \sqrt{\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor} \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor \geq ۰ \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = ۰ \Rightarrow x \in Z \Rightarrow D_f = Z$

۲۴) $y = \begin{cases} \frac{۱}{x - ۱} & (x \geq ۲) \\ x^۲ + ۱ & (x < ۲) \end{cases} \quad D_f = [۲, +\infty) \cup (-\infty, ۲) = R$

۲۵) $y = \begin{cases} \frac{۱}{x - ۱} & ,(x \neq ۱, ۲) \\ x^۳ + ۵ & ,(x = ۱) \end{cases} \Rightarrow D_f = (R - \{۱, ۲\}) \cup \{۱\} = R - \{۲\}$

در واقع در این تابع دو ضابطه‌ای، $f(۲)$ اصلاً تعریف نشده است، نه در ضابطه‌ی بالا نه در ضابطه‌ی پائین

۲۶) $f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x^۲ - ۴} & ,(x < ۰) \Rightarrow D = (-\infty, ۰) - \{-۲\} \\ ۱۰ & ,(x = ۰) \Rightarrow D = \{۰\} \\ \frac{۱}{\lfloor x \rfloor - ۱} & ,(x > ۰) \Rightarrow \lfloor x \rfloor \neq ۱ \Rightarrow D = (۰, +\infty) - [۱, ۲) \end{cases}$

$D_f = R - (\{-۲\} \cup [۱, ۲))$

۲۷) $f = \{(۲,۵), (۵,۷), (۷,۳), (۰,۰)\} \Rightarrow D_{fofof} = \{۲\}$

۲۸) $f(x) = (۲x)! \Rightarrow ۲x \in N \cup \{۰\} \Rightarrow x \in \frac{N}{۲} \cup \{۰\} \Rightarrow D_f = \{\frac{n}{۲} : n \in N \cup \{۰\}\}$

۲۹) $f(x) = \frac{۱}{\lfloor x^۲ \rfloor - ۲} \quad \lfloor x^۲ \rfloor = ۲ \Rightarrow ۲ \leq x^۲ < ۳$

$-\sqrt{۳} < x \leq -\sqrt{۲}$ یا $\sqrt{۲} \leq x < \sqrt{۳} \Rightarrow D_f = R - ((-\sqrt{۳}, -\sqrt{۲}] \cup [\sqrt{۲}, \sqrt{۳}))$

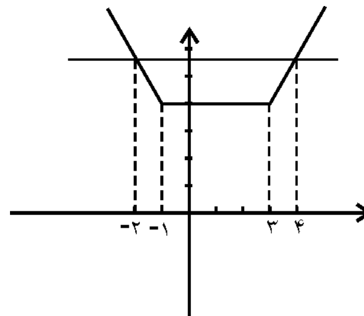
۳۰) $f(x) = \log \lfloor x \rfloor \quad \lfloor x \rfloor > ۰ \Rightarrow \lfloor x \rfloor \geq ۱ \Rightarrow x \geq ۱ \Rightarrow D_f = [۱, +\infty)$

۳۱) $f(x)=\sqrt{\lfloor x\rfloor -1}+\sqrt{3-\lfloor x\rfloor} \Rightarrow \begin{cases}\lfloor x\rfloor \geq 1 \Rightarrow x\geq 1\\ \lfloor x\rfloor \leq 3 \Rightarrow x<4\end{cases} \overset{\cap}{\rightarrow} D_f=[1,4)$

۳۲) $f(x)=\sqrt{|x+1|+|x-3|-6}$

$|x+1|+|x-3|\geq 6$

$D_f=R-(-2,4)$



۳۳) $f(x)=\dfrac{x+\lfloor x-\lfloor x\rfloor\rfloor}{x+\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor}$

$x+\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=0 \Rightarrow \begin{cases}x\in z\Rightarrow x+0=0\Rightarrow x=0 & \text{قابل قبول}\\ x\notin z\Rightarrow x+(-1)=0\Rightarrow x=1 & \text{غیرقابل قبول}\end{cases}$

$\Rightarrow D_f=R-\{0\}$

۳۴) $f=\{(2,4),(3,5),(0,-8)\}$, $g=\{(8,0),(10,1),(9,8)\} \Rightarrow D_{go(2f)}=?$

$2f=f+f=\{(2,8),(3,10),(0,-16)\} = \Rightarrow D_{go(2f)}=\{2,3\}$

۳۵) $f(x)=\text{Arcsin}4x+\text{Arccos}5x$

$\begin{cases}-1\leq 4x\leq 1\\ -1\leq 5x\leq 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-\frac{1}{4}\leq x\leq \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{5}\leq x\leq \frac{1}{5}\end{cases} \overset{\cap}{\Rightarrow} D_f=[-\frac{1}{5},\frac{1}{5}]$

۳۶) $f(x)=\sqrt{2x-4}$, $g(x)=\sqrt{x^3} \Rightarrow D_{fog}=?$

$(fog)(x)=\sqrt{2\sqrt{x^3}-4} \Rightarrow \begin{cases}2\sqrt{x^3}-4\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^3}\geq 2\Rightarrow x^3\geq 4\\ x^3\geq 0 \Rightarrow x\geq 0\end{cases}$

$x\geq \sqrt[3]{4} \Rightarrow D_f=[\sqrt[3]{4},+\infty)$

هرگاه دامنه‌ی تابع $y=f(x)$، بازه‌ی بسته $[a,b]$ باشد، دامنه‌ی تابع $y=f(kx)$ با شرط $k>0$ عبارتست از $[\frac{a}{k},\frac{b}{k}]$ و با شرط $k<0$ عبارتست از $[\frac{b}{k},\frac{a}{k}]$

زیرا: $a\leq kx\leq b \overset{k>0}{\Rightarrow} \frac{a}{k}\leq x\leq \frac{b}{k}$

به همین ترتیب برای حالت $k<0$

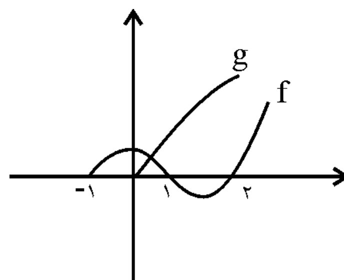
تذکر مهم: در حالت کلی، هرگاه $D_f=[a,b]$ باشد، آنگاه برای تعیین دامنه‌ی تابع $y=(fog)(x)=f(g(x))$، کافی است قرار دهیم: $a\leq g(x)\leq b$ و از آنجا حدود x و در نتیجه دامنه را بیابیم.

تست: هرگاه دامنه‌ی تابع $y = f(x)$ بازه‌ی $I_1 = [0,4]$ و دامنه‌ی تابع $y = g(x)$ بازه‌ی $I_2 = [2,4]$ فرض شود، دامنه‌ی تابع $h(x) = f(2x) + g(\frac{1}{x})$ برابر است با:

۱) $[0,2]$ ۲) $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ ۳) $[2,4]$ ۴) $[0,4]$

$$\begin{cases} 0 \le 2x \le 4 & \Rightarrow 0 \le x \le 2 \\ 2 \le \frac{1}{x} \le 4 & \Rightarrow \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_{f(2x)} = [0,2] \\ D_{g(\frac{1}{x})} = [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] \end{cases} \overset{\text{اشتراک}}{\Rightarrow} D_h = [\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$$

تست: هرگاه نمودار f و g به صورت مقابل باشند، دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$، کدام است؟



۱) $(0,+\infty)$

۲) $(-1,+\infty)-\{0,1\}$

۳) $[0,+\infty)$

۴) $(-1,+\infty)-\{1,0,2\}$

$$\begin{cases} D_f = [-1,+\infty) \\ D_g = [0,+\infty) \\ g(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g : g(x) = 0\} = [0,+\infty) - \{0\} = (0,+\infty)$$

بهترین وسیله برای دفع دشمنان، ازدیاد دوستان است. «بیسمارک»

یگانه راه دوست پیدا کردن، این است که خودمان اظهار دوستی کنیم. «امرسون»

یا سخن دانسته گوای مرد بخرد یا خموش. «حافظ»

یک قلب پاک از تمام معابد و مساجد زیبای جهان زیباتر است. «ولتر»

تست ۱:

۱ـ دامنه‌ی تابع $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$، کدام است؟

۱) $[0,1]$ ۲) $[0,4]$ ۳) $[0,8]$ ۴) $[0,16]$

۲ـ دامنه‌ی تابع $f: N \to N$ با ضابطه‌ی $x^2+y^2=5$، از چند عضو تشکیل شده است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۳ـ هرگاه $f(x)=\frac{3x+7}{x-3}$ و $g(x)=\frac{x+9}{x+1}$ باشند، D_{fog} کدام است؟

۱) $R-\{3\}$ ۲) $R-\{-1,3\}$ ۳) $R-\{-1,\frac{-3}{2}\}$ ۴) $R-\{-1\}$

۴ـ فرض می‌کنیم دامنه‌ی تابع $y=f(x)$ به صورت $D_f=[2,+\infty)$ باشد، دامنه‌ی $y=f(-3x+1)$ کدام است؟

۱) $(-\infty,\frac{-1}{3}]$ ۲) $(-7,+\infty)$ ۳) $[-\infty,6]$ ۴) $[-\frac{5}{3},+\infty)$

۵ـ دامنه‌ی تابع $y=\frac{x^4+1}{|x-1|+|x-3|+1}$ کدام است؟

۱) $R-\{1,3\}$ ۲) R ۳) $R-(1,3)$ ۴) $(1,3)$

۶ـ هرگاه $f(2x-1)=\sqrt{4-x^2}$، آنگاه دامنه‌ی تابع $y=f(x)$ کدام است؟

۱) $-2 \le x \le 2$ ۲) $-5 \le x \le 3$ ۳) $1 \le x \le 3$ ۴) $-6 \le x \le 2$

۷ـ دامنه‌ی تابع $y=\frac{x-7}{1-\lfloor x\rfloor}+\frac{x^2+9}{\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor}$ کدام است؟

۱) $R-(1,2)$ ۲) $Z-(1,2)$ ۳) $Z-\{1,2\}$ ۴) $(R-Z)-(1,2)$

۸ـ دامنه‌ی تعریف تابع $4x^2+y^2=16$ با شرط $x \ge 0$ و $y \ge 0$ کدام است؟

۱) $[0,4]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $[2,4]$ ۴) $[1,3]$

۹ـ دامنه‌ی تعریف تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$ کدام است؟

۱) $(0,+\infty)$ ۲) $(-\infty,0)$ ۳) R ۴) $\{\ \}$

۱۰ـ دو تابع به معادلات $y^2-2xy+2x^2-2=0$ مفروضند، دامنه‌ی این دو تابع کدام است؟

۱) $-2 \le x \le 2$ ۲) $0 \le x \le 2$ ۳) $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$ ۴) $0 \le x \le \sqrt{2}$

۱ـ (۴)

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=۴$

$\begin{cases} x\geq ۰ & (۱) \\ \sqrt{y}=۴-\sqrt{x} & \overset{\sqrt{y}\geq ۰}{\Rightarrow} ۴-\sqrt{x}\geq ۰ \Rightarrow \sqrt{x}\leq ۴ \Rightarrow x\leq ۱۶ \quad (۲) \end{cases}$

$(۱)\cap(۲) \Rightarrow ۰\leq x\leq ۱۶$

۲ـ (۳)

$y^۲=۵-x^۲ \overset{y^۲\geq ۰}{\Rightarrow} ۵-x^۲\geq ۰ \Rightarrow -\sqrt{۵}\leq x\leq \sqrt{۵} \overset{x\in N}{\Rightarrow} x=۱,۲$

$\begin{cases} x=۱ \\ y=۲ \end{cases} , \begin{cases} x=۲ \\ y=۱ \end{cases} \Rightarrow D_f=\{۱,۲\}$

۳ـ (۲)

$\begin{matrix} D_f=R-\{۳\} \\ D_g=R-\{-۱\} \end{matrix} \Rightarrow D_{fog}=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}$

$D_{fog}=\{x\neq -۱ : \frac{x+۹}{x+۱}\neq ۳\} = \{x\neq -۱ : x\neq ۳\}=R-\{-۱,۳\}$

۴ـ (۱)

$-۳x+۱\geq ۲ \Rightarrow -۳x\geq ۱ \Rightarrow x\leq -\frac{۱}{۳}$

۵ـ (۲)

$|x-۱|+|x-۳|+۱=۰ \Rightarrow |x-۱|+|x-۳|=-۱$ جواب ندارد $\Rightarrow D_f=R$

۶ـ (۲)

$f(x)=\sqrt{۴-(\frac{x+۱}{۲})^۲} \Rightarrow ۴-(\frac{x+۱}{۲})^۲\geq ۰$

$(x+۱)^۲\leq ۱۶ \Rightarrow -۴\leq x+۱\leq ۴ \Rightarrow -۵\leq x\leq ۳$

۷ـ (۴)

$۱-\lfloor x\rfloor \neq ۰ \Rightarrow \lfloor x\rfloor \neq ۱ \Rightarrow x\notin [۱,۲) \quad (۱)$

$\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor \neq ۰ \Rightarrow x\notin z \quad (۲)$

$(۱)\cap(۲) \Rightarrow D_f=(R-Z)-(۱,۲)$

۸ـ (۲)

$y^۲=۱۶-۴x^۲ \overset{y\geq ۰}{\Rightarrow} ۱۶-۴x^۲\geq ۰ \Rightarrow x^۲\leq ۴ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۲ \overset{x\geq ۰}{\Rightarrow} ۰\leq x\leq ۲ \Rightarrow D_f=[۰,۲]$

۹ـ (۴)

$x-|x|>۰ \Rightarrow x>|x| \Rightarrow D_f=\phi$

۱۰ـ (۳)

$y=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a} \Rightarrow y=x\pm\sqrt{x^۲-۲x^۲+۲} \Rightarrow ۲-x^۲\geq ۰ \Rightarrow -\sqrt{۲}\leq x\leq \sqrt{۲}$

یک ارادهٔ قوی بر هرکاری فائق می‌آید. «شاتو بریان»

تست ۲:

۱ـ دو تابع $f(x)=\sqrt{۱-۲x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{-x^۲}$ مفروضند، دامنه‌ی تعریف $(f+g)of$ کدام است؟

۱) $\{۰\}$ ۲) $[-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲}]$ ۳) $\{-\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{\sqrt{۲}}{۲}\}$ ۴) $\{-۲,۲\}$

۲ـ دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{x^۲-۴+\sqrt{x^۲-۲}}$ کدام است؟

۱) $(-۲,۲)$ ۲) $(\sqrt{۳},۳)$ ۳) $(-\sqrt{۳},\sqrt{۳})$ ۴) $R-(-\sqrt{۳},\sqrt{۳})$

۳ـ دامنه‌ی تابع $y=\text{Arccos}\frac{۲}{۲+\cos x}$ کدام است؟

۱) $[k\pi, k\pi+\frac{\pi}{۲}]$ ۲) $[k\pi-\frac{\pi}{۲},k\pi+\frac{\pi}{۲}]$ ۳) $[۲k\pi,۲k\pi+\pi]$ ۴) $[۲k\pi-\frac{\pi}{۲},۲k\pi+\frac{\pi}{۲}]$

۴ـ هرگاه $f(x+\frac{۱}{x})=x^۶+\frac{۱}{x^۶}$، دامنه‌ی تابع $y=f(x)$ کدام است؟

۱) $R-\{۰\}$ ۲) $-۲\le x\le ۲$ ۳) $x\ge ۲$ یا $x\le -۲$ ۴) R

۵ـ دامنه‌ی تعریف تابع $y=\text{Arcsin}\frac{x-۳}{۲}-\sqrt{\log(x-۳)}$ کدام است؟

۱) $x>۲$ ۲) $۳\le x\le ۵$ ۳) $x\ge ۳$ ۴) $۴\le x\le ۵$

۶ـ هرگاه دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{۳x+۷}{x^۲+ax+b}$، R باشد، دامنه‌ی کدام تابع زیر نیز، صددرصد R است؟

۱) $y=\frac{x^۲+۱}{x^۳+ax+b}$ ۲) $y=\frac{۲x-۱}{x^۳-ax+b}$ ۳) $y=\frac{x+۱}{x^۲+ax+۴b}$ ۴) $y=\frac{x^۲+x+۱}{x^۲+۲ax+۴b}$

۷ـ هرگاه $f:Z\to Z$ با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{۱۰۰-۲x^۲}$ باشد، دامنه‌ی f شامل چند عضو است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

۸ـ کدام حکم زیر درست است؟

۱) $D_{fog}\subset D_g$ ۲) $D_{fog}\subset D_f$ ۳) $D_f\subset D_{fog}$ ۴) $D_g\subset D_{fog}$

۹ـ دامنه‌ی تابع $f(x)=\cot\frac{۳\pi}{۵}x$ کدام است؟

۱) $R-\{k\pi :k\in Z\}$ ۲) $R-\{\frac{۳k}{۵}:k\in Z\}$ ۳) $R-\{\frac{۵k}{۳}:k\in Z\}$ ۴) R

۱۰ـ دامنه‌ی تابع $y=\text{Arctan}\frac{۱}{x-۲}+\text{Arccos}(x-۳)$ کدام است؟

۱) $(۲,۳]$ ۲) $۲<x\le ۴$ ۳) $(۰,۲)$ ۴) $۴<x\le ۶$

۱ـ (۳)

$D_{(f+g)of} = \{x \in D_f : f(x) \in D_{f+g}\}$

$D_f = [-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}], D_g = \{۰\}, D_{f+g} = \{۰\} \Rightarrow D_{(f+g)of} = \{x \in [\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{\sqrt{۲}}{۲}] : \sqrt{۱-۲x^۲} = ۰\} = \{\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}\}$

۲ـ (۴)

$x^۲ - ۲ \geq ۰ \Rightarrow x \leq -\sqrt{۲}$ یا $x \geq \sqrt{۲}$ (۱)

$\sqrt{x^۲-۲} = a \Rightarrow y = \sqrt{a^۲+a-۲} \Rightarrow a^۲+a-۲ \geq ۰$

$\Rightarrow \begin{cases} a \geq ۱ \\ \text{یا} \\ a \leq -۲ \quad \text{غیرقابل قبول} \end{cases}, (a \geq ۰) \Rightarrow \sqrt{x^۲-۲} \geq ۱ \Rightarrow x \leq -\sqrt{۳}$ یا $x \geq \sqrt{۳}$ (۲)

$(۱) \cap (۲) \Rightarrow x \geq \sqrt{۳}$ یا $x \leq -\sqrt{۳}$

۳ـ (۴)

$-۱ \leq \frac{۲}{۲+\cos x} \leq ۱ \Rightarrow \begin{cases} -۱ \leq \frac{۲}{۲+\cos x} \Rightarrow \frac{۲}{۲+\cos x} + ۱ \geq ۰ \Rightarrow \text{همواره برقرار است.} \\ \frac{۲}{۲+\cos x} \leq ۱ \Rightarrow ۲ \leq ۲+\cos x \Rightarrow \cos x \geq ۰ \Rightarrow ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \leq x \leq ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases}$

۴ـ (۳)

$f(x+\frac{۱}{x}) = (x^۲+\frac{۱}{x^۲})^۳ - ۳(x^۲+\frac{۱}{x^۲}) \Rightarrow f(x+\frac{۱}{x}) = [(x+\frac{۱}{x})^۲-۲]^۳ - ۳[(x+\frac{۱}{x})^۲-۲]$

$(۱) \Rightarrow f(x) = (x^۲-۲)^۳ - ۳(x^۲-۲)$

چون $|x + \frac{۱}{x}| \geq ۲$ لذا باید $x + \frac{۱}{x} \geq ۲$ باشد یا $x + \frac{۱}{x} \leq -۲$ باشد در نتیجه $D_f = (-\infty,-۲] \cup [۲,+\infty)$، در واقع چون در رابطه‌ی (۱) به جای x، $x + \frac{۱}{x}$ قرار داده‌ایم، لذا x بایستی حدود تغییرات $x + \frac{۱}{x}$ را داشته باشد.

۵ـ (۴)

$-۱ \leq \frac{x-۳}{۲} \leq ۱ \Rightarrow -۲ \leq x-۳ \leq ۲ \Rightarrow ۱ \leq x \leq ۵$ (۱)

$x - ۳ > ۰ \Rightarrow x > ۳$ (۲)

$\log(x-۳) \geq ۰ \Rightarrow \log(x-۳) \geq \log ۱ \Rightarrow x-۳ \geq ۱ \Rightarrow x \geq ۴$ (۳)

$(۱) \cap (۲) \cap (۳) \Rightarrow ۴ \leq x \leq ۵$

۶ـ (۴)

$D_f = R \Rightarrow \Delta = a^۲ - ۴b \neq ۰$

ضمناً توجه داشته باشید که هر معادله‌ی از درجه‌ی فرد حداقل یک ریشه دارد. $y = \frac{x^۲+x+۱}{x^۲+۲ax+۴b} \Rightarrow \Delta' = a^۲ - ۴b \neq ۰$

۷ـ (۱)

$۱۰۰ - ۲x^۲ \geq ۰ \Rightarrow -\sqrt{۵۰} \leq x \leq \sqrt{۵۰} \overset{x \in z}{\Rightarrow} x = ۰, \pm۱, \pm۲, \pm۳, ..., \pm۷$

اما با هیچکدام از این مقادیر به جز ۰، عبارت زیر رادیکال مربع کامل نمی‌شود و لذا مقداری صحیح برای y به دست نمی‌آید، بنابراین: $D_f = \{۰\}$

۸ـ (۱)

۹ـ (۳)

$D_f = \{x \in R : \frac{۳\pi}{۵} x \neq k\pi\} = \{x : x \in R, x \neq \frac{۵k}{۳}, k \in z\}$

۱۰ـ (۲)

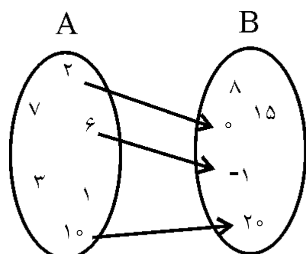
$x \neq ۲, (۱), -۱ \leq x-۳ \leq ۱ \Rightarrow ۲ \leq x \leq ۴, (۲) \Rightarrow (۱) \cap (۲) = (۲,۴]$

برد

هرگاه $f: A \to B$ یک تابع باشد، برد تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_f = \{y \in B : \exists x \in A \ \ : f(x) = y\}$$

لذا همیشه برد تابع زیر مجموعه‌ای از مجموعه‌ی پایان یعنی B می‌باشد.



مثال: در تابع روبرو، برد تابع عبارتست از:

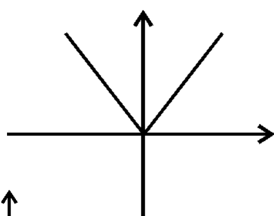
$$R_f = \{۰, -۱, ۲۰\}$$

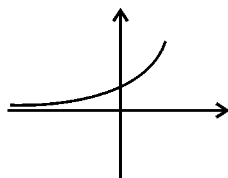
دو عدد ۸ و ۱۵ عضو برد نیستند.

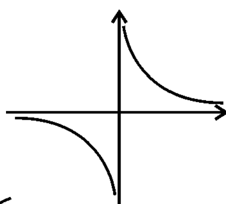
تعیین برد توابع و رابطه‌ها از روی نمودارشان:

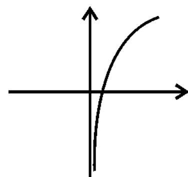
برای تعیین برد توابع و روابطه‌ها از روی نمودارشان، کافی است عرض (y) نقاط آنها را در نظر بگیریم.

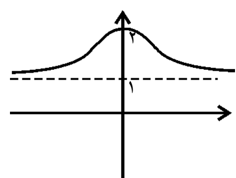
مثال: برد رابطه‌ها و توابع زیر را از روی نمودارشان بیابید؟

۱)  $\Rightarrow R_f = [۰, +\infty)$

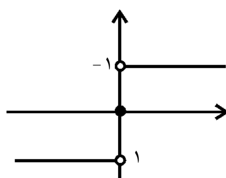
۲)  $\Rightarrow R_f = (۰, +\infty)$

۳)  $\Rightarrow R_f = R - \{۰\}$

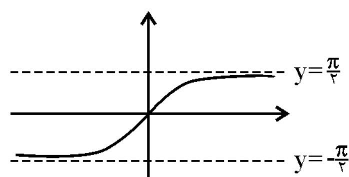
۴)  $\Rightarrow R_f = R$

۵) 

$\Rightarrow R_f = (۱, ۲]$

۶) 

$\Rightarrow R_f = \{-۱, ۰, +۱\}$

۷) 

$\Rightarrow R_f = (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$

روشهای تعیین برد توابع

۱ـ هر تابع چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد، که دامنه‌اش R باشد، بردش نیز R است.

مثال: برد توابع $y = x^3$ و $y = x^5 + x$ و ...، R **است.**

۲) برد تابع $y = |x|$ می‌شود: $R_f = [0, +\infty)$

۳) برد تابع $y = |x-a| + |x-b|$ (تابع گلدون) می‌شود: $R_f = [|a-b|, +\infty)$

۴) برد تابع $y = |x-a| - |x-b|$ (تابع صندلی) می‌شود: $R_f = [-|a-b|, |a-b|]$

۵) برد توابع به صورت $y = |f(x)|$ عبارتست از $R^+ \cup \{0\}$ یا زیر مجموعه‌ای از آن.

۶) برد توابع به صورت $y = \frac{x-a}{|x-a|}$ و $y = \frac{|x-a|}{x-a}$ می‌شود $R_f = \{-1, 1\}$

۷) برد توابع به صورت $f(x) = |x-a| + |x-b| + \dots + |x-k|$ می‌شود:

$$R_f = [Min\{f(a), f(b), \dots, f(k)\}, +\infty)$$

تست: برد تابع $y = |x-1| + |2x-6| + |2x+4|$ **کدام است؟**

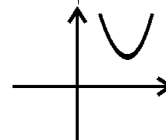
۱) $[0, +\infty)$ ۲) $[10, +\infty)$ ۳) $[12, +\infty)$ ۴) $[13, +\infty)$

$$\begin{cases} f(1) = 10 \\ f(3) = 12 \\ f(-2) = 13 \end{cases} \Rightarrow R_f = [10, +\infty)$$

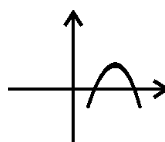
۸) هرگاه قانون یک رابطه به صورت $|x-a| + |y-b| = k$ $(k > 0)$ باشد (نمودار این رابطه، یک مربع می‌باشد) آنگاه با توجه به اینکه $|y-b| = k - |x-a| \le k$، خواهیم داشت: $|y-b| \le k$ و از آنجا برد می‌شود: $R_f = [b-k, b+k]$

۹ـ هرگاه قانون یک رابطه به صورت $|y-b| - |x-a| = k$ $(k > 0)$ باشد آنگاه با توجه به اینکه $|y-b| = k + |x-a| \ge k$، خواهیم داشت: $|y-b| \ge k$ و از آنجا برد می‌شود: $R_f = [-\infty, b-k] \cup [b+k, +\infty)$

۱۰) در تابع درجه‌ی دوم $y = ax^2 + bx + c$، برد به صورت زیر به دست می‌آید:



$$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow R_f = [f(-\frac{b}{2a}), +\infty) = [-\frac{\Delta}{4a}, +\infty) = [Min, +\infty) \\ a < 0 \Rightarrow R_f = (-\infty, f(\frac{-b}{2a})] = (-\infty, \frac{-\Delta}{4a}] = (-\infty, Max] \end{cases}$$



۱۱) حداقل نامنفی‌ها، به شرط آنکه، طول صفر کننده، وجود داشته باشد، صفر است به همین ترتیب حداکثر نامثبت‌ها نیز، بشرط آنکه، طول صفر کننده، وجود داشته باشد، صفر است.

بنابراین داریم:

$$1)\ y = \left(f(x)\right)^{2n} + k \Rightarrow R_f = [k, +\infty)$$

$$2)\ y = \sqrt[2n]{f(x)} + k \Rightarrow R_f = [k, +\infty)$$

۳) $y = |f(x)| + k \Rightarrow R_f = [k, +\infty)$

۴) $y = -\left(f(x)\right)^{2n} + k \Rightarrow R_f = (-\infty, k]$

۵) $y = -\sqrt[2n]{f(x)} + k \Rightarrow R_f = (-\infty, k]$

۶) $y = -\left|f(x)\right| + k \Rightarrow R_f = (-\infty, k]$

تذکر: برد توابع فوق، با شرط اینکه f(x)، صفر شود، نوشته شده است.

مثال: برد توابع زیر را بیابید؟

۱) $y = (x^3 - 5)^{100} + 10 \Rightarrow$ برد $= [10, +\infty)$, $f(\sqrt[3]{5}) = 0$

۲) $y = -|x^2 - 4| - 3 \Rightarrow$ برد $= (-\infty, -3]$, $f(\pm 2) = 0$

۳) $y = \sqrt{x-1} + 2 \Rightarrow$ برد $= [2, +\infty)$, $f(1) = 0$

۴) $y = |x - 3| + |x^2 - 9| + 1 \Rightarrow$ برد $= [1, +\infty)$, $f(3) = 0$

۱۲ـ هرگاه در ۶ مورد فوق، طول صفر کننده‌ی f(x) وجود نداشته باشد، ابتدا Min یا Max f(x) را حساب کرده و سپس برد را می‌یابیم.

مثال: برد توابع زیر را بیابید؟

۱) $y = (x^4 + x^2 + 3)^4 + 10 \Rightarrow \text{Min}(x^4 + x^2 + 3) = 0 + 0 + 3 = 3 \Rightarrow$ برد $= [91, +\infty)$

۲) $y = -|x^2 + 3| + 5 \Rightarrow \text{Max}(-|x^2 + 3|) = -|0 + 3| = -3 \Rightarrow$ برد $= (-\infty, 2]$

۳) $y = (x^2 + 2x + 5)^2 + 8 \Rightarrow \text{Max}(x^2 + 2x + 5) = f(-1) = 4 \Rightarrow$ برد $= [24, +\infty)$

۱۳) برای محاسبه‌ی برد بعضی از توابع، می‌توان از تبدیل اتحاد ناقص به اتحاد کامل استفاده کرد.

$$\begin{cases} x^2 + ax = (x + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} \\ x^{2n} + ax^n = (x^n + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4} \end{cases}$$

مثال:

$y = x^2 - 6x + 19 = (x-3)^2 + 10 \Rightarrow$ برد $= [10, +\infty)$

$y = x^{100} - 4x^{50} + 3 = (x^{50} - 2)^2 - 1 \Rightarrow$ برد $= [-1, +\infty)$

$y = \tan^2 x - 3\tan x = (\tan x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow$ برد $= [-\frac{9}{4}, +\infty)$

۱۴) برد توابع به صورت $y = ax^4 + bx^2 + c$ با شرط $ab > 0$ می‌شود:

$$\begin{cases} a > 0 \Rightarrow R_f = [c, +\infty) \\ a < 0 \Rightarrow R_f = (-\infty, c] \end{cases}$$

۱۵) برد توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ عبارتست از $R_f = [-1, +1]$

۱۶) برد توابع $y = \tan x$ و $y = \cot x$ عبارتست از R

۱۷) برد توابع $y = \sec x$ و $y = \operatorname{cosec} x$ عبارتست از $(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$

درواقع چون $-1 \leq \sin x \leq 1$ لذا $\frac{1}{\sin x} \geq 1$ یا $\frac{1}{\sin x} \leq -1$ درنتیجه $\operatorname{cosec} x \geq 1$ یا $\operatorname{cosec} x \leq -1$، به همین ترتیب برای $\sec x$

۱۸) برد تابع $y = \operatorname{Arcsin} x$ عبارتست از: $R_f = [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

۱۹) برد تابع $y = \operatorname{Arccos} x$ عبارتست از: $R_f = [0,\pi]$

۲۰) برد تابع $y = \operatorname{Arctan} x$ عبارتست از: $R_f = (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

۲۱) برد تابع $y = \operatorname{Arccot} x$ عبارتست از: $R_f = (0,\pi)$

۲۲) در توابع به صورت $y = a\sin x + b\cos x + c$ داریم: $\begin{cases} y_{Min} = c - \sqrt{a^2+b^2} \\ y_{Max} = c + \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}$ بنابراین:

$$R_f = [c - \sqrt{a^2+b^2}, c + \sqrt{a^2+b^2}]$$

۲۳) در توابع به صورت $y = a\tan x + b\cot x$ داریم: $\begin{cases} y_{Min} = \sqrt{2ab} \\ y_{Max} = -\sqrt{2ab} \end{cases}$ ضمناً $\begin{cases} y_{Min} < y_{Max} & \text{در توابع پیوسته} \\ y_{Min} > y_{Max} & \text{در توابع ناپیوسته} \end{cases}$

$$R_f = (-\infty, -2\sqrt{ab}] \cup [\sqrt{2ab}, +\infty)$$

۲۴) برد توابع به صورت $y = \sin^{2k} mx$ و $y = \cos^{2k} mx$ می‌شود: $(k \in N) R_f = [0,1]$

۲۵) برد توابع به صورت $y = \sin^{2k+1} mx$ و $y = \cos^{2k+1} mx$ می‌شود: $(k \in N) R_f = [-1,1]$

۲۶) برد توابع به صورت $y = \sin^{2k} mx + \cos^{2k} mx$ می‌شود: $(K \in N)\ R_f = [2^{1-k}, 1]$

۲۷) برای تعیین برد هر یک از توابع به صورت $y = a\sin^{2k} mx + b$ و $y = a\cos^{2k} mx + b$، به جای $\sin mx$ و $\cos mx$، مقادیر ۰ و ۱ را قرار داده، $Min(y)$ و $Max(y)$ و در نتیجه برد تابع مشخص می‌شود $(k \in N)$

۲۸) برای تعیین برد هر یک از توابع $y = a\sin^{2k-1} mx + b$ و $y = a\cos^{2k-1} mx + b$، به حای $\sin mx$ و $\cos mx$، مقادیر ۱ و ۱- را قرار داده، $Min(y)$ و $Max(y)$ و در نتیجه برد تابع به دست آیند.

۲۹) برای تعیین برد هر یک از توابع $y = a\sin^2 mx + b\sin mx + c$ یا $y = a\cos^2 mx + b\cos mx + c$، ابتدا مقدار $\frac{-b}{2a}$ را محاسبه نموده، سپس به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) اگر $-\frac{b}{2a} \in [-1,1]$ باشد، آنگاه در توابع فوق به جای $\sin mx$ و $\cos mx$، مقادیر ۱ و ۱- و $-\frac{b}{2a}$ را قرار داده، $Min(y)$ و $Max(y)$ و در نتیجه برد تابع به دست می‌آیند.

ب) اگر $-\frac{b}{2a} \notin [-1,1]$ باشد، آنگاه در توابع فوق به جای $\sin mx$ و $\cos mx$، مقادیر ۱ و ۱- و را قرار داده، $Min(y)$ و $Max(y)$ و در نتیجه برد تابع به دست می‌آیند.

توجه داشته باشد که در هر دو حالت فوق برد می‌شود: $R_f = [Min(y) , Max(y)]$

تذکر: برای تعیین برد توابع به صورت $y = a\sin^2 mx + b\sin mx + c$ یا $y = a\cos^2 mx + b\cos mx + c$، از روش تشکیل مربع کامل نیز می‌توان استفاده کرد.

تست: برد تابع $y = \sin^2 x - \sin x + 1$ **کدام است؟**

۱) $[1,3]$ ۲) $[\frac{3}{4},3]$ ۳) $[0,1]$ ۴) $[-1,1]$

روش اول: $\sin x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$ قابل قبول

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{4} = y_{Min} \\ \sin x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ \sin x = -1 \Rightarrow y = 3 = y_{Max} \end{cases} \quad \text{برد} = [\frac{3}{4},3]$$

روش دوم: $y = (\sin x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \Rightarrow -1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -\frac{3}{2} \le \sin x - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le (\sin x - \frac{1}{2})^2 \le \frac{9}{4}$

$\frac{3}{4} \le (\sin x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \le \frac{12}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} \le y \le 3$

۲۸) برد تابع $y = \sqrt{a^2 - b^2x^2}$ با شرط $a > 0$ می‌شود، $R_f = [0,a]$

۲۹) برد تابع $y = \frac{ax^2}{1 + x^2}$ با شرط $a > 0$، می‌شود $R_f = [0,a)$

۳۰) برد تابع $y = \lfloor x \rfloor$ می‌شود: $R_f = Z$

۳۱) برد تابع $y = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ می‌شود: $R_f = \{0,-1\}$

۳۲) برد تابع $y = ax + a\lfloor -x \rfloor$ می‌شود: $R_f = \{0,-a\}$

۳۳) برد تابع $y = x - \lfloor x \rfloor$ و به طور کلی توابع به صورت $y = ax - \lfloor ax \rfloor$ می‌شود $R_f = [0,1)$

تست: برد تابع $y = 3x - \lfloor 3x - 4 \rfloor$**، کدام است؟**

۱) $\{4\}$ ۲) $[4,5)$ ۳) $\{4,5\}$ ۴) Z

حل: $y = 3x - \lfloor 3x \rfloor + 4 \Rightarrow 0 \le 3x - \lfloor 3x \rfloor < 1 \Rightarrow 4 \le y < 5$

۳۴) برد توابع به صورت $y = x - \lfloor x \rfloor + p$ و به طور کلی $y = ax - \lfloor ax \rfloor + p$ $(p \in R)$ می‌شود: $R_f = [p,p+1)$

۳۵) برد توابع به صورت $y = \lfloor f(x) \rfloor$ عبارتست از Z و یا زیر مجموعه‌ای از آن.

۳۶) برد تابع $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ می‌شود: $R_f = [0,a]$ $(a > 0)$

۳۷) برد تابع $y = \sqrt{x^2 - a^2}$ می‌شود: $R_f = [0,+\infty)$

۳۸) برای تعیین دامنه و برد رابطه‌های به فرم، $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$، ابتدا عبارت را برحسب توانهای نزولی y نوشته، Δ را بزرگتر یا مساوی صفر قرار داده، دامنه به دست می‌آید و سپس عبارت را برحسب توانهای نزولی x نوشته، Δ را بزرگتر یا مساوی صفر قرار داده، برد به دست خواهد آمد.

مثال: برد رابطه‌ی $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ **را به دست آورید؟**

$x^2 - 4x + y^2 + 2y + 1 = 0$

$\Delta' \ge 0 \Rightarrow 4 - (y+1)^2 \ge 0 \Rightarrow -2 \le y + 1 \le 2 \Rightarrow -3 \le y \le 1$

۳۹) معادله‌ی هر دایره در حالت کلی به صورت $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$ است، برد دایره عبارتست از:

$R_f=[\beta-R,\beta+R]$

یادآوری: در معادله‌ی فوق (α,β) مرکز دایره و R شعاع دایره می‌باشند.

۴۰) معادله‌ی هرهذلولی در حالت کلی به یکی از دو صورت زیر است:

$$\begin{cases}\dfrac{(x-\alpha)^۲}{a^۲}-\dfrac{(y-\beta)^۲}{b^۲}=۱ & \text{(هذلولی افقی)} \Rightarrow R_f=R\\[2mm] \dfrac{(y-\beta)^۲}{a^۲}-\dfrac{(x-\alpha)^۲}{b^۲}=۱ & \text{(هذلولی قائم)} \Rightarrow R_f=(-\infty,\beta-a]\cup[\beta+a,+\infty)\end{cases}$$

اثبات برد هذلولی قائم:

$$\frac{(y-\beta)^۲}{a^۲}-۱=\frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲}\geq ۰ \Rightarrow \frac{(y-\beta)^۲}{a^۲}-۱\geq ۰ \Rightarrow (y-\beta)^۲\geq a^۲$$

$y-\beta\leq -a$ یا $y-\beta\geq a \Rightarrow y\leq\beta-a$ یا $y\geq\beta+a$

۴۱) معادله‌ی هر بیضی در حالت کلی به یکی از دو صورت زیر است:

$$\begin{cases}\dfrac{(x-\alpha)^۲}{a^۲}+\dfrac{(y-\beta)^۲}{b^۲}=۱ & \text{(بیضی افقی)} \Rightarrow R_f=[\beta-b,\beta+b]\\[2mm] \dfrac{(x-\alpha)^۲}{b^۲}+\dfrac{(y-\beta)^۲}{a^۲}=۱ & \text{(بیضی قائم)} \Rightarrow R_f=[\beta-a,\beta+a]\end{cases}$$

تذکر: برای درک بهتر برد دایره، هذلولی و بیضی به شکلشان توجه کنید.

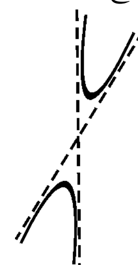
۴۲) برد تابع هموگرافیک:

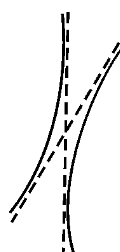
هر تابع به صورت $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq ۰\,,\,c\neq ۰)$ را تابع هموگرافیک گویند.

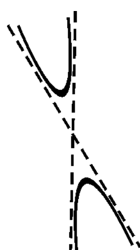
برد این تابع عبارتست از: $R_f=R-\{\text{مجانب افقی}\}=R-\{\frac{a}{c}\}$

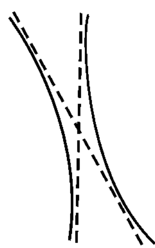
۴۳) برد تابع $y=\dfrac{ax^۲+bx+c}{b'x+c'}$

شکل این تابع به یکی از چهار صورت زیر است:


(۱)


(۲)


(۳)


(۴)

در حالت (۱) و (۳) مشتق تابع دو ریشه داشته، لذا برد تابع در این دو حالت می‌شود:

$R_f=(-\infty,y_{Max}]\cup[y_{Min},+\infty)$

و در حالات (۲) و (۴) مشتق تابع دو ریشه نداشته، برد تابع R خواهد بود.

۴۴) هرگاه f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و اکیداً صعودی باشد برد تابع می‌شود. $R_f=[f(a),f(b)]$

تست: برد تابع $y=\sqrt{x-۱}+|x-۱|$ کدام است؟

۱) $[۱,+\infty)$ ۲) $[۱,۳]$ ۳) $[۰,+\infty)$ ۴) $(۱,+\infty)$

$$x-۱\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۱ \Rightarrow D_f=[۱,+\infty)\Rightarrow y=\sqrt{x-۱}+x-۱$$

$$y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}+۱>۰ \Rightarrow$$ y اکیداً صعودی است $$\Rightarrow R_f=[f(۱),f(+\infty))=[۰,+\infty)$$

۴۵) هرگاه f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و اکیداً نزولی باشد، برد تابع می‌شود: $R_f=[f(b),f(a)]$

تست: برد تابع $y=\frac{۲x+۱}{x-۱}$ با شرط $x\in[۲,۳)$ کدام است؟

۱) $[\frac{۷}{۲},۴)$ ۲) $(۳,\frac{۷}{۲}]$ ۳) $(۲,۵]$ ۴) $(\frac{۷}{۲},۵]$

$$f'(x)=\frac{-۳}{(x-۱)^۲}<۰ \Rightarrow$$ y اکیداً نزولی است. $$\Rightarrow D_f=[۲,۳) \Rightarrow R_f=(f(۳),f(۲)]=(\frac{۷}{۲},۵]$$

۴۶) هرگاه تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و مشتق تابع در بازه‌ی $[a,b]$ دارای ریشه‌های محدود باشد (به فرض $x_۱$ و $x_۲$ و... و x_n ریشه‌های قابل قبول مشتق باشند) آنگاه نقاط بحرانی تابع عبارتند از: $\{a,x_۱,x_۲,...,x_n,b\}$ لذا

$$\begin{cases} m= \text{مینیمم مطلق} =Min\{f(x_۱),f(x_۲),...,f(x_n),f(a),f(b)\} \\ M= \text{ماکزیمم مطلق} =Max\{f(x_۱),f(x_۲),...,f(x_n),f(a),f(b)\}\end{cases}$$

و بنابراین برد تابع می‌شود: $D_f=[m,M]$

۴۷) ***یادآوری: نکته:***

۱ـ مجموع هر عدد مثبت و معکوسش، همواره بزرگتر یا مساوی ۲ است یعنی: $a>۰ \Rightarrow a+\frac{۱}{a}\geq ۲$

۲ـ مجموع هر عدد منفی و معکوسش، همواره کوچکتر یا مساوی ۲- است یعنی: $a<۰ \Rightarrow a+\frac{۱}{a}\leq -۲$

نتیجه: $a\neq ۰ \Rightarrow |a+\frac{۱}{a}|\geq ۲$

بنابراین با توجه به نکات فوق، برد توابع زیر می‌شود:

$$\begin{cases} y=\tan x+\cot x \\ y=\sin x+\operatorname{cosec} x \\ y=\cos x+\sec x \\ y=\log_۵^x+\log_x^۵ \\ y=\frac{x^۲+۱}{x}=x+\frac{۱}{x}\end{cases} \Rightarrow R_f=\{y\in R: y\leq -۲, y\geq ۲\}=(-\infty,-۲]\cup[۲,+\infty)$$

$$y=(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{COSX}+(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})^{\cos x}\Rightarrow y=(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{\cos x}+\frac{۱}{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^{\cos x}}\geq ۲\Rightarrow R_f=[۲,+\infty)$$

۴۸) محاسبه‌ی برد با استفاده از فرمولهای مثلثات:

برد برخی از توابع را می‌توان به کمک فرمولهای مثلثات نیز محاسبه کرد.

مثال: برد توابع زیر را حساب کنید؟

$$۱)\ y=\frac{\sqrt{۲}x}{۱+x^۲}+\frac{\sqrt{۳}-\sqrt{۳}x^۲}{۱+x^۲}$$

$x=\tan\alpha$ فرض می‌کنیم $\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۲}\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}+\frac{\sqrt{۳}(۱-\tan^۲\alpha)}{۱+\tan^۲\alpha}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin۲\alpha+\sqrt{۳}\cos۲\alpha$

$$-\sqrt{a^۲+b^۲}\le y\le\sqrt{a^۲+b^۲}\Rightarrow-\sqrt{\frac{۷}{۲}}\le y\le\sqrt{\frac{۷}{۲}}\Rightarrow R_f=[-\sqrt{\frac{۷}{۲}},\sqrt{\frac{۷}{۲}}]$$

$$۲)\ y=\frac{x}{۱+x^۲}$$

$x=\tan\alpha$ فرض می‌کنیم $\Rightarrow y=\frac{\tan\alpha}{۱+\tan^۲\alpha}=\frac{۱}{۲}\sin۲\alpha\Rightarrow -۱\le\sin۲\alpha\le ۱\Rightarrow$

$$-\frac{۱}{۲}\le\frac{۱}{۲}\sin۲\alpha\le\frac{۱}{۲}\Rightarrow R=[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$$

$$۳)\ y=\sqrt{\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}}\qquad D_f=[-۱,۱]$$

$x=\tan\alpha$ فرض می‌کنیم $\Rightarrow y=\sqrt{\cos۲\alpha}\Rightarrow ۰\le\sqrt{\cos۲\alpha}\le ۱\Rightarrow R_f=[۰,۱]$

۴۹ـ***نکته:*** هرگاه مجموع دو کمیت مثبت مقدار ثابتی باشد، حاصلضربشان هنگامی ماکزیمم است که آن دو کمیت برابر باشند.

مثال: برد تابع $y=\sqrt{۴|x|-x^۲}$ را بیابید؟

$$y=\sqrt{|x|(۴-|x|)}\Rightarrow y\ge ۰\qquad (۱)$$

$$\begin{cases}|x|\ge ۰\\ ۴-|x|\ge ۰\end{cases}\quad |x|+۴-|x|=۴\Rightarrow|x|=۴-|x|\Rightarrow|x|=۲\Rightarrow Max(y)=\sqrt{۲(۴-۲)}=۲\Rightarrow R_f=[۰,۲]$$

۵۰) برای تعیین برد توابع کسری به صورت $y=\frac{ax^۲+bx+c}{a'x^۲+b'x+c'}$، معادله را طرفین وسطین کرده، همه‌ی جملات را یک طرف آورده، معادله‌ی درجه‌ی دومی برحسب x به دست می‌آوریم، دلتای این معادله را (که خود معادله‌ای درجه‌ی دوم برحسب y است) بزرگتر یا مساوی صفر قرار داده، حدود y را می‌یابیم، سپس مجانب افقی تابع را حساب کرده، اگر مجانب افقی در ابتدا یا انتهای حدود تغییرات y قرار گیرد، آنرا حذف می‌کنیم.

مثال: برد تابع $y=\frac{۱}{x^۲-x+۱}$ را حساب کنید؟

$$yx^۲-yx+y-۱=۰$$

$$\Delta\ge ۰\Rightarrow y^۲-۴y(y-۱)\ge ۰\Rightarrow -۳y^۲+۴y\ge ۰\Rightarrow ۰\le y\le\frac{۴}{۳}$$

$x\to\pm\infty\Rightarrow y=۰$ مجانب افقی $\Rightarrow R_f=(۰,\frac{۴}{۳}]$

۵۱) در توابع دو یا چند ضابطه‌ای، دامنه‌ی تابع، برابر اجتماع دامنه‌ها و برد تابع برابر اجتماع بردهاست.

مثال: برد تابع $f(x)=\begin{cases}x & ,(x\le ۰)\\ ۲x+۳ & ,(x\ge ۲)\end{cases}$ را حساب کنید؟

$$D_f=(-\infty,۰]\cup[۲,+\infty)$$

$$f(x)=\begin{cases} x & ,(x\le ۰) \Rightarrow x\le ۰ \Rightarrow y\le ۰ \\ ۲x+۳ & ,(x\ge ۲) \Rightarrow x\ge ۲ \Rightarrow ۲x\ge ۴ \Rightarrow ۲x+۳\ge ۷ \Rightarrow y\ge ۷ \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_f=(-\infty,۰]\cup[۷,+\infty)$$

۵۲) هرگاه برد تابع $y=f(x)$ برابر $R_f=[c,d]$ باشد، آنگاه برد تابع $y=kf(x)+\lambda$ $(k>۰)$ می‌شود $[kc+\lambda,kd+\lambda]$

۵۳) برد توابع $y=Lnx$ و $y=\log_a^x$، برابر R است.

۵۴) برد توابع $y=e^x$ و $y=a^x$ می‌شود: $(۰,+\infty)$

۵۵) برد تابع $y=\frac{۱-x^۲}{۱+x^۲}$ می‌شود. $(-۱,+۱]$

مثال: برد توابع زیر را بیابید؟

$$۱)\ f(x)=۲x-۲\lfloor x\rfloor+۱=۲(x-\lfloor x\rfloor)+۱$$

$$۰\le x-\lfloor x\rfloor<۱ \Rightarrow ۰\le ۲(x-\lfloor x\rfloor)<۲ \Rightarrow R_f=[۱,۳)$$

$$۲)\ f(x)=۱+\sqrt{۲x-x^۲}$$

روش اول:

$$f(x)=۱+\sqrt{۱-(x-۱)^۲} \Rightarrow \begin{cases} ۰\le ۱-(x-۱)^۲ \\ ۱-(x-۱)^۲\le ۱ \end{cases} \Rightarrow ۰\le ۱-(x-۱)^۲\le ۱$$

$$\Rightarrow ۰\le\sqrt{۱-(x-۱)^۲}\le ۱ \Rightarrow ۱\le y\le ۲ \Rightarrow R_f=[۱,۲]$$

روش دوم:

$$y=۱+\sqrt{۲x-x^۲} \Rightarrow y-۱=\sqrt{۲x-x^۲} \Rightarrow y-۱\ge ۰ \Rightarrow y\ge ۱ \qquad (۱)$$

$$(y-۱)^۲=۲x-x^۲ \Rightarrow x^۲-۲x+(y-۱)^۲=۰ \Rightarrow \Delta'\ge ۰ \Rightarrow ۱-(y-۱)^۲\ge ۰$$

$$(y-۱)^۲\le ۱ \Rightarrow -۱\le y-۱\le ۱ \Rightarrow ۰\le y\le ۲ \qquad (۲)$$

$$(۱)\cap(۲) \Rightarrow ۱\le y\le ۲$$

$$۳)\ y=|x+۳۵|+|x-۱۵|$$

تابع گلدان $\Rightarrow y\ge|-۳۵-۱۵| \Rightarrow y\ge ۵۰ \Rightarrow R_f=[۵۰,+\infty)$

روش اول:

$$۴)\ y=\sin^۶ ۵x+\cos^۶ ۵x \Rightarrow \text{برد}=\left[۲^{۱-k},۱\right]=\left[۲^{-۲},۱\right]=\left[\frac{۱}{۴},۱\right]$$

روش دوم:

$$\sin^۶ ۵x+\cos^۶ ۵x=۱-\frac{۳}{۴}\sin^۲ ۱۰x$$

$$۰\le\sin^۲ ۱۰x<۱ \Rightarrow -\frac{۳}{۴}\le-\frac{۳}{۴}\sin^۲ ۱۰x\le ۰ \Rightarrow$$

$$\frac{۱}{۴}\le ۱-\frac{۳}{۴}\sin^۲ ۱۰x\le ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۴}\le y\le ۱$$

$$۵)\ y=\begin{cases} -۵ & ,(x\le ۳) \\ ۵ & ,(x>۳) \end{cases} \Rightarrow \text{برد}=\{-۵,۵\}$$

$$۶)\ y=\frac{x^۵+x}{x^۴+۱}+\frac{x^۲-x}{x-x^۲}+۱$$

$y=x-۱+۱ \Rightarrow y=x \quad ,(x\ne ۰$ و $۱)$

برد $= R - \{۰,۱\}$

۷) $y = \sqrt[۱۰]{-|x+۵|} \Rightarrow -|x+۵| = ۰ \Rightarrow x = -۵ \Rightarrow D_f = \{-۵\}$

$y = \sqrt[۱۰]{۰} = ۰ \Rightarrow$ برد $= \{۰\}$

۸) $y = k + (ax+b)^{۲n}$, $(n \in N) \Rightarrow$ برد $= [k, +\infty)$

۹) $y = \text{Arcsin}\,\frac{۱}{۱+x^۲}$

$۰ < \frac{۱}{۱+x^۲} \le ۱ \Rightarrow ۰ < \text{Arcsin}\frac{۱}{۱+x^۲} \le \frac{\pi}{۲} \Rightarrow R_f = (۰, \frac{\pi}{۲}]$

۱۰) $y = \frac{۲x^{۱۰}+۴}{\sqrt{x^{۱۰}+۱}} \Rightarrow y = \frac{۲(x^{۱۰}+۱)+۲}{\sqrt{x^{۱۰}+۱}} = ۲(\sqrt{x^{۱۰}+۱} + \frac{۱}{\sqrt{x^{۱۰}+۱}}) \ge ۲\times۲ = ۴$

$\Rightarrow$ برد $= [۴, +\infty)$ **یادآوری:** $a > ۰ \Rightarrow a + \frac{۱}{a} \ge ۲$

۱۱) $y = \lfloor \tan x + \cot x \rfloor$

$a\tan x + b\cot x \le -۲\sqrt{ab}$ یا $a\tan x + b\cot x \ge ۲\sqrt{ab}$

$\tan x + \cot x \le -۲$ یا $\tan x + \cot x \ge ۲ \Rightarrow$

$\lfloor \tan x + \cot x \rfloor \le -۲$ یا $\lfloor \tan x + \cot x \rfloor \ge ۲ \Rightarrow y \in z$ و $y \le -۲$ یا $y \ge ۲$

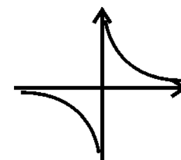
$\Rightarrow y \in z - \{-۱,۰,۱\} \Rightarrow$ برد $= z - \{-۱,۰,۱\}$

۱۲) $f(x) = (-۱)^{\lfloor x-۵ \rfloor + \lfloor ۵-x \rfloor}$

$f(x) = (-۱)^{\lfloor -x \rfloor + \lfloor x \rfloor} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (-۱)^۰ = ۱ & ,(x \in z) \\ (-۱)^{-۱} = -۱ & ,(x \notin z) \end{cases} \Rightarrow R_f = \{-۱, ۱\}$

۱۳) $۴f(x) + ۳f(-x) = \frac{۱}{x}$ $R_f = ?$

فرد $\frac{۱}{x} \Rightarrow$ فرد $f \Rightarrow ۴f(x) - ۳f(x) = \frac{۱}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{۱}{x} \Rightarrow$



$\Rightarrow R_f = R - \{۰\}$

۱۴) $f(x) = (x^{۱۰}+۱)^{-۱} + x^{۱۰} \Rightarrow f(x) = \frac{۱}{x^{۱۰}+۱} + x^{۱۰} + ۱ - ۱ \ge ۲ - ۱ \ge ۱ \Rightarrow$ برد $= [۱, +\infty)$

۱۵) $f = \{(۴,۳), (۵,۷), (۳,۸)\}$, $g = \{(۳,۵), (۴,۶), (۶,۳)\} \Rightarrow (f+۱).(g-۱)$ برد $= ?$

$f + ۱ = \{(۴,۴), (۵,۸), (۳,۹)\}$, $g - ۱ = \{(۳,۴), (۴,۵), (۶,۲)\}$

$(f+۱).(g-۱) = \{(۴,۲۰), (۳,۳۶)\} \Rightarrow R_{(f+۱).(g-۱)} = \{۲۰, ۳۶\}$

۱۶) $y = \left\lfloor \frac{(x+۱)^۲}{x^۲+۱} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x^۲+۱+۲x}{x^۲+۱} \right\rfloor = ۱ + \left\lfloor \frac{۲x}{x^۲+۱} \right\rfloor$

$-۱ \le \frac{۲x}{x^۲+۱} \le ۱ \Rightarrow \left\lfloor \frac{۲x}{x^۲+۱} \right\rfloor = -۱$ یا ۰ یا $۱ \Rightarrow y = ۱ + (-۱$ یا ۰ یا $۱) = ۰$ یا ۱ یا $۲ \Rightarrow R_f = \{۰,۱,۲\}$

۱۷) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor \Rightarrow R_{fof} = ?$

$(fof)(x) = f(f(x)) = x - \lfloor x \rfloor - \lfloor x - \lfloor x \rfloor \rfloor = x - \lfloor x \rfloor - ۰ = x - \lfloor x \rfloor \Rightarrow R_{fof} = [۰, ۱)$

۱۸) $f(x) = \begin{cases} ۲ & ,(x > ۲) \rightarrow \text{برد} = \{۲\} \\ x & ,(-۲ < x < ۲) \rightarrow \text{برد} = (-۲,۲) \\ -۲ & ,(x < -۲) \rightarrow \text{برد} = \{-۲\} \end{cases}$ اجتماع $\Rightarrow R_f = [-۲, ۲]$

۱۹) $y = \sqrt{۴ - x^۲} \Rightarrow D_f = [-۲, ۲] \Rightarrow R_f = [۰, ۲]$

۲۰) $y = x^۴ + (۱ - x^۲)^۲ = ۲x^۴ - ۲x^۲ + ۱ = ۲(x^۴ - x^۲) + ۱$

$y = ۲\left[(x^۲ - \frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴}\right] + ۱ = ۲(x^۲ - \frac{۱}{۲})^۲ + \frac{۱}{۲} \Rightarrow y \geq \frac{۱}{۲} \Rightarrow R_f = [\frac{۱}{۲}, +\infty)$

۲۱) $y = \sqrt{x - ۲} + \sqrt{x - ۵}$

$D_f = [۵, +\infty), y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x - ۲}} + \frac{۱}{۲\sqrt{x - ۵}} > ۰ \Rightarrow$ تابع اکیداً صعودی است.

برد $= [f(a), f(b)] = [f(۵), f(+\infty)) = [\sqrt{۳}, +\infty)$

۲۲) $x^۲ - ۲x + ۴ - y = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱ \pm \sqrt{۱ - (۴ - y)}}{۱} = ۱ \pm \sqrt{y - ۳}$

$y - ۳ \geq ۰ \Rightarrow R_f = [۳, +\infty)$

راه دوم: $y = x^۲ - ۲x + ۴ \Rightarrow y = (x - ۱)^۲ + ۳ \Rightarrow R_f = [۳, +\infty)$

۲۳) $y = x^۳ + x^۲ - ۷x + ۱ \Rightarrow D_f = R \Rightarrow R_f = R$

۲۴) $y = \sqrt{x - |x|} \Rightarrow x - |x| \geq ۰ \Rightarrow |x| \leq x \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x \geq ۰$

$\Rightarrow D_f = [۰, +\infty) \Rightarrow x \geq ۰ \Rightarrow y = \sqrt{x - x} = \sqrt{۰} = ۰ \Rightarrow R_f = \{۰\}$

۲۵) $y = \frac{۱ - ۳x}{x - ۲} \Rightarrow y = \frac{-۳x + ۱}{x - ۲} \Rightarrow$ برد $= R - \{$مجانب افقی$\} = y - \{-۳\}$

۲۶) $y = x + \sqrt{۴ - x^۲}$

$\sqrt{۴ - x^۲} \geq ۰ \Rightarrow y \geq x, D_f = [-۲, ۲] \Rightarrow \begin{cases} x \geq -۲ \\ y \geq x \end{cases} \Rightarrow y \geq -۲ \quad (۱)$

$y - x = \sqrt{۴ - x^۲} \Rightarrow (y - x)^۲ = ۴ - x^۲ \Rightarrow ۲x^۲ - ۲yx + (y^۲ - ۴) = ۰$

$x = \frac{y \pm \sqrt{y^۲ - ۲y^۲ + ۸}}{۲} \Rightarrow x = \frac{y \pm \sqrt{۸ - y^۲}}{۲} \Rightarrow ۸ - y^۲ \geq ۰$

$-۲\sqrt{۲} \leq y \leq ۲\sqrt{۲} \quad (۲) \qquad (۱),(۲) \Rightarrow R_f = [-۲, ۲\sqrt{۲}]$

۲۷) $y = \lfloor x^۲ - x \rfloor$

$y = \left\lfloor (x - \frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴} \right\rfloor \Rightarrow (x - \frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴} \geq -\frac{۱}{۴} \Rightarrow \left\lfloor (x - \frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۱}{۴} \right\rfloor \geq \left\lfloor -\frac{۱}{۴} \right\rfloor = -۱$

$y \in z , y \geq -۱ \Rightarrow R_f = \{y \in z : y \geq -۱\}$

۲۸) $y = \sqrt{\log \cos x} \Rightarrow \begin{cases} \cos x > ۰ \\ \log \cos x \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \cos x \geq ۱ \Rightarrow \cos x = ۱ \Rightarrow y = \sqrt{\log ۱} = ۰ \Rightarrow R_f = \{۰\}$

۲۹) $y = \dfrac{x}{\lfloor ۱-x \rfloor + \lfloor x-۱ \rfloor} \Rightarrow y = \dfrac{x}{\lfloor -x \rfloor + \lfloor x \rfloor} = \begin{cases} \dfrac{x}{۰} = \text{تعریف نشده} & ,(x \in z) \\ \dfrac{x}{-۱} = -x & ,(x \notin z) \end{cases}$

$\Rightarrow D_f = R - Z \Rightarrow y = -x \Rightarrow R_f = R - Z$

۳۰) $y = ۱ - \sqrt{-x^۲ + ۴x} \Rightarrow y = ۱ - \sqrt{۴ - (x-۲)^۲} \quad , A = ۴ - (x-۲)^۲$

$D_f = [۰, ۴] \Rightarrow \begin{matrix} Min(A) = f(۰) = ۰ \\ Max(A) = f(۲) = ۴ \end{matrix} \Rightarrow ۰ \leq A \leq ۴ \Rightarrow ۰ \leq \sqrt{A} \leq ۲$

$-۲ \leq -\sqrt{A} \leq ۰ \Rightarrow -۱ \leq ۱ - \sqrt{A} \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq y \leq ۱ \Rightarrow R_f = [-۱, ۱]$

۳۱) $f(x) = \dfrac{x+۲}{x-۲} \Rightarrow R_{fof} = ?$

$D_f = R - \{۲\} , R_f = R - \{۱\}$

$(fof)(x) = \dfrac{۳x - ۲}{-x + ۶} \Rightarrow D_{fof} = R - \{۲, ۶\}, R_{fof} = R - \{۱, -۳\}$

۳۲) $f(x) = ۲x - \sqrt{x} + ۱ \Rightarrow y = (\sqrt{۲x} - \dfrac{۱}{۲\sqrt{۲}})^۲ + \dfrac{۷}{۸} \Rightarrow y \geq \dfrac{۷}{۸} \Rightarrow R_f = [\dfrac{۷}{۸}, +\infty)$

۳۳) $y = x - \sqrt{x} \Rightarrow y = (\sqrt{x} - \dfrac{۱}{۲})^۲ - \dfrac{۱}{۴} \Rightarrow y \geq -\dfrac{۱}{۴} \Rightarrow R_f = [-\dfrac{۱}{۴}, +\infty)$

۳۴) $y = \cos^۲ x - \cos x \Rightarrow y = (\cos x - \dfrac{۱}{۲})^۲ - \dfrac{۱}{۴}$

$-۱ \leq \cos x \leq ۱ \Rightarrow -\dfrac{۳}{۲} \leq \cos x - \dfrac{۱}{۲} \leq \dfrac{۱}{۲} \Rightarrow ۰ \leq (\cos x - \dfrac{۱}{۲})^۲ \leq \dfrac{۹}{۴}$

$-\dfrac{۱}{۴} \leq (\cos x - \dfrac{۱}{۲})^۲ - \dfrac{۱}{۴} \leq ۲ \Rightarrow -\dfrac{۱}{۴} \leq y \leq ۲ \Rightarrow R_f = [-\dfrac{۱}{۴}, ۲]$

۳۵) $y = \dfrac{۱}{\sqrt{x^۲ + ۹}} \Rightarrow y > ۰ \qquad (۱)$

$x^۲ + ۹ \geq ۹ \Rightarrow \sqrt{x^۲ + ۹} \geq ۳ \Rightarrow \dfrac{۱}{\sqrt{x^۲ + ۹}} \leq \dfrac{۱}{۳} \Rightarrow y \leq \dfrac{۱}{۳} \qquad (۲)$

(۱) و (۲) $\Rightarrow R_f = (۰, \dfrac{۱}{۳}]$

۳۶) $y = \sqrt{۱ - \sqrt{x-۱}} \Rightarrow D_f = [۱, ۲]$

$۱ \leq x \leq ۲ \Rightarrow ۰ \leq x - ۱ \leq ۱ \Rightarrow ۰ \leq \sqrt{x-۱} \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq -\sqrt{x-۱} \leq ۰$

$۰ \leq ۱ - \sqrt{x-۱} \leq ۱ \Rightarrow ۰ \leq \sqrt{۱ - \sqrt{x-۱}} \leq ۱ \Rightarrow ۰ \leq y \leq ۱ \Rightarrow R_f = [۰, ۱]$

روش دوم: $D_f=[۱,۲], f'(x)=\dfrac{-\dfrac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}}{۲\sqrt{۱-\sqrt{x-۱}}}<۰ \Rightarrow$ اکیداً نزولی y $\Rightarrow R_f=[f(۲),f(۱)]=[۰,۱]$

۳۷) $y=\dfrac{|x|-۱}{|x|+۱}$

$|x|y+y=|x|-۱$

$(y-۱)|x|=-y-۱ \Rightarrow |x|=\dfrac{۱+y}{۱-y} \overset{|x|\geq ۰}{\Rightarrow} \dfrac{۱+y}{۱-y}\geq ۰$

y		−۱		۱	
$\frac{۱+y}{۱-y}$	−	۰	+	ت	−

$\Rightarrow ۱\leq y<۱ \Rightarrow R_f=[-۱,۱)$

$۳۸)\ y=\begin{cases} x^۲ & ,(x\neq ۱) \Rightarrow \text{برد}=[۰,+\infty) \\ ۹ & ,(x=۱) \Rightarrow \text{برد}=۹ \end{cases} \overset{\text{اجتماع}}{\Rightarrow} R_f=[۰,+\infty)$ توجه کنید که $f(-۱)=۱$

۳۹) $y=\text{Arcsin}(-\sqrt{x})$

$D_f=[۰,۱]\Rightarrow ۰\leq x\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq -\sqrt{x}\leq ۰ \Rightarrow -\dfrac{\pi}{۲}\leq \text{Arcsin}(-\sqrt{x})\leq ۰ \Rightarrow R_f=[-\dfrac{\pi}{۲},۰]$

۴۰) $y=\dfrac{۳}{x}-۳\left\lfloor\dfrac{x+۱}{x}\right\rfloor \Rightarrow y=\dfrac{۳}{x}-۳\left\lfloor ۱+\dfrac{۱}{x}\right\rfloor=\dfrac{۳}{x}-۳-۳\left\lfloor\dfrac{۱}{x}\right\rfloor \Rightarrow y=۳(\dfrac{۱}{x}-\left\lfloor\dfrac{۱}{x}\right\rfloor)-۳$

$۰\leq\dfrac{۱}{x}-\left\lfloor\dfrac{۱}{x}\right\rfloor<۱ \Rightarrow ۰\leq ۳(\dfrac{۱}{x}-\left\lfloor\dfrac{۱}{x}\right\rfloor)<۳ \Rightarrow -۳\leq ۳(\dfrac{۱}{x}-\left\lfloor\dfrac{۱}{x}\right\rfloor)-۳<۰ \Rightarrow -۳\leq y<۰ \Rightarrow R_f=[-۳,۰)$

۴۱) $y=x-\sqrt{(\lfloor x\rfloor-x)^۲} \Rightarrow y=x-|\lfloor x\rfloor-x|=x+\lfloor x\rfloor-x=\lfloor x\rfloor \Rightarrow y=\lfloor x\rfloor \Rightarrow R_f=Z$

نکته: $\lfloor x\rfloor\leq x \Rightarrow \lfloor x\rfloor-x\leq ۰ \Rightarrow |\lfloor x\rfloor-x|=-(\lfloor x\rfloor-x)$

۴۲) $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵)\}\quad R_{fof^{-۱}}, R_{f^{-۱}of}$

$f^{-۱}=\{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۳),(۵,۴)\}$

$fof^{-۱}=\{(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵)\} \Rightarrow R_{fof^{-۱}}=\{۲,۳,۴,۵\}$

$f^{-۱}of=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴)\} \Rightarrow R_{f^{-۱}of}=\{۱,۲,۳,۴\}$

۴۳) $f=\{(۲,۵),(۱,۶),(۹,۴)\}$

$g=\{(۲,۱۰),(۹,۰),(۱,۸),(۷,۱۱)\}, R_{f+g}=?\ R_{\frac{f}{g}}=?$

$f+g=\{(۲,۱۵),(۱,۱۴),(۹,۴)\} \Rightarrow R_{f+g}=\{۱۵,۱۴,۴\}$

$\dfrac{f}{g}=\{(۲,\dfrac{۵}{۱۰}),(۱,\dfrac{۶}{۸}),(۹,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{تعریف نشده}}}{\dfrac{۴}{۰}})\}=\{(۲,\dfrac{۱}{۲}),(۱,\dfrac{۳}{۴})\}\Rightarrow R_{\frac{f}{g}}=\{\dfrac{۱}{۲},\dfrac{۳}{۴}\}$

۴۴) $y = \left\lfloor \frac{x^۲+۱}{x^۲+۲} \right\rfloor \Rightarrow ۰ \le \frac{x^۲+۱}{x^۲+۲} < ۱ \Rightarrow \left\lfloor \frac{x^۲+۱}{x^۲+۲} \right\rfloor = ۰ \Rightarrow R_f = \{۰\}$

۴۵) $y = \sqrt{-x^۲-۱۰} \Rightarrow D_f = \phi \Rightarrow R_f = \phi$

۴۶) $(x-۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۹ \Rightarrow (x-۱)^۲ = ۹-(y-۲)^۲ \overset{(x-۱)^۲ \ge ۰}{\Rightarrow} ۹-(y-۲)^۲ \ge ۰$

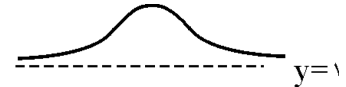
$-۳ \le y-۲ \le ۳ \Rightarrow -۱ \le y \le ۵ \Rightarrow R_f = [-۱, ۵]$

۴۷) $y = \cos x + \sqrt{-\sin^۲ x} \Rightarrow -\sin^۲ x = ۰ \Rightarrow \sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi$

$\Rightarrow D_f = k\pi \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow y = \cos k\pi + \sqrt{۰} = \pm ۱ \Rightarrow R_f = \{-۱, ۱\}$

۴۸) $y = \frac{x^۲-۲x+۷}{x^۲-۲x+۳}$ صورت مشتق $y' = -۸x + ۸ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = \frac{۶}{۲} = ۳$

$\Rightarrow R_f = (۱,۳]$



۴۹) $f = \{(۱,۲), (۲,۳), (۳,۴)\}, g = \{(۱,۳), (۳,۵), (۵,۲)\}$

$\frac{f}{۱+۲g} = \{(۱,\frac{۲}{۷}), (۳,\frac{۴}{۱۱})\} \Rightarrow$ برد تابع $\frac{f}{۱+۲g} = \{\frac{۲}{۷}, \frac{۴}{۱۱}\}$

۵۰) اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و x می‌باشند، هرگاه محیط مثلث را y فرض کنیم، حدود تغییرات y را بیابید؟

محیط $= y = x + ۶ + ۴ \Rightarrow y = x + ۱۰$

$۶ - ۴ < x < ۶ + ۴ \Rightarrow ۲ < x < ۱۰ \Rightarrow ۱۲ < x + ۱۰ < ۲۰ \Rightarrow ۱۲ < y < ۲۰$

همه در فکر آنند که بشریت را اصلاح کنند، ولی هیچکس در فکر آن نیست که خود را اصلاح کند.

«تولستوی»

هنگامیکه همه یکسان فکر می‌کنند، دیگر کسی بیشتر نمی‌اندیشد. «والترلیچین»

تست ۱:

۱ـ برد تابع $y = |3x - 1| + |x + 1| + |x - 2| + |x + 3|$ کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $[\frac{19}{3},+\infty)$ ۳) $[2,+\infty)$ ۴) $[3,+\infty)$

۲ـ برد تابع $y = \sqrt{|x - 3| + |x + 13|}$ کدام است؟

۱) $y \geq 0$ ۲) $y \geq 16$ ۳) $y \geq \sqrt{10}$ ۴) $y \geq 4$

۳ـ برد تابع $y = x - \frac{1}{5}\lfloor 5x \rfloor + 2$، کدام است؟

۱) $[0,2)$ ۲) $[1,3)$ ۳) $[2,\frac{11}{5})$ ۴) $[\frac{1}{5},\frac{9}{5})$

۴ـ برد تابع $y = \lfloor x+4 \rfloor + \lfloor 3-x \rfloor + 1$، کدام است؟

۱) $\{8,9\}$ ۲) $[7,8)$ ۳) $[8,9)$ ۴) $\{7,8\}$

۵ـ حدود تغییرات y از رابطه‌ی $y = 2x^3 - \lfloor x^3 + \lfloor x^3 \rfloor \rfloor$ کدام است؟

۱) $0 \leq y < 2$ ۲) $5 \leq y < 6$ ۳) $2 \leq y < 3$ ۴) $0 \leq y < 1$

۶ـ برد تابع $y = \sqrt{\lfloor x \rfloor - \lfloor x^2 \rfloor}$ کدام است؟

۱) $[0,1)$ ۲) $\{0\}$ ۳) $\{0,1\}$ ۴) $[-1,0)$

۷ـ هرگاه $f(x) = \sqrt{x - 2}$ باشد، آنگاه برد تابع $g(x) = 2 + 3f(x + 1)$، کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $[5,+\infty)$ ۳) $[2,5]$ ۴) $[2,+\infty)$

۸ـ برد تابع $y = \mathrm{Arccos}\frac{2x}{1+x^2}$ کدام است؟

۱) $[0,\frac{\pi}{2}]$ ۲) $[\frac{\pi}{2},\pi]$ ۳) $[0,\pi]$ ۴) $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

۹ـ برد رابطه‌ی ضمنی $y^2 - 2xy + 2x^2 - 2 = 0$، کدام است؟

۱) $0 \leq y \leq 2$ ۲) $0 \leq y \leq \sqrt{2}$ ۳) $-2 \leq y \leq 2$ ۴) $-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$

۱۰ـ برد تابع $y = \frac{2}{x^2 + x}$، کدام است؟

۱) $[0,2)$ ۲) $(-\infty,-8]$ ۳) $(0,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-8] \cup (0,+\infty)$

۱ـ (۲)

$$\begin{cases} f(\frac{۱}{۳}) = \frac{۱۹}{۳} \\ f(-۱) = ۹ \\ f(۲) = ۱۳ \\ f(-۳) = ۱۷ \end{cases} \Rightarrow \quad \text{برد} = [\frac{۱۹}{۳}, +\infty)$$

۲ـ (۴)

$$y \geq \sqrt{|۳-(-۱۳)|} \Rightarrow y \geq ۴$$

۳ـ (۳)

$$۵y = ۵x - \lfloor ۵x \rfloor + ۱۰$$

$$۰ \leq ۵x - \lfloor ۵x \rfloor < ۱ \Rightarrow ۱۰ \leq ۵x - \lfloor ۵x \rfloor + ۱۰ < ۱۱ \Rightarrow ۱۰ \leq ۵y < ۱۱ \Rightarrow ۲ \leq y < \frac{۱۱}{۵}$$

۴ـ (۴)

$$y = \lfloor x \rfloor + ۴ + ۳ + \lfloor -x \rfloor + ۱ \Rightarrow y = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor + ۸ = (۰ \text{ یا } -۱) + ۸ = ۷ \text{ یا } ۸$$

۵ـ (۱)

$$y = ۲x^۳ - ۲\lfloor x^۳ \rfloor = ۲(x^۳ - \lfloor x^۳ \rfloor)$$

$$۰ \leq x^۳ - \lfloor x^۳ \rfloor < ۱ \Rightarrow ۰ \leq ۲(x^۳ - \lfloor x^۳ \rfloor) < ۲ \Rightarrow ۰ \leq y < ۲$$

۶ـ (۲)

$$D_f = [۰, \sqrt{۲}) \Rightarrow x \in [۰, \sqrt{۲})$$

$$x \in [۰, \sqrt{۲}) \Rightarrow \begin{cases} ۰ \leq x < ۱ \Rightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor x^۲ \rfloor = ۰ \Rightarrow y = \sqrt{۰ - ۰} = ۰ \\ ۱ \leq x < \sqrt{۲} \Rightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor x^۲ \rfloor = ۱ \Rightarrow y = \sqrt{۱ - ۱} = ۰ \end{cases} \Rightarrow \text{برد} = \{۰\}$$

۷ـ (۴)

$$g(x) = ۲ + ۳\sqrt{x - ۱} \geq ۲ \Rightarrow \text{برد} = [۲, +\infty)$$

۸ـ (۳)

$$\text{نکته} \Rightarrow \begin{cases} a^۲ + b^۲ \geq ۲ab \Rightarrow ۱ + x^۲ \geq ۲x \Rightarrow \frac{۲x}{۱ + x^۲} \leq ۱ \\ -(a^۲ + b^۲) \leq ۲ab \Rightarrow -(۱ + x^۲) \leq ۲x \Rightarrow \frac{۲x}{۱ + x^۲} \geq -۱ \end{cases} \Rightarrow -۱ \leq \frac{۲x}{۱ + x^۲} \leq ۱ \Rightarrow R_f = [۰, \pi]$$

۹ـ (۳)

$$۲x^۲ - ۲yx + y^۲ - ۲ = ۰ \Rightarrow \Delta \geq ۰ \Rightarrow ۴y^۲ - ۸(y^۲ - ۲) \geq ۰$$

$$\Rightarrow -۴y^۲ + ۱۶ \geq ۰ \Rightarrow y^۲ \leq ۴ \Rightarrow -۲ \leq y \leq ۲$$

۱۰ـ (۴)

$$yx^۲ + yx - ۲ = ۰$$

$$\Delta \geq ۰ \Rightarrow y^۲ + ۸y \geq ۰ \Rightarrow y \leq -۸ \text{ یا } y \geq ۰$$

ولی اگر $y = ۰$ را قرار دهیم، مقداری برای x، به دست نمی‌آید (زیرا کسری صفر است که صورتش صفر باشد) پس $y = ۰$ را از حدود y حذف می‌کنیم.

$$R_f = (-\infty, -۸] \cup (۰, +\infty)$$

هر که در حال توانائی، نکوئی نکند در وقت ناتوانی سختی بینند. «سعدی»

تست ۲:

۱ـ برد تابع $y = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos x$ کدام است؟

۱) $[-1,1]$ ۲) $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ ۳) $[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$ ۴) $[-\frac{1}{8},\frac{1}{8}]$

۲ـ برد تابع $y = \begin{cases} x^2 - 1 & ,(0 \le x < 1) \\ \frac{1}{x^2} & ,(1 \le x < 2) \end{cases}$ کدام است؟

۱) $[\frac{1}{4},1]$ ۲) $(-1,0) \cup [\frac{1}{4},1]$ ۳) $[-1,0) \cup (\frac{1}{4},1]$ ۴) $[-1,0] \cup [\frac{1}{4},1]$

۳ـ برد تابع $f(x) = \lfloor \sqrt{1-x^2} \rfloor$، کدام است؟

۱) $\{0,1\}$ ۲) $\{0\}$ ۳) $\{-1,1\}$ ۴) $\{0,-1,1\}$

۴ـ برد تابع $f(x) = \frac{1}{|x-1|+|x-3|}$، کدام است؟

۱) $[0,\frac{1}{2}]$ ۲) $(0,\frac{1}{2}]$ ۳) $[0,\frac{1}{2})$ ۴) $(0,\frac{1}{2})$

۵ـ برد تابع $f(x) = \frac{1}{2}\text{Arctan}(\frac{x^2}{2})$، کدام است؟

۱) $[0,\frac{\pi}{2})$ ۲) $[0,\frac{\pi}{4})$ ۳) $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ۴) $(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$

۶ـ درصورتی که برد تابع f فاصله‌ی $(-\infty,-1)$ بوده و تابع g روی $(-\infty,-1)$ به وسیله‌ی ضابطه‌ی $g(x)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}$ تعریف شده باشد، آنگاه برد g کدام است؟

۱) $(-\infty,1]$ ۲) $(-\infty,1)$ ۳) $(1,+\infty)$ ۴) $[1,+\infty)$

۷ـ برد تابع $f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor & ,(x \in z) \\ x - \lfloor x \rfloor & ,(x \notin z) \end{cases}$، کدام است؟

۱) $(0,1)$ ۲) $(0,1]$ ۳) $[1,2)$ ۴) $[0,1)$

۸ـ برد تابع $f(x) = \frac{|1-x^2|}{|x+1|}$، کدام است؟

۱) $R^+ - \{2\}$ ۲) $R^+ - \{-1\}$ ۳) $[0,+\infty)$ ۴) $[0,2) \cup (2,+\infty)$

۹ـ هرگاه $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$، برد تابع fog کدام مجموعه است؟

۱) $\{y | \ y \ge 0\}$ ۲) $\{y | \ y \ge 1\}$ ۳) $\{y | \ y \ge -1\}$ ۴) مجموعه‌ی اعداد حقیقی

۱۰ـ برد تابع $f: R \to R$ با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 \text{sign}(x)$ کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$ ۲) $\{-1,0,1\}$ ۳) $\{0,1\}$ ۴) $(-\infty,+\infty)$

۱ـ (۳) $y=\frac{۱}{۲}\sin x\cos x=\frac{۱}{۴}\sin ۲x \to -۱\le \sin ۲x\le ۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۴}\le y\le \frac{۱}{۴}$

۲ـ (۳)

$$۰\le x<۱ \Rightarrow ۰\le x^۲<۱ \Rightarrow -۱\le x^۲-۱<۰ \Rightarrow -۱\le y<۰$$

$$۱\le x<۲\Rightarrow ۱\le x^۲<۴ \Rightarrow \frac{۱}{۴}<\frac{۱}{x^۲}\le ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۴}<y\le ۱$$

$$\overset{\cup}{\Rightarrow} R_f=[-۱,۰)\cup(\frac{۱}{۴},۱]$$

۳ـ (۱) $y=\sqrt{۱-x^۲} \Rightarrow \text{برد}=[۰,۱] \Rightarrow ۰\le\sqrt{۱-x^۲}\le ۱ \Rightarrow \lfloor\sqrt{۱-x^۲}\rfloor = ۰$ یا $۱ \Rightarrow R_f=\{۰,۱\}$

۴ـ (۲) $|x-۱|+|x-۳|\ge ۲ \Rightarrow ۰<\frac{۱}{|x-۱|+|x-۳|}\le\frac{۱}{۲} \Rightarrow R_f=(۰,\frac{۱}{۲}]$

۵ـ (۲) $\frac{x^۲}{۲}\ge ۰ \Rightarrow ۰\le \text{Arctan}\frac{x^۲}{۲}<\frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۰\le\frac{۱}{۲}\text{Arctan}\frac{x^۲}{۲}<\frac{\pi}{۴}\Rightarrow R_f=[۰,\frac{\pi}{۴})$

۶ـ (۳)

$$g(x)=\frac{f(x)-۱}{f(x)+۱}=\frac{f(x)+۱-۲}{f(x)+۱}=۱-\frac{۲}{f(x)+۱}$$

$$f(x)<-۱ \Rightarrow f(x)+۱<۰ \Rightarrow \frac{۲}{f(x)+۱}<۰ \Rightarrow \frac{-۲}{f(x)+۱}>۰$$

$$\Rightarrow ۱-\frac{۲}{f(x)+۱}>۱ \Rightarrow g(x)>۱ \Rightarrow R_g=(۱,+\infty)$$

راه حل دوم:

$$g(x)=\frac{f(x)-۱}{f(x)+۱} \Rightarrow f(x)g(x)+g(x)=f(x)-۱$$

$$f(x)(۱-g(x))=۱+g(x) \Rightarrow f(x)=\frac{۱+g(x)}{۱-g(x)}<-۱$$

$$\frac{۱+g(x)}{۱-g(x)}+۱<۰ \Rightarrow \frac{۲}{۱-g(x)}<۰ \Rightarrow ۱-g(x)<۰ \Rightarrow g(x)>۱$$

۷ـ (۴)

$$\left\{\begin{array}{l} x\in z \Rightarrow \lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=۰ \Rightarrow \text{برد}=\{۰\} \\ x\notin z \Rightarrow ۰<x-\lfloor x\rfloor<۱ \Rightarrow \text{برد}=(۰,۱) \end{array}\right\} \overset{\cup}{\Rightarrow} R_f=[۰,۱)$$

۸ـ (۴)

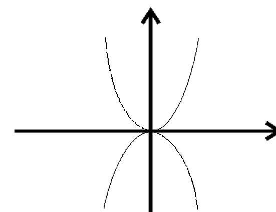
$$y=\frac{|x^۲-۱|}{|x+۱|}=\frac{|x-۱||x+۱|}{|x+۱|} \Rightarrow \begin{cases} |x-۱| & ,(x\ne -۱)\overset{\text{برد}}{\Rightarrow}=[۰,+\infty)-\{۲\} \\ \text{تعریف نشده} & ,(x=-۱)\Rightarrow \text{برد}=\{\ \} \end{cases}$$

$$\overset{\cup}{\Rightarrow} R_f=[۰,+\infty)-\{۲\}$$

۹ـ (۲) $(fog)(x)=(\sqrt{x-۱})^۲+۱\ge ۱ \Rightarrow \text{برد}=\{y: y\ge ۱\}$

۱۰ـ (۴)

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & ,(x>۰)\to \text{برد}=(۰,+\infty) \\ ۰ & ,(x=۰)\to \text{برد}=\{۰\} \\ -x^۲ & ,(x<۰)\to \text{برد}=(-\infty,۰) \end{cases} \overset{\cup}{\Rightarrow} R_f=R$$



از طریق شکل نیز بسادگی دیده می‌شود که برد تابع، R است.

تساوی دو تابع

دو تابع f و g را مساوی یکدیگر گویند هرگاه:

اولاً: دامنه‌هایشان با یکدیگر مساوی باشند. ($D_f = D_g$)

ثانیاً: به ازاء هر x متعلق به دامنه‌ی مشترک داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

تست: هرگاه دو تابع $f = \{(۲,۳) , (۱,a) , (b+۱,۴)\}$ و $g = \{(۲,c) , (۱,-۱) , (۵,۴)\}$ با یکدیگر مساوی باشند $a+b-c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۰

$$\begin{cases} c = ۳ \\ a = -۱ \\ b+۱ = ۵ \end{cases} \Rightarrow a+b-c = -۱+۴-۳ = ۰$$

مثال: کدام دسته از توابع زیر با یکدیگر برابرند؟

۱) $\begin{cases} f(x) = x-۲ \\ g(x) = \dfrac{x^۲-۴}{x+۲} \end{cases} \quad \begin{cases} D_f = R \\ D_g = R-\{-۲\} \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g \quad \Rightarrow f \neq g$

۲) $\begin{cases} f(x) = x-۱ \\ g(x) = (\sqrt{x-۱})^۲ \end{cases} \quad \begin{cases} D_f = R \\ D_g = [۱,+\infty) \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g \quad \Rightarrow f \neq g$

۳) $\begin{cases} f(x) = x \\ g(x) = \dfrac{۱}{\frac{۱}{x}} \end{cases} \quad \begin{cases} D_f = R \\ D_g = R-\{۰\} \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$

۴) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^۴-۱}{x^۲+۱} \\ g(x) = x^۲-۱ \end{cases} \quad \begin{cases} D_f = R \\ D_g = R \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g , f(x) = \dfrac{(x^۲-۱)(x^۲+۱)}{x^۲+۱} = x^۲-۱ \quad \Rightarrow f = g$

۵) $\begin{cases} f(x) = \log x^۲ \\ g(x) = ۲\log x \end{cases} \quad \begin{cases} D_f = R-\{۰\} \\ D_g = (۰,+\infty) \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$

۶) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-۱}\sqrt{x+۱} \\ g(x) = \sqrt{x^۲-۱} \end{cases} \quad \begin{cases} D_f = [۱,+\infty) \\ D_g = (-\infty,-۱] \cup [۱,+\infty) \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$

۷) $\begin{cases} f(x) = ۰ \\ g(x) = \left\lfloor \dfrac{x^۲+۱}{x^۲+۲} \right\rfloor \end{cases} \quad \begin{cases} D_f = R \\ D_g = R \quad , g(x) = ۰ \end{cases} \Rightarrow f = g$

نکته: $۰ < \dfrac{x^۲+۱}{x^۲+۲} < ۱$

۸) $\begin{cases} f = \{(۱,۲),(۳,۱۰),(۴,۱۵)\} \\ g = \{(۱,۱۰),(۳,۱۵),(۴,۲)\} \end{cases} \quad \begin{cases} D_f = \{۱,۳,۴\} \\ D_g = \{۱,۳,۴\} \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g$

چون $۲ = f(۱) \neq g(۱) = ۱۰$ لذا $f \neq g$

تست ۱:

۱ـ هرگاه $f(x) = x - ۴$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x^۲ - ۵x + ۴}{x - ۱} & ,(x \neq ۱) \\ a - ۲ & ,(x = ۱) \end{cases}$، به ازاء کدام مقدار a توابع f و g به ازاء هر x عضو R مساوی‌اند؟

۱) $a = -۱$ ۲) $a = -۵$ ۳) $a = ۱$ ۴) $a = ۵$

۲ـ کدام تابع زیر، مساوی تابع $y = x$ است؟

۱) $y = \sqrt{x^۲}$ ۲) $y = \frac{x^۲}{x}$

۳) $(a \neq ۱, a > ۰)\ y = \log_a^{a^x}$ ۴) $(a \neq ۱, a > ۰)\ y = a^{\log_a^x}$

۳ـ کدام یک از روابط زیر، معرّف یک تابع نیست؟

۱) $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y + ۲ = ۰$ ۲) $y^۳ + ۲y - x = ۰$

۳) $|x| + |y| = ۱$ ۴) $y^۳ - y = x$

۴ـ هرگاه رابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} ۳x + a & ,(x \geq ۱) \\ x - a & ,(x \leq ۱) \end{cases}$، معرف یک تابع باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $a = ۱$ ۲) $a = ۲$ ۳) $a = -۱$ ۴) $a = -۲$

۵ـ کدامیک از روابط زیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی یک تابع را تعریف نمی‌کند؟

۱) $xy^۲ = ۱$ ۲) $yx^۲ = ۱$ ۳) $y = \cos x$ ۴) $y = \text{Arcsin}x$

۶ـ کدامیک از روابط زیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی، معرف یک تابع است؟

۱) $x^۵ = y^۵$ ۲) $y^۴ = x$ ۳) $|x| = |y|$ ۴) $x = \sin y$

۷ـ کدام رابطه‌ی زیر، یک تابع نیست؟

۱) $\begin{cases} f: N \to N \\ f = \{(x, y) : x^۲ + y^۲ = ۱۶\} \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} f: Z \to Z \\ f = \{(x, y) | x^{۲۰۰} = y^{۲۰۰}\} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f: R \to R \\ f = \{(x, y) | x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = -۲\} \end{cases}$ ۴) $f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۱ & ,(x \geq ۱) \\ ۲x & ,(x \leq ۱) \end{cases}$

۸ـ کدام رابطه‌ی زیر، یک تابع نیست؟

۱) $f = \{(\sqrt{۲} - ۱, ۴), (۳, ۶), (\frac{۱}{\sqrt{۲} + ۱}, ۵)\}$ ۲) $g(x) = \begin{cases} ۲x + ۵ & ,(x \geq ۱) \\ \lfloor x + \frac{۱}{۲} \rfloor + ۶ & ,(x \leq ۱) \end{cases}$

۳) $h(x) = \begin{cases} x^۲ & ,(x \geq ۰) \\ -x^۲ & ,(x \leq ۰) \end{cases}$ ۴) $T(x) = \sqrt{۲۵ - x^۲}$

۹ـ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = |x - ۵|$، مساوی کدامیک از توابع زیر است؟

۱) $y = \left|\frac{x^۲ - ۲۵}{x + ۵}\right|$ ۲) $y = \left|\frac{(x - ۵)^۲}{x - ۵}\right|$ ۳) $y = \frac{|۳x - ۱۵|}{۳}$ ۴) $y = \left|\frac{x^۲ - ۷x + ۱۰}{x - ۲}\right|$

۱۰ـ کدام دسته از توابع زیر با یکدیگر مساویند؟

۱) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^۲ - ۹}{x + ۳} \\ g(x) = x - ۳ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^۳ - ۱}{x - ۱} & , x \in (۰, ۲) \\ g(x) = x^۲ + x + ۱ , x \in (۰, ۲) \end{cases}$

۳) $f(x) = \begin{cases} x + ۱ & , (x \neq ۱) \\ -۱ & , (x = ۱) \end{cases}$ ، $g(x) = \begin{cases} \frac{x^۲ - ۱}{x - ۱} & , (x \neq ۱) \\ ۰ & , (x = ۱) \end{cases}$

۴) $\begin{cases} f(x) = x|x| \\ g(x) = \begin{cases} x^۲ & , (x \geq ۰) \\ -x^۲ & , (x < ۰) \end{cases} \end{cases}$

آدمی آفرینندهٔ سرنوشت خویش است.	«زرتشت»

هرکس از روی افکارش شناخته می‌شود.	«آنتوان چخوف»

هر بدی که توانی به دشمن مرسان، باشد که روزی دوست شود.	«سعدی»

هر قدر عاقلتر باشیم تأسف‌مان به زندگی بیشتر خواهد بود.	«انجیل»

۱ـ (۱)
$$g(x)=\begin{cases}\frac{(x-۱)(x-۴)}{x-۱} & ,(x\neq ۱)\\ a-۲ & ,(x=۱)\end{cases} \Rightarrow g(x)=\begin{cases}x-۴ & ,(x\neq ۱)\\ a-۲ & ,(x=۱)\end{cases}$$

به ازاء $x \neq ۱$ دو تابع با یکدیگر برابرند لذا کافی است $f(۱) = g(۱)$ باشد بنابراین: $-۳ = a - ۲ \Rightarrow a = -۱$

۲ـ (۳) $y=\log_a^{a^x} \quad ,D_f=R \Rightarrow y=x\log_a^a=x$

۳ـ (۳) $x = ۰ \Rightarrow |y| = ۱ \Rightarrow y = \pm ۱$

۴ـ (۳)
$$\begin{cases}f(۱)=۳+a\\ f(۱)=۱-a\end{cases} \Rightarrow ۳+a=۱-a \Rightarrow a=-۱$$

۵ـ (۱) $xy^۲= ۱ \Rightarrow y^۲=\frac{۱}{x} \qquad x = ۱ \Rightarrow y = \pm ۱$

۶ـ (۱) $y^۵= x^۵ \Rightarrow y = x$

۷ـ (۲) $y^{۲۰۰} = x^{۲۰۰} \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y^{۲۰۰} = ۱ \Rightarrow y = \pm ۱$

۸ـ (۱) $\sqrt{۲}-۱=\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱} \Rightarrow (\sqrt{۲}-۱ \quad ,۴)\in f \quad ,(\sqrt{۲}-۱ \quad ,۵)\in f$

۹ـ (۳) دامنه‌ی f، R است، دامنه‌ی ۳ گزینه‌ی دیگر R نیست. $y=\frac{۳|x-۵|}{۳}=|x-۵|$

۱۰ـ (۴)
$$\begin{cases}D_f=R\\ D_g=R\end{cases} \quad ,f(x)=x\,|x|=\begin{cases}x^۲ & ,(x\geq ۰)\\ -x^۲ & ,(x<۰)\end{cases}$$

هرگز بردباری را از دست ندهید، زیرا آخرین کلیدی است که در بسته را می‌گشاد.

«پاسکال»

هرگز سعی نکنید عیوب خود را بگوئید چون دوستان این وظیفه را به خوبی انجام می‌دهند.

«اولیور هابز»

اعمال جبری روی توابع:

هرگاه f و g دو تابع به ترتیب با دامنه‌های D_f و D_g باشند، در این صورت توابع $f \pm g$، fg و $\frac{f}{g}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$(fg)(x) = f(x) . g(x)$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

دامنه‌ی توابع $f+g$ و $f-g$ و fg برابر است با، $D_f \cap D_g$ و دامنه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ برابر است با: $D_f \cap D_g - \{x \in D_g : g(x) = ۰\}$

یعنی به زبان ساده، دامنه‌ها (xها) اشتراک گرفته می‌شوند و ضابطه‌ها (yها) با یکدیگر جمع یا از یکدیگر کم و یا در هم ضرب و یا بر هم تقسیم می‌شوند.

مثال: بافرض:

$f = \{(۱,۲), (۰,-۱), (۲,۵), (۶,۷)\}$

$g = \{(۶,۰), (۱,\frac{۱}{۲}), (۰,۱), (۱۰,۹)\}$

مطلوبست توابع $f+g$، $۲f$، $۳g$، $۲f-۳g$، fg، $\frac{f}{g}$ و $\frac{۱}{f}$

۱) $f+g = \{(۱,\frac{۳}{۲}), (۰,۰), (۶,۷)\}$ در عضوهای مشترک دو دامنه عرضها با هم جمع می‌شوند.

مثلاً: $(f+g)(۰) = f(۰) + g(۰) = -۱ + ۱ = ۰$

۲) $۲f = f + f = \{(۱,۴), (۰,-۲), (۲,۱۰), (۶,۱۴)\}$ عرض نقاط f، دو برابر می‌شوند.

۳) $۳g = g + g + g = \{(۶,۰), (۱,\frac{۳}{۲}), (۰,۳), (۱۰,۲۷)\}$ عرض نقاط g، سه برابر می‌شوند.

۴) $۲f - ۳g = \{(۱,\frac{۵}{۲}), (۰,-۵), (۶,۱۴)\}$ در عضوهای مشترک دو دامنه، عرضها از هم کم می‌شوند.

۵) $fg = \{(۱,۱), (۰,-۱), (۶,۰)\}$ در عضوهای مشترک دو دامنه، عرضها درهم ضرب می‌شوند.

مثلاً: $(fg)(۱) = f(۱) \times g(۱) = ۲(\frac{۱}{۲}) = ۱$

۶) $\frac{f}{g} = \{(۱,۴), (۰,-۱)\}$

در عضوهای مشترک دو دامنه به جز آنهائی که عرضشان در g صفر است، عرضها را به هم تقسیم می‌کنیم.

۷) $\frac{۱}{f} = \{(۱,\frac{۱}{۲}), (۰,-۱), (۲,\frac{۱}{۵}), (۶,\frac{۱}{۷})\}$ عرض تمام نقاط f، معکوس می‌شوند.

(توجه داشته باشید که منظور از ۱ در $\frac{۱}{f}$ یعنی تابع ثابت $y = ۱$ با دامنه‌ی R)

مثال: هرگاه $f(x) = \begin{cases} ۳x & ,(x \le ۰) \\ x & ,(x > ۰) \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x & ,(x \le ۱) \\ ۳x & ,(x > ۱) \end{cases}$، ضابطه‌ی $y = (fg)(x)$ را بیابید؟

$$\begin{cases} x \le ۰ & \Rightarrow (fg)(x) = (۳x)(-x) = -۳x^۲ \\ ۰ < x \le ۱ & \Rightarrow (fg)(x) = (x)(-x) = -x^۲ \\ ۱ < x & \Rightarrow (fg)(x) = (x)(۳x) = ۳x^۲ \end{cases} \Rightarrow (fg)(x) = \begin{cases} -۳x^۲ & ,(x \le ۰) \\ -x^۲ & ,(۰ < x \le ۱) \\ ۳x^۲ & ,(۱ < x) \end{cases}$$

تست: هرگاه $f(x) = x^2 + 5x - 1$ و $g(x) = x^3 - 2x$، حاصل $(f+g)(2)$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

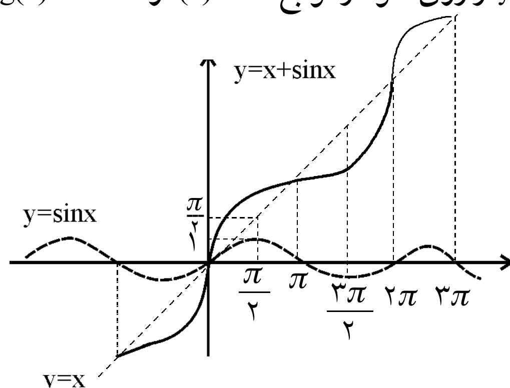
$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 13 + 4 = 17$

رسم نمودار تابع $f \pm g$ به کمک نمودار توابع f و g:

فرض می‌کنیم $y = f(x)$ و $y = g(x)$ دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، حال اگر نقطه‌ای به طول x_0 روی هر دو منحنی f و g باشد، آنگاه نقطه‌ی $\begin{vmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{vmatrix}$ روی نمودار f، نقطه‌ی $\begin{vmatrix} x_0 \\ g(x_0) \end{vmatrix}$ روی نمودار g و نقطه‌ی $\begin{vmatrix} x_0 \\ f(x_0)+g(x_0) \end{vmatrix}$ روی نمودار f+g خواهد بود، لذا برای رسم نمودار تابع f+g از روی نمودار توابع f و g، کافی است به ازاء هر نقطه روی دامنه‌ی مشترک ($D_{f+g} = D_f \cap D_g$)، عرضهای نقاط هم طول روی دو منحنی را با هم جمع کنیم.

در مورد $f - g$ نیز به همین صورت است.

مثال: مطلوبست رسم نمودار تابع $y = x + \sin x$ از روی نمودار توابع $f(x) = x$ و $g(x) = \sin x$



$f = \{(0,0), (\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), (\pi,\pi), (\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}), (2\pi,2\pi), ...\}$

$g = \{(0,0), (\frac{\pi}{2},1), (\pi,0), (\frac{3\pi}{2},-1), (2\pi,0), ...\}$

$f+g = \{(0,0+0), (\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+1), (\pi,\pi+0), (\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2}-1), (2\pi,2\pi+0), ...\}$

در واقع برای رسم نمودار تابع f+g، عرض نقاط نمودار تابع همانی $f(x) = x$ را به اندازه‌ی عرض نقاط متناظرشان در g، انتقال داده‌ایم.

تابع مرکب (ترکیب دو تابع)

سه مجموعه‌ی دلخواه A و B و C را در نظر می‌گیریم. هرگاه $f: A \to B$ و $g: B \to C$ دو تابع باشند، به طوریکه $R_f \cap D_g \neq \phi$، آنگاه تابعی از مجموعه A به مجموعه‌ی C به صورت زیر تعریف می‌شود که به آن تابع، تابع gof می‌گویند.

$(gof)(x) = g(f(x))$

دامنه‌ی این تابع عبارتست از: $D_{gof} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$

شرط وجود تابع gof، آنستکه $R_f \cap D_g \neq \phi$

به همین ترتیب تابع fog به صورت زیر تعریف می‌شود: $(fog)(x) = f(g(x))$

دامنه‌ی این تابع می‌شود: $D_{fog} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$

شرط وجود تابع fog آنستکه: $R_g \cap D_f \neq \phi$

تذکر مهم: بچه‌ها مواظب باشید، توابع fog و gof را با توابع fg یا $(f\times g)$ و gf یا $(g\times f)$ اشتباه نگیرید.

مثال: هرگاه $f = \{(۲,۵) , (۳,۶) , (۷,۱۱)\}$ **و** $g = \{(۶,۱۰) , (۵,-۱) , (۴,۳) , (۱۱,۲۰) , (۵,۰) , (۶,۱۴)\}$ **دو تابع باشند مطلوبست توابع gof و fof**

$D_{gof} = \{۲, ۳, ۷\} \Rightarrow gof = \{(۲,?) , (۳,?) , (۷,?)\}$

$(gof)(۲) = g(f(۲)) = g(۵) = -۱ \Rightarrow (۲,-۱)$

$(gof)(۳) = g(f(۳)) = g(۶) = ۱۰ \Rightarrow (۳,۱۰)$

$(gof)(۷) = g(f(۷)) = g(۱۱) = ۲۰ \Rightarrow (۷,۲۰)$

بنابراین: $gof = \{(۲,-۱) , (۳,۱۰) , (۷,۲۰)\}$

$D_{fof} = \{۲,۳\} \Rightarrow fof = \{(۲,?) , (۳,?)\}$

$(fof)(۲) = f(f(۲)) = f(۵) = ۰ \rightarrow (۲,۰)$

$(fof)(۳) = f(f(۳)) = f(۶) = ۱۴ \rightarrow (۳,۱۴)$

بنابراین: $fof = \{(۲,۰) , (۳,۱۴)\}$

مثال: هرگاه $f(x) = \sqrt{x-۱}$ **و** $g(x) = x^۲ + x - ۵$**، تابع gof و دامنه‌ی آن را بیابید؟**

$$y = (gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-۱}) = (\sqrt{x-۱})^۲ + \sqrt{x-۱} + ۵ \quad \Rightarrow D_{gof} = [۱, +\infty)$$

$$y = (gof)(x) = x + \sqrt{x-۱} + ۴$$

مثال: هرگاه $f(x) = \sqrt{x-۱}$ **و** $g(x) = \sqrt{۳-x}$**، ضابطه و دامنه‌ی تابع gof را حساب کنید؟**

$$y = (gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-۱}) = \sqrt{۳-\sqrt{x-۱}}$$

$$\begin{cases} x-۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱ \\ ۳-\sqrt{x-۱} \geq ۰ \Rightarrow ۳ \geq \sqrt{x-۱} \Rightarrow ۹ \geq x-۱ \Rightarrow x \leq ۱۰ \end{cases} \Rightarrow D_{gof} = [۱, ۱۰]$$

روش دیگر محاسبه‌ی دامنه‌ی gof (بدون استفاده از ضابطه‌اش):

$$\begin{cases} D_f = [۱, +\infty) \\ D_g = (-\infty, ۳] \end{cases}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\} = \{x \in [۱, +\infty) : \sqrt{x-۱} \in (-\infty, ۳]\}$$

$=\{x\ge ۱:\sqrt{x-۱}\le ۳\}=\{x\ge ۱:x-۱\le ۹\}\Rightarrow\{x\ge ۱:x\le ۱۰\}=[۱,۱۰]$

تست: هرگاه $g(x)=\cos^۲ x$ **و** $f(x)=\sqrt{x(۱-x)}$ **حاصل** $(fog)(\frac{\pi}{۳})$ **کدام است؟**

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

$(fog)(\frac{\pi}{۳})=f(g(\frac{\pi}{۳}))=f(\frac{۱}{۴})=\sqrt{\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۱) ترکیب توابع خاصیت جابجائی ندارد یعنی در حالت کلی $gof \neq fog$ (مگر اینکه $f=g$ باشد یا اینکه یکی از f و g تابع همانی باشد)

۲) ترکیب توابع خاصیت شرکتپذیری دارد. یعنی: $(fog)oh=fo(goh)$

۳) هرگاه توابع f و g اکیداً نزولی باشند، آنگاه توابع fog و gof، اکیداً صعودی خواهند بود.

۴) برای تابع همانی $I(x)=x$ همواره داریم: $(foI)(x)=(Iof)(x)=f(x)$

۵) هرگاه $f^{-۱}$ معکوس f باشد، آنگاه همواره داریم:

$$\begin{cases}(f^{-۱}of)(x)=x & ,(x\in D_f)\\ (fof)^{-۱}(x)=x & ,(x\in D_{f^{-۱}})\end{cases}$$

۶) در حالت کلی داریم: $f^{-۱}of \neq fof^{-۱}$

۷) در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$، اگر $a+d=۰$ باشد آنگاه $f=f^{-۱}$ و از آنجا داریم:

$$(\underbrace{fofofo\dots of}_{\text{زوج} = n \text{ مرتبه}})(x)=I(x) \qquad ,(\underbrace{fofofo\dots of}_{\text{فرد} = n \text{ مرتبه}})(x)=f(x)$$

نکاتی راجع به f(x)ها:

۱) هرگاه ضابطه‌ی تابع $y=f(x)$ معلوم باشد و بخواهیم ضابطه‌ی $f(g(x))$ را بیابیم، کافی است در ضابطه‌ی f، به جای x، $g(x)$ قرار دهیم.

مثال: هرگاه $f(x)=۱-x^۲$ **مطلوبست** $f(۱۰)$، $f(\cos x)$، $f(۲x+۱)$

$$\begin{cases}f(۱۰)=-۹۹\\ f(\cos x)=۱-\cos^۲x=\sin^۲x\\ f(۲x+۱)=۱-(۲x+۱)\end{cases}$$

۲) هرگاه ضابطه‌ی تابع $y=f(g(x))$ معلوم باشد و بخواهیم ضابطه‌ی $f(x)$ را بیابیم، $g(x)$ را برابر t فرض کرده، x را برحسب t حساب کرده و سپس جایگذاری می‌کنیم. در حالت خاص می‌توان از روشهای خاص و ابتکاری نیز استفاده کرد.

مثال: هرگاه $f(x+۳)=x^۲+۴$، $f(x)$ **را بیابید؟**

$x+۳=t\Rightarrow x=t-۳\Rightarrow f(t)=(t-۳)^۲+۴\Rightarrow f(x)=(x-۳)^۲+۴$

البته می‌توانستیم مستقیماً از تبدیل $x\to x-۳$ استفاده کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

$f(x-3+3)=(x-3)^2+4 \Rightarrow f(x)=(x-3)^2+4$

مثال: در هر حالت $f(x)$ را حساب کنید؟

۱) $f(x^{10})=\sqrt{x} \Rightarrow f(x^{10})=x^{\frac{1}{2}}=(x^{10})^{\frac{1}{20}}=\sqrt[20]{x^{10}} \Rightarrow f(x)=\sqrt[20]{x}$

۲) $f(x+\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2} \Rightarrow f(x)=(x+\frac{1}{x})^2-2 \Rightarrow f(x)=x^2-2$

۳) $f(x^2+\frac{1}{x^2})=x^6+\frac{1}{x^6} \Rightarrow f(x)=(x^2+\frac{1}{x^2})^3-3x^2.\frac{1}{x^2}(x^2+\frac{1}{x^2}) \Rightarrow f(x)=x^3-3x$

یادآوری: $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

۴) $f(\frac{x}{x^2+x+1})=\frac{x^2}{x^4+x^2+1} \Rightarrow f(\frac{1}{\frac{x^2+x+1}{x}})=\frac{1}{\frac{x^4+x^2+1}{x^2}} \Rightarrow f(\frac{1}{x+1+\frac{1}{x}})=\frac{1}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}$

$=\frac{1}{(x+\frac{1}{x}+1)(x+\frac{1}{x}-1)}=\frac{1}{(x+\frac{1}{x}+1)(x+\frac{1}{x}+1-2)} \Rightarrow f(\frac{1}{t})=\frac{1}{t(t-2)}$

$t \to \frac{1}{t} \Rightarrow f(t)=\frac{t^2}{1-2t} \Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{1-2x}$

۵) $f(\tan\frac{x}{2})=\cos x+\sin x \Rightarrow f(\tan\frac{x}{2})=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}+\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow f(x)=\frac{-x^2+2x+1}{1+x^2}$

۶) $f(\frac{y}{x})=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$, $(y<0) \Rightarrow f(\frac{y}{x})=-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}=-\sqrt{(\frac{x}{y})^2+1} \Rightarrow f(x)=-\sqrt{(\frac{1}{x})^2+1}$

$\Rightarrow f(x)=-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

۷) $f(\frac{x}{x^2+1})=\frac{x^2}{x^4+3x^2+1} \Rightarrow f(\frac{1}{\frac{x^2+1}{x}})=\frac{1}{\frac{x^4+3x^2+1}{x^2}} \Rightarrow f(\frac{1}{x+\frac{1}{x}})=\frac{1}{x^2+3+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{(x+\frac{1}{x})^2+1}$

$\Rightarrow f(\frac{1}{t})=\frac{1}{t^2+1} \Rightarrow f(t)=\frac{1}{\frac{1}{t^2}+1}=\frac{t^2}{1+t^2} \Rightarrow f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

۸) $f(x+\frac{1}{x})=x^2-\frac{1}{x^2}$, $(x>\frac{1}{x})$

یادآوری: $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ لذا: $(x+\frac{1}{x})^2-(x-\frac{1}{x})^2=4$

$(x-\frac{1}{x})^{۲} = u^{۲} - ۴ \Rightarrow (x-\frac{1}{x}) = \pm\sqrt{u^{۲}-۴} \overset{x>\frac{1}{x}}{\Rightarrow} x-\frac{1}{x} = \sqrt{u^{۲}-۴} \quad , (u = x+\frac{1}{x})$

$f(x+\frac{1}{x}) = (x+\frac{1}{x})(x-\frac{1}{x}) = u\sqrt{u^{۲}-۴} \Rightarrow f(x) = x\sqrt{x^{۲}-۴}$

۹) $f(x^{۳}+x) = x^{۶} + ۲x^{۴} + x^{۲} - ۱$

$f(x^{۳}+x) = (x^{۳}+x)^{۲} - ۱ \quad \Rightarrow f(x) = x^{۲} - ۱$

۱۰) $f(x^{۲} - \frac{۱}{x^{۲}}) = \frac{x^{۸}+۱}{x^{۴}}$

$f(x^{۲} - \frac{۱}{x^{۲}}) = x^{۴} + \frac{۱}{x^{۴}} = (x^{۲} - \frac{۱}{x^{۲}})^{۲} + ۲ \Rightarrow f(x) = x^{۲} + ۲$

۱۱) $f(\sin x + \cos x) = \sin ۲x$

$f(\sin x + \cos x) = ۲\sin x \cos x + ۱ - ۱ = (\sin x + \cos x)^{۲} - ۱ \Rightarrow f(x) = x^{۲} - ۱$

۱۲) $f(x+\frac{۱}{x}) = x^{۶} + \frac{۱}{x^{۶}}$

$f(x+\frac{۱}{x}) = (x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}})^{۳} - ۳(x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}) = \left[(x+\frac{۱}{x})^{۲} - ۲\right]^{۳} - ۳\left[(x+\frac{۱}{x})^{۲} - ۲\right]$

$f(x) = (x^{۲}-۲)^{۳} - ۳(x^{۲}-۲)$

۱۳) $f(x+\frac{۱}{x}) = x^{۴} + ۲x^{۲} + \frac{۲}{x^{۲}} + \frac{۱}{x^{۴}}$

$f(x+\frac{۱}{x}) = (x^{۴}+\frac{۱}{x^{۴}}) + ۲(x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}) = (x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}})^{۲} - ۲ + ۲(x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}})$

$f(x+\frac{۱}{x}) = \left[(x+\frac{۱}{x})^{۲} - ۲\right]^{۲} - ۲ + ۲\left[(x+\frac{۱}{x})^{۲} - ۲\right]$

$f(x) = (x^{۲}-۲)^{۲} - ۲ + ۲(x^{۲}-۲) = x^{۴} - ۲x^{۲} - ۲$

۱۴) $\left.\begin{array}{l} f(ab) = (f(a))^{b} \\ a \to b \Rightarrow f(ab) = (f(b))^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow (f(a))^{b} = (f(b))^{a}$

از طرفین، در مبنای k، لگاریتم می‌گیریم:

$$\log_k^{(f(a))^b} = \log_k^{(f(b))^a} \Rightarrow b\log_k^{f(a)} = a\log_k^{f(b)} \Rightarrow \frac{\log_k^{f(a)}}{a} = \frac{\log_k^{f(b)}}{b}$$

سمت چپ تابعی از b و سمت راست تابعی از a می‌باشند و تساوی وقتی برقرار است (یعنی دو تابع وقتی برابرند) که هر دو طرف برابر مقدار ثابتی باشند، لذا داریم:

$$\frac{\log_k^{f(a)}}{a} = c \Rightarrow \log_k^{f(a)} = ac \rightarrow f(a) = k^{ac} \Rightarrow \quad f(x) = k^{xc}$$

۳ـ هرگاه رابطه‌ای به صورت $af(g(x)) + bf(h(x)) = cp(x)$ داشته باشیم و بخواهیم ضابطه‌ی $f(x)$ را بیابیم، باید عملی انجام دهیم که $g(x)$ و $h(x)$ به یکدیگر تبدیل شوند، آن‌گاه دستگاه حاصل را حل کرده و $f(x)$ را بیابیم؟

مثال: هرگاه $3f(x) + f(-x) = 5x$، مطلوبست $f(x)$

$$x \rightarrow -x \Rightarrow 3f(-x) + f(x) = -5x$$

$$-3\begin{cases} 3f(x) + f(-x) = 5x \\ f(x) + 3f(-x) = -5x \end{cases} \quad \begin{cases} -9f(x) - 3f(-x) = -15x \\ f(x) + 3f(-x) = -5x \end{cases}$$

$$-8f(x) = -20x$$

$$f(x) = \frac{5}{2}x$$

نکته‌ی مهم: هرگاه در رابطه‌ی $af(x) + bf(-x) = cg(x)$، تابع g فرد باشد، تابع f نیز فرد است و بالعکس.

راه حل دوم مثال فوق: چون تابع $g(x) = 5x$ تابعی فرد است لذا تابع f نیز تابعی فرد است و داریم:

$$3f(x) - f(x) = 5x \Rightarrow 2f(x) = 5x \Rightarrow f(x) = \frac{5}{2}x$$

مثال: هرگاه $f(\sin x) + 4f(\cos x) = \cos^2 x$، مطلوبست $f(x)$؟

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow \quad -4\begin{cases} f(\cos x) + 4f(\sin x) = \sin^2 x \\ 4f(\cos x) + f(\sin x) = \cos^2 x \end{cases}$$

$$-15f(\sin x) = \cos^2 x - 4\sin^2 x$$

$$f(\sin x) = \frac{1 - \sin^2 x - 4\sin^2 x}{-15} \Rightarrow f(\sin x) = \frac{5\sin^2 x - 1}{15} \Rightarrow f(x) = \frac{5x^2 - 1}{15}$$

مثال: هرگاه $2f(x^3) + f(-x^3) = x$، $f(x)$ را بیابید؟

حل: x را به x- تبدیل کرده، دستگاه تشکیل دهید، پاسخ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ خواهد بود. (ضمناً می‌توانید از نکته‌ی مهم فوق نیز استفاده کنید)

مثال: هرگاه $3f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 2f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 5x$، $f(x)$ را بیابید؟

حل: فرض می‌کنیم $u = \frac{x-1}{x+1}$ لذا $\frac{1}{u} = \frac{x+1}{x-1}$ بنابراین داریم:

$$\frac{x-1}{x+1}=u$$
$$ux+u=x-1$$
$$x(u-1)=-u-1$$
$$x=\frac{u+1}{1-u}$$

$$u\to\frac{1}{u}\Rightarrow\begin{cases}3f(u)+2f(\frac{1}{u})=\frac{5u+5}{1-u} & \times 3\\ 2f(u)+3f(\frac{1}{u})=\frac{5(u+5)}{u-1} & \times(-2)\end{cases}$$
$$5f(u)=\frac{25u+25}{1-u}\Rightarrow f(u)=\frac{5u+5}{1-u}\Rightarrow f(x)=\frac{5x+5}{1-x}$$

۴) هرگاه ضابطه‌های $f(x)$ و $f(g(x))$ معلوم باشند و بخواهیم ضابطه‌ی $g(x)$ را محاسبه کنیم، $g(x)$ را در f به جای x گذاشته و مساوی $f(g(x))$ قرار داده، ضابطه‌ی $g(x)$ به سادگی به دست می‌آید.

مثال: هرگاه $f(x)=x^2-1$ **و** $(fog)(x)=x^4+2x^2$، **مطلوبست** $g(x)$**؟**

$$\begin{cases}f(g(x))=x^4+2x^2\\ (g(x))^2-1=x^4+2x^2\end{cases}\Rightarrow(g(x))^2=x^4+2x^2+1=(x^2+1)^2\Rightarrow g(x)=\pm(x^2+1)$$

۵) هرگاه ضابطه‌های $f(x)$ و $g(f(x))$ معلوم باشند و بخواهیم ضابطه‌ی $g(x)$ را محاسبه کنیم، ابتدا به جای $f(x)$ در $g(f(x))$ مقدارش را قرار داده و سپس از نکته‌ی شماره‌ی ۲ همین قسمت استفاده می‌کنیم.

مثال: هرگاه $f(x)=2x+5$ **و** $g(f(x))=x^2+x-1$، **مطلوبست** $g(x)$**؟**

$$g(2x+5)=x^2+x-1$$
$$x\to\frac{x-5}{2}\Rightarrow g(2(\frac{x-5}{2})+5)=(\frac{x-5}{2})^2+(\frac{x-5}{2})-1$$
$$g(x)=(\frac{x-5}{2})^2+(\frac{x-5}{2})-1$$

مثال: هرگاه $f(x)$ تابعی از درجه‌ی اول نسبت به x باشد و داشته باشیم: $(fof)(x)=4x+12$، $f(x)$ **را بیابید؟**

$$f(x)=ax+b$$
$$(fof)(x)=f(f(x))=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$$
$$a^2x+ab+b=4x+12\Rightarrow\begin{cases}a^2=4\Rightarrow a=\pm2\\ ab+b=12\end{cases}$$
$$\begin{cases}a=2\Rightarrow b=4\Rightarrow f(x)=ax+b=2x+4\\ a=-2\Rightarrow b=-12\Rightarrow f(x)=ax+b=-2x-12\end{cases}$$

چند خاصیت ویژه در چند تابع خاص:

۱ـ برای تابع $f(x)=x$ داریم:
$$\begin{cases}f(x\pm y)=f(x)\pm f(y)\\ f(xy)=f(x)f(y)\end{cases}$$

۲ـ برای تابع $f(x)=a^x$ داریم:
$$\begin{cases}f(x+y)=f(x)f(y)\\ f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}\end{cases}$$

۳ـ برای تابع $f(x)=\log_a^x$ داریم:
$$\begin{cases}f(xy)=f(x)+f(y)\\ f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)\end{cases}$$

تست ۱:

۱ـ هرگاه $f(x+y, x-y) = ۲(xy+y^۲)$ حاصل f(۱ و ۲) کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۴- ۳) ۲ ۴) ۴

۲ـ هرگاه $f(-x) + f(۵) = ۴x + ۲$، $f(۲x)$ کدام است؟

۱) $۸x - ۱۱$ ۲) $-۸x + ۱۱$ ۳) $۴x + ۱۱$ ۴) $-۴x - ۱۱$

۳ـ هرگاه $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$، $f(\frac{۱}{y})$، با کدامیک برابر است؟

۱) $-f(x)$ ۲) $-f(y)$ ۳) $۱ - f(y)$ ۴) $۱ + f(y)$

۴ـ هرگاه $f(\frac{x+۱}{y+۱}) = \frac{x+۱}{x+y+۲}$، $f(\frac{۱}{x})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{x+۱}$ ۲) $\frac{x}{x+۱}$ ۳) $\frac{x+۱}{x}$ ۴) $x+۱$

۵ـ هرگاه منحنی تابع f به صورت [نمودار] باشد، معادله‌ی تابع $y = f(-f(x))$، کدام است؟

a
-a

۱) $y = x$ ۲) $y = -x$ ۳) $y = -x + ۲a$ ۴) $y = -x - ۲a$

۶ـ هرگاه f تابعی از درجه اول نسبت به x، باشد و داشته باشیم: $۲f(x+۱) + ۵f(x-۲) = ۳x + ۱$ ضابطه‌ی f(x) کدام است؟

۱) $f(x) = \frac{۳}{۷}x + \frac{۳۱}{۷}$ ۲) $f(x) = \frac{۳}{۷}x + \frac{۳۱}{۴۹}$ ۳) $f(x) = \frac{۷}{۳}x + \frac{۳۱}{۷}$ ۴) $f(x) = \frac{۷}{۳}x + \frac{۳۱}{۴۹}$

۷ـ هرگاه $f = \{(۱,۲),(۳,۵)\}$ و $g = \{(۳,۲),(۱,۵)\}$، $fog^{-۱}$ کدام است؟

۱) { } ۲) {(۳,۱),(۳,۵)} ۳) {(۲,۵),(۵,۲)} ۴) {(۲,۵)}

۸ـ هرگاه $f(x) = \begin{cases} ۱ - ۲x & ,(x \geq ۰) \\ ۱ + x & ,(x \leq ۰) \end{cases}$، $(fof)(-\cos^۲ x)$، برابر است با:

۱) $\sin ۲x$ ۲) $\cos ۲x$ ۳) $-\cos ۲x$ ۴) $-\sin ۲x$

۹ـ هرگاه $f(x) + f(۱) = x + ۳$، $f(x-۱)$، کدام است؟

۱) $x + ۳$ ۲) $x + ۲$ ۳) x ۴) $\frac{x}{۲} + ۱$

۱۰ـ اگر به ازاء هر $x \in R$، داشته باشیم: $f(x+a) = f(x)$ آنگاه حاصل $f(x+a) - f(x-a)$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) $f(۲a)$ ۳) $f(x+۲a)$ ۴) $f(x)$

۱- (۳) $\begin{cases} x+y=۲ \\ x-y=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۳}{۲} \\ y=\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow f(۲,۱)=۲(\frac{۳}{۴}+\frac{۱}{۴})=۲$

۲- (۲) $x=-۵ \Rightarrow f(۵)+f(۵)=-۱۸ \Rightarrow f(۵)=-۹ \Rightarrow f(-x)=۴x+۲+۹=۴x+۱۱$

$x \to -۲x \quad \Rightarrow f(۲x)=-۸x+۱۱$

۳- (۲) $x=y=۱ \Rightarrow f(۱)=f(۱)-f(۱) \Rightarrow f(۱)=۰$

$\Rightarrow f(\frac{۱}{y})=f(۱)-f(y) \Rightarrow f(\frac{۱}{y})=-f(y)$

۴- (۱) $f(\frac{x+۱}{y+۱})=\frac{x+۱}{x+۱+y+۱} \Rightarrow f(\frac{x+۱}{y+۱})=\frac{۱}{\frac{x+۱+y+۱}{x+۱}}=\frac{۱}{۱+\frac{y+۱}{x+۱}} \Rightarrow f(t)=\frac{۱}{۱+\frac{۱}{t}} \Rightarrow f(t)=\frac{t}{t+۱}$

$f(x)=\frac{x}{x+۱} \quad \Rightarrow f(\frac{۱}{x})=\frac{\frac{۱}{x}}{\frac{۱}{x}+۱}=\frac{۱}{۱+x}$

۵- (۲) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۱ \Rightarrow \frac{x}{-a}+\frac{y}{a}=۱ \Rightarrow x-y=-a \Rightarrow y=x+a \Rightarrow f(x)=x+a \Rightarrow y=f(-f(x))=f(-x-a)$

$y=-x-a+a \Rightarrow y=-x$

۶- (۲) $f(x)=ax+b \Rightarrow ۲[a(x+۱)+b]+۵[a(x-۲)+b]=۳x+۱$

$۷ax-۸a+۷b=۳x+۱ \Rightarrow \begin{cases} ۷a=۳ \\ -۸a+۷b=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{۳}{۷} \\ b=\frac{۳۱}{۴۹} \end{cases} \Rightarrow f(x)=\frac{۳}{۷}x+\frac{۳۱}{۴۹}$

۷- (۳) $g^{-۱}=\{(۲,۳),(۵,۱)\} \Rightarrow fog^{-۱}=\{(۲,۵),(۵,۲)\}$

۸- (۲) $(fof)(-\cos^۲x)=f(f(-\cos^۲x))=f(۱-\cos^۲x)=f(\sin^۲x)=۱-۲\sin^۲x=\cos۲x$

۹- (۳) $x=۱ \Rightarrow ۲f(۱)=۴ \Rightarrow f(۱)=۲ \Rightarrow f(x)=x+۳-۲=x+۱$

$x \to x-۱ \Rightarrow f(x-۱)=x-۱+۱=x$

۱۰- (۱) $f(x+a)=f(x), x \to x-a \Rightarrow f(x-a+a)=f(x-a)$

$\Rightarrow f(x-a)=f(x) \Rightarrow f(x+a)-f(x-a)=f(x)-f(x)=۰$

هرگز از آنچه بر زبان نیاورده‌اید پشیمان نخواهید شد.

«بزرگمهر حکیم»

تست ۲:

۱ـ هرگاه $2f(x+2) + f(2-x) = 3x$، آنگاه $f(3)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -3 ۳) ۹ ۴) -9

۲ـ هرگاه $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ و $(fog)(x) = x^2 + 1$ باشند، $g(x)$ کدام است؟

۱) $g(x) = 1 - \sqrt[3]{x+2}$ ۲) $g(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2+2}$ ۳) $g(x) = -1 + \sqrt[3]{x+2}$ ۴) $g(x) = -1 + \sqrt[3]{x^2+2}$

۳ـ هرگاه $(fog)(x) = \sin^2 x$ و $g(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ باشند، ضابطه‌ی $f(x)$ کدام است؟

۱) $f(x) = \frac{x}{2}$ ۲) $f(x) = \frac{1-x}{2}$ ۳) $f(x) = \frac{1-x^2}{2}$ ۴) $f(x) = \frac{1+x}{2}$

۴ـ هرگاه $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ و $g(x) = \lfloor x \rfloor$، حاصل $(fog-gof)(x)$ کدام است؟

۱) $2\lfloor x \rfloor$ ۲) $2x - \lfloor x \rfloor$ ۳) ۰ ۴) ۱

۵ـ هرگاه $(fog)(x) = -f(x)$ و $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$، $g(x)$ کدام است؟

۱) $\sqrt{x^2}$ ۲) $\frac{1}{x}$ ۳) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ۴) $\sqrt{x}$

۱ـ (۱)

$$x = 1 \Rightarrow 2f(3) + f(1) = 3 \qquad x = -1 \Rightarrow 2f(1) + f(3) = -3 \quad \Rightarrow \; -2\begin{cases} f(1) + 2f(3) = 3 \\ 2f(1) + f(3) = -3 \end{cases}$$

$$-3f(3) = -9 \Rightarrow f(3) = 3$$

۲ـ (۴)

$$f(x) = (x+1)^3 - 1$$

$$f(g(x)) = x^2 + 1 \Rightarrow (g(x)+1)^3 - 1 = x^2 + 1 \Rightarrow (g(x)+1)^3 = x^2 + 2$$

$$g(x) + 1 = \sqrt[3]{x^2+2} \Rightarrow g(x) = -1 + \sqrt[3]{x^2+2}$$

۳ـ (۲)

$$g(x) = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x$$

$$f(g(x)) = \sin^2 x \Rightarrow f(\cos 2x) = \frac{1-\cos 2x}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1-x}{2}$$

۴ـ (۳)

$$(fog)(x) - (gof)(x) = (\lfloor x \rfloor - \lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor) - \lfloor x - \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor - 0 = 0$$

۵ـ (۲)

$$f(g(x)) = -f(x) \Rightarrow \frac{g(x)+1}{g(x)-1} = \frac{x+1}{x+1}$$

$$(1-x)g(x) + 1 - x = (1+x)g(x) - (1+x)$$

$$(1 - x - 1 - x)\,g(x) = -1 - x - 1 + x \Rightarrow -2x\,g(x) = -2 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x}$$

همیشه کار کنید و بکوشید تا جامه‌ی افتخار و بزرگی بپوشید. «شکسپیر»

تابع زوج و فرد:

تابع زوج: تابع f را زوج گوئیم هرگاه دو شرط زیر توأماً برقرار باشند:

۱) اولاً دامنه‌ی تابع متقارن باشد، یعنی: $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

۲) ثانیاً با تبدیل x به x-، f(x) تغییری نکند، یعنی $f(-x) - f(x) = 0$ یا $\forall x \in D_f: f(-x) = f(x)$

تذکر: هرگاه دامنه‌ی یک تابع به صورت $[-a,a]$ یا $(-a,a)$ یا $(-\infty,+\infty)$ یا $(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$ یا $(-\infty,a]\cap[a,+\infty)$ یا $\{..., -(a+1), -a, 0, a, a+1, ...\}$ $(a>0)$ باشد، گوئیم دامنه‌ی تابع متقارن است.

مثال: توابع $f(x) = |x|$، $f(x) = \cos x$، $f(x) = x^6 + x^4 + 2$ و $f = \{(1,2),(0,0),(-4,3),(-1,2),(4,3)\}$ **توابعی زوجند.**

تابع فرد: تابع f را تابعی فرد گوئیم هرگاه دو شرط زیر توأماً برقرار باشند:

۱) اولاً دامنه‌ی تابع متقارن باشد یعنی: $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

۲) ثانیاً با تبدیل x به x-، f(x) قرینه شود یعنی:

$\forall x \in D_f: f(-x) = -f(x)$ یا $f(-x) + f(x) = 0$

مثال: توابع $f(x) = x^5$ ، $f(x) = \sin x$ و $f(x) = x^3 + x$ و $f = \{(5,10),(6,9),(-5,-10),(-6,-9)\}$ **توابعی فردند.**

نکاتی مهم راجع به توابع زوج و فرد:

۱) در توابع زوج، محور yها (خط $x = 0$) محور تقارن تابع می‌باشد (عکس این مطلب الزاماً درست نیست)

۲) در توابع فرد، مبدأ مختصات، مرکز تقارن منحنی است.

۳) هرگاه نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ روی نمودار تابع زوج f باشد، آنگاه نقطه‌ی $A'\left|\begin{matrix}-x\\y\end{matrix}\right.$ نیز حتماً روی نمودار تابع f هست.

۴) هرگاه نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ روی نمودار تابع فرد f باشد، آنگاه نقطه‌ی $A'\left|\begin{matrix}-x\\-y\end{matrix}\right.$ نیز حتماً روی نمودار تابع f هست.

تست: هرگاه f تابعی فرد باشد که از نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right.$ عبور می‌کند و $f(3-x) = f(x)$، در این صورت $f(6)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۶ ۴) ۶-

$x = -3 \Rightarrow f(3-(-3)) = f(-3) \Rightarrow f(6) = f(-3) = -f(3) = -2$

۵) همهٔ توابع ثابت $f(x) = c$، توابعی زوجند، به استثناء تابع ثابت $f(x) = 0$ که هم زوج و هم فرد است.

۶) بعضی از توابع نه زوجند و نه فرد مانند: $f(x) = x^2 + \sin x$

۷) تابع ثابت $f(x) = c$ هم زوج و هم فرد است.

۸) در تابع فرد، اگر $0 \in D_f$، آنگاه $f(0) = 0$، زیرا:

$f(-0) + f(0) = 0 \Rightarrow f(0) + f(0) = 0 \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

تذکر: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ تابعی فرد است، اما $f(0)$ اصلاً تعریف نشده است که بخواهد صفر باشد.

۹) توابع خطی به صورت $f(x) = ax$، توابعی فرد هستند.

مثال: تابع $f(x)=\frac{x}{۲}+\sin\pi\lfloor x\rfloor$**، تابعی فرد است. زیرا:**

$\underbrace{\sin\pi\lfloor x\rfloor}_{\text{مضرب صحیح } \pi} = ۰ \Rightarrow f(x)=\frac{۱}{۲}x$ فرد است.

۱۰) هرگاه $y = f(x)$ تابعی زوج باشد، آنگاه توابع $y = f(x) \pm k$، $y = \pm kf(x)$، $y = \pm\frac{f(x)}{k}$ $(k\neq ۰)$ و $y = (f(x))^n$ $(k \in R , n \in N)$ همگی زوجند.

۱۱) هرگاه $y = f(x)$ تابعی فرد باشد، آنگاه توابع $y = \pm kf(x)$، $y = \pm\frac{f(x)}{k}$ $(k \neq ۰)$ و $k = (f(x))^{۲n-۱}$ همگی فردند. $(k \in R , n \in N)$

۱۲) هرگاه دامنه‌ی تابع f، متقارن نباشد، تابع f نه زوج است نه فرد مانند: $y=\sqrt{x}$

۱۳) هرگاه f تابعی فرد و وارون‌پذیر باشد، آنگاه تابع وارونش $(f^{-۱})$ نیز تابعی فرد است، در حالیکه باید بدانیم، توابع زوج، اصلاً معکوس‌پذیر نیستند، زیرا یک به یک نیستند.

۱۴) هرگاه f و g هر دو زوج باشند، توابع $f \pm g$ و fg، $\frac{f}{g}$، λf و λg و $|f|$ و $|g|$ و f^n و g^n، $Max\{f,g\}$ و $Min\{f,g\}$ همگی زوجند.

تذکر: در مورد تابع $\frac{f}{g}$، بشرط آنکه ریشه‌های مخرج، تقارن دامنه را به هم نزده باشد.

۱۵) هرگاه f و g هر دو فرد باشند، توابع $f \pm g$ و λf و λg و $f^{۲n+۱}$ و $g^{۲n+۱}$ همگی فردند، ولی fg و $\frac{f}{g}$ زوجند.

۱۶) هرگاه یکی از توابع f و g زوج و دیگری فرد باشد، توابع fg، $\frac{f}{g}$ فردند ولی توابع $f \pm g$ نه زوجند نه فرد (به جز حالت استثناء)

۱۷) هرگاه f و g هر دو زوج باشند، و یا یکی زوج و دیگری فرد باشد، (به عبارت دیگر، حداقل یکی از دو تابع f و g زوج باشند)، آنگاه توابع fog و gof نیز زوجند.

۱۸) هرگاه f و g هر دو فرد باشند، آنگاه توابع fog و gof نیز فردند.

۱۹) توابع چند جمله‌ای به فرم $f(x) = a_nx^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \dots + a_۱x + a_۰$ $(n \in N)$

الف) وقتی زوجند که جمله‌ی شامل x با توان فرد نداشته باشند مانند: $f(x) = x^۴ + x^۲ + ۱$

ب) وقتی فردند که جمله‌ی شامل x با توان زوج نداشته باشند و مقدار ثابت آنها یعنی $a_۰$، برابر ۰ باشد، مانند: $f(x) = ۲x^۵ - ۷x^۳$

۲۰) کلیه‌ی توابع به صورت $f(x) = |x-a| + |x+a|$ زوجند.

تذکر: تابع $y = |x-a| + |x-b|$ زمانی زوج است که a و b قرینه باشند.

۲۱) کلیه‌ی توابع به فرم $f(x) = |x-a| - |x+a|$ فردند.

تذکر: تابع $y = |x - a| - |x - b|$ زمانی فرد است که a و b قرینه باشند.

۲۲) تابع $y = \log(ax + \sqrt{bx^2 + 1})$ زمانی فرد است که $a^2 = b$ باشد.

۲۳) توابع $y = \sin x$، $y = \cos x$، $y = \tan x$، $y = \cot x$، $y = \operatorname{cosec} x$، $y = \operatorname{Arcsin} x$ و $y = \operatorname{Arctan} x$ همگی فردند زیرا:

$$\begin{cases} \sin(-x) = -\sin x \\ \tan(-x) = -\tan x \\ \cot(-x) = -\cot x \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x \\ \operatorname{Arcsin}(-x) = -\operatorname{Arcsin} x \\ \operatorname{Arctan}(-x) = -\operatorname{Arctan} x \end{cases}$$

۲۴) توابع $y = \cos x$ و $y = \sec x$ توابعی زوجند زیرا:

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sec(-x) = \sec x \end{cases}$$

۲۵) توابع $y = \operatorname{Arccos} x$ و $y = \operatorname{Arccot} x$، نه زوجند نه فرد، زیرا:

$$\begin{cases} \operatorname{Arccos}(-x) = \pi - \operatorname{Arccos} x \\ \operatorname{Arccot}(-x) = \pi - \operatorname{Arccot} x \end{cases}$$

۲۶) توابع $y = 0$، $y = c$، $y = x\sin x$، $y = x\tan x$، $y = x^2\cos x$، $y = ax^{2n} + b$ و $y = |x|$ و $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$، $y = a^x + a^{-x}$ و $y = \sqrt{k + x^2} \pm \sqrt{k - x^2}$ و $y = a_{2k}x^{2k} + \dots + a_2x^2 + a_0$ توابعی زوجند.

۲۷) توابع $y = 0$، $y = x\cos x$، $y = x|x|$، $y = ax$ و $y = \log(f(x) \pm \sqrt{(f(x))^2 + 1})$ (به شرط فرد بودن f)، $y = \sqrt[3]{x - 1} + \sqrt[3]{x + 1}$ و $y = \operatorname{sign}(x)$، $y = a^x - a^{-x}$، $y = \dfrac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}}$ و $y = \sqrt{k + x^3} \pm \sqrt{k - x^3}$ و $f(x) = a_{2k+1}x^{2k+1} + \dots + a_3x^3 + a_1x$ و $y = \log\dfrac{a-x}{a+x}$ و $y = \log\dfrac{a+x}{a-x}$ همگی فردند.

۲۸) تابع $f(x) = \left\lfloor \dfrac{x-n}{x+n} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{2n}{x-n} \right\rfloor$، تابعی زوج می‌باشد. $(n \in N)$

اثبات:

$$f(-x) = \left\lfloor \frac{2n}{-x-n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{-x-n}{-x+n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-x-n+x-n}{x+n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+n}{x-n} \right\rfloor$$

$$f(-x) = \left\lfloor -1 + \frac{x-n}{x+n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x-n+2n}{x-n} \right\rfloor$$

$$f(-x) = -1 + \left\lfloor \frac{x-n}{x+n} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{2n}{x-n} \right\rfloor = f(x)$$

۲۹) هرگاه $af(x) + bf(-x) = cg(x)$ $(a,b,c \in R)$ و g فرد باشد، آنگاه f نیز فرد است و بالعکس. همچنین اگر g زوج باشد، آنگاه f نیز زوج است و بالعکس.

تست: هرگاه $2f(x) + 3f(-x) = 5x$، $f(x)$ کدام است؟

۱) $f(x) = 3x + 1$ ۲) $f(x) = -5x$ ۳) $f(x) = 10x$ ۴) $f(x) = 10x^2$

حل: چون $g(x) = ۵x$ تابعی فرد است لذا f نیز فرد است بنابراین داریم:

$$۲f(x) - ۳f(x) = ۵x \Rightarrow f(x) = -۵x$$

۳۰) هرگاه دامنه‌ی تابع f، متقارن باشد، آنگاه تابع $g(x) = f(x) + f(-x)$، همیشه تابعی زوج خواهد بود.

۳۱) هرگاه دامنه‌ی تابع f، متقارن باشد، آنگاه تابع $g(x) = f(x) - f(-x)$، همیشه تابعی فرد خواهد بود.

۳۲) هرگاه دامنه‌ی تابع f، متقارن باشد، آنگاه تابع f(x) را می‌توان به صورت مجموع دو تابع مانند g(x) و h(x) نوشت، به طوریکه یکی از آنها زوج و دیگری فرد باشد در واقع داریم:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{۲}}_{\text{زوج}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{۲}}_{\text{فرد}}$$

۳۳) هرگاه توابع f و g هر دو زوج باشند، آنگاه توابع
$$\begin{cases} Max\{f,g\} = \dfrac{f+g}{۲} + \dfrac{|f-g|}{۲} \\ Min\{f,g\} = \dfrac{f+g}{۲} - \dfrac{|f-g|}{۲} \end{cases}$$
توابعی زوجند.

۳۴) هرگاه f تابعی زوج و مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن تابعی فرد است، به استثناء تابع ثابت که مشتقش هم زوج و هم فرد است.

مثال: $f(x) = x^۴ + x^۲ + ۱$ زوج است $\Rightarrow f'(x) = ۴x^۳ + ۲x$ فرد است

۳۵) هرگاه f تابعی فرد و مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن تابعی زوج است.

۳۶) هرگاه f در فاصله‌ی [a,a-]، تابعی فرد و انتگرالپذیر باشد، آنگاه:
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = ۰$$

۳۷) هرگاه f در فاصله‌ی [a,a-]، تابعی زوج و انتگرالپذیر باشد، آنگاه:
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = ۲\int_{۰}^{a} f(x)\,dx$$

هرگز قبل از فکر کردن حرف نزن و کاری انجام مده. «فیثاغورث»

هر روز برای مرد عاقل، آغاز زندگی تازه است. «دیل کارنگی»

۱ـ هرگاه f تابعی زوج و g تابعی فرد باشد و $f(x) + g(x) = ۲^x$، $f(x)$ کدام است؟

۱) $f(x) = ۲^x + ۲^{-x}$　　۲) $f(x) = ۲^x - ۲^{-x}$　　۳) $f(x) = ۲^{x-۱} + ۲^{-x-۱}$　　۴) $f(x) = ۲^{x-۱} - ۲^{-x-۱}$

۲ـ تابع $f(x) = \left\lfloor \frac{x^۲ + ۲}{x^۲ + ۳} \right\rfloor$ در کدام رابطه، صدق می‌کند؟

۱) زوج　　۲) فرد　　۳) نه زوج و نه فرد　　۴) هم زوج و هم فرد

۳ـ کدام یک از احکام زیر، همواره برقرارند (D_f متقارن است)

۱) اگر g زوج باشد، آنگاه fog فرد است.　　۲) اگر g فرد باشد، آنگاه fog فرد است.

۳) اگر g زوج باشد، آنگاه fog زوج است.　　۴) اگر g فرد باشد، آنگاه fog زوج است.

۴ـ محور تقارن تابع $f(x) = \frac{(۲^x + ۱)^۲}{۲^x}$ کدام خط است؟

۱) $y = ۰$　　۲) $x = ۰$　　۳) $y = x$　　۴) $y = -x$

۵ـ در کدامیک از توابع زیر، مبدأ مختصات مرکز تقارن نمی‌باشد؟

۱) $y = \frac{۲^x + ۱}{۲^x - ۱}$　　۲) $y = \log^{(۱ - x^۲)}$

۳) $y = \log(x + \sqrt{x^۲ + ۱})$　　۴) $y = \log \frac{۱ - x}{۱ + x}$

۶ـ هرگاه تابع $f = \{(a-۱, b), (۰, ۰), (۱, c-۲)\}$ هم زوج و هم فرد باشد، $a + b + c$ کدام است؟

۱) -۲　　۲) -۱　　۳) ۱　　۴) ۲

۷ـ هرگاه تابع $f(x) = (A - ۱)x^۳ + ۲x^۲$ زوج و تابع $g(x) = (B + ۲)\cos x + \sin x$ فرد باشند، $A + B$ کدام است؟

۱) -۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴

۸ـ هرگاه تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{x + ۱} & , (x \geq ۰) \\ g(x) & , (x < ۰) \end{cases}$ تابعی فرد باشد، $g(-۴)$ کدام است؟

۱) $\frac{-۲}{۵}$　　۲) $\frac{-۲}{۳}$　　۳) $\frac{۲}{۳}$　　۴) $\frac{۲}{۵}$

۹ـ هرگاه تابع f تابعی فرد باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $f(x + \tan x)$ زوج　　۲) $f(|x|)$ زوج　　۳) $|f(x)|$ زوج　　۴) fof فرد

۱۰ـ هرگاه منحنی $f(x) = \log(ax + \sqrt{۴x^۲ + ۱})$ نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشد، a کدام است؟

۱) ۲　　۲) -۲　　۳) ± ۲　　۴) ۰

۱ـ (۳) $x \to -x \Rightarrow f(-x) + g(-x) = ۲^{-x} \Rightarrow \begin{cases} f(x) - g(x) = ۲^{-x} \\ f(x) + g(x) = ۲^{x} \end{cases}$

$۲f(x) = ۲^{x} + ۲^{-x}$

$f(x) = ۲^{x-۱} + ۲^{-x-۱}$

۲ـ (۴) هم زوج و هم فرد است. $۰ < \frac{x^۲+۲}{x^۲+۳} < ۱ \Rightarrow \left\lfloor \frac{x^۲+۲}{x^۲+۳} \right\rfloor = ۰ \Rightarrow f(x) = ۰$

۳ـ (۳) زوج $g \Rightarrow (fog)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (fog)(x) \Rightarrow$ fog زوج است.

۴ـ (۲) $x \to -x \Rightarrow f(-x) = \frac{(۲^{-x}+۱)^۲}{۲^{-x}} = \frac{(\frac{۱}{۲^x}+۱)^۲}{\frac{۱}{۲^x}} = \frac{(۱+۲^x)^۲}{۲^x} = f(x)$

$\Rightarrow$ f زوج است. $\Rightarrow$ محور yها محور تقارن تابع است.

۵ـ (۲) گزینه‌های (۱) و (۳) و (۴) فردند و لذا مبدأ مختصات مرکز تقارنشان می‌باشد.

۶ـ (۴) تنها تابعی که هم زوج و هم فرد است تابع ثابت $f(x) = ۰$ است، یعنی تابع:

توجه داشته باشید که تقارن دامنه بایستی حفظ شود. $f = \{(۰,۰), (۱,۰), (-۱,۰), (۲,۰), (-۲,۰), ...\}$

$\Rightarrow \begin{cases} a-۱ = -۱ \\ b = ۰ \\ c-۲ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۰ \\ b = ۰ \\ c = ۲ \end{cases} \Rightarrow a+b+c = ۲$

۷ـ (۱) زوج $f \Rightarrow A - ۱ = ۰ \Rightarrow A = ۱$

فرد $g \Rightarrow B + ۲ = ۰ \Rightarrow B = -۲$

$\Rightarrow A + B = -۱$

۸ـ (۱) فرد $f \Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow g(-۴) = -\frac{\sqrt{۴}}{۴+۱} = -\frac{۲}{۵}$

۹ـ (۱) فرد $(x + \tan x)$، فرد $f \Rightarrow fo(x + \tan x) = f(x + \tan x)$ فرد

توجه داشته باشید که ترکیب دو تابع، زمانی فرد است که هر دو فرد باشند، ضمناً در اینجا $f(x+\tan x)$ تابعی مرکب از دو تابع فرد است.

۱۰ـ (۳) (روش تستی) طبق نکته‌ی بیان شده در جزوه $a^۲ = ۴ \Rightarrow a = \pm ۲$

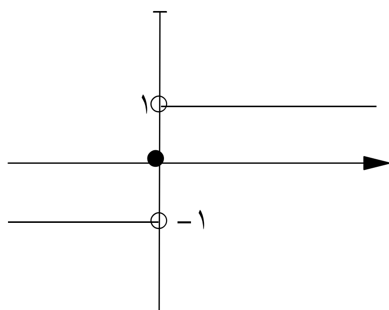
نسبت به مبدأ مختصات متقارن $f \Rightarrow f(-x) + f(x) = ۰ \Rightarrow \log(-ax + \sqrt{۴x^۲+۱}) + \log(ax + \sqrt{۴x^۲+۱}) = ۰$

$\log(\sqrt{۴x^۲+۱} - ax)(\sqrt{۴x^۲+۱} + ax) = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ + ۱ - a^۲x^۲ = ۱ \Rightarrow ۴ - a^۲ = ۰ \Rightarrow a = \pm ۲$

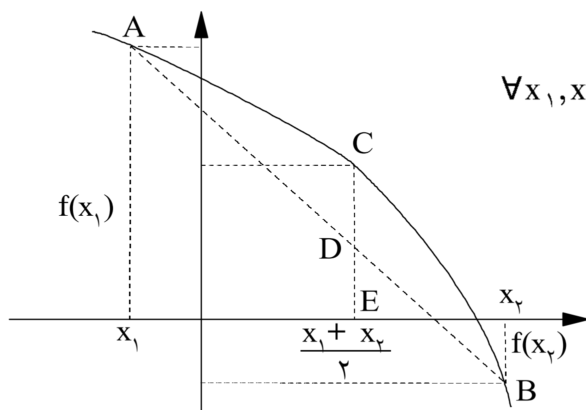
هر وقت تصمیم گرفتید درهای تردید را ببندید. «نیچه»

تابع علامت (تابع نشانه)

تابع $y = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & ,(x > 0) \\ 0 & ,(x = 0) \\ -1 & ,(x < 0) \end{cases}$ را تابع علامت x می‌گویند، دامنه‌ی این تابع R و بردش {۱,۰,۱-} است و نمودارش به صورت زیر است.



تابع محدب: تابع f را در فاصله‌ی [a,b]، محدب (گوژ) گوئیم هرگاه:



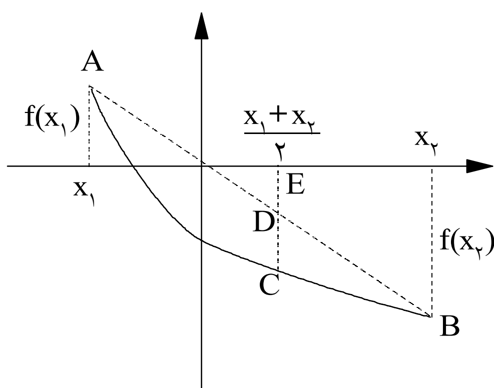
$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \quad : x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

$$DE = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

$$CE = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

$, DE < CE$

تابع مقعر: تابع f را در فاصله‌ی [a,b] مقعر (کاو) گوئیم هرگاه:



$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \quad : x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

$$DE = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

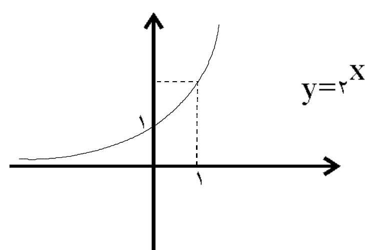
$$CE = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

$, DE > CE$

تذکر: با استفاده از مشتق دوم، می‌توان فاصله تقعر و تحدب منحنی تابع را تعیین کنید.

تابع اکیداً صعودی (اکیداً افزایشی): تابع f را در دامنه‌ی تعریفش، اکیداً صعودی گوئیم هرگاه (x زیاد شود، y نیز زیاد شود و بالعکس) و $\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

به عبارت دیگر، از روی نمودار تابع هرچه از چپ به راست حرکت کنیم قد تابع (y تابع) بیشتر شود.



مثال: تابع $y = ۲^x$، همواره اکیداً صعودی است.

مثال: ثابت کنید تابع $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$ در R اکیداً صعودی است؟

$$\forall x_۱, x_۲ \in R: x_۱ < x_۲ \Rightarrow \lfloor x_۱ \rfloor \le \lfloor x_۲ \rfloor$$

$$\begin{cases} x_۱ < x_۲ \\ \lfloor x_۱ \rfloor \le \lfloor x_۲ \rfloor \end{cases} \Rightarrow x_۱ + \lfloor x_۱ \rfloor < x_۲ + \lfloor x_۲ \rfloor \Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$$

تابع صعودی (افزایشی): تابع f را در دامنه‌ی تعریفش صعودی گوئیم هرگاه:

$$\forall x_۱, x_۲ \in D_f : x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \le f(x_۲)$$

تعریف تابع اکیداً نزولی: تابع f را در دامنه‌ی تعریفش اکیداً نزولی گوئیم هرگاه:

(x زیاد شود، y کم شود)

$$\forall x_۱, x_۲ \in D_f : x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) > f(x_۲)$$

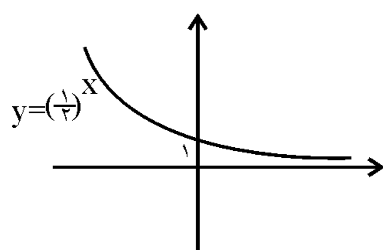
به عبارت دیگر، از روی نمودار تابع، هرچه از چپ به راست حرکت کنیم قد تابع (y تابع) کم‌تر شود.

تست: تابع $y = (۲m - ۵)^x$، در ازاء چه مقادیری از m، نزولی اکید است؟

۱) $m > ۰$　　۲) $m > \frac{۵}{۲}$　　۳) $۰ < m < \frac{۵}{۲}$　　۴) $\frac{۵}{۲} < m < ۳$

نکته: تابع $y = a^x$ با شرط $a > ۱$ اکیداً صعودی و با شرط $۰ < a < ۱$، اکیداً نزولی است.

$$۰ < ۲m - ۵ < ۱ \Rightarrow ۵ < ۲m < ۶ \Rightarrow \frac{۵}{۲} < m < ۳$$



مثال: تابع $y = (\frac{۱}{۲})^x$، همواره اکیداً نزولی است.

تابع نزولی (کاهشی): تابع f را در دامنه‌ی تعریفش نزولی گوئیم هرگاه:

$$\forall x_۱, x_۲ \in D_f : x_۱ < x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \ge f(x_۲)$$

تابع یکنوا: توابع صعودی یا نزولی را توابع یکنوا می‌گویند.

تابع یک به یک (one to one):

تابع f را در دامنه‌ی تعریفش یک به یک گوئیم هرگاه:

$$\forall x_۱, x_۲ \in D_f: f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

یا

$$\forall x_۱, x_۲ \in D_f: x_۱ \neq x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \neq f(x_۲)$$

به زبان ساده‌تر، تابع یک به یک تابعی است که yهای دو زوج مرتب، یکسان و xهای آنها متفاوت نباشند.

مثال: یک به یک بودن تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x + ۵}$ را در R بررسی کنید؟

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow \sqrt[۳]{x_۱ + ۵} = \sqrt[۳]{x_۲ + ۵} \Rightarrow x_۱ + ۵ = x_۲ + ۵ \Rightarrow x_۱ = x_۲$$ تابع یک به یک است.

تست: کدام رابطه‌ی زیر، یک تابع یک به یک می‌باشد؟

۱) $f = \{(1,2),(2,5)\}$ ۲) $g = \{(2,3),(4,-1),(2,7)\}$

۳) $h = \{(1,4),(2,5),(6,4)\}$ ۴) $u = \{(2,7),(3,7),(6,7)\}$

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۱ می‌باشد، رابطه‌ی گزینه‌ی ۲، اصلاً تابع نیست و رابطه‌های گزینه‌های ۳ و ۴ تابع هستند ولی یک به یک نیستند.

نکاتی راجع به توابع یک به یک:

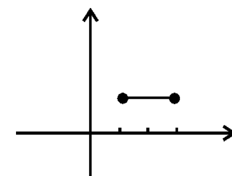
۱) اگر تابعی یک به یک باشد، آنگاه هر خط موازی محور xها (هر خط افقی به صورت $y = c$)، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

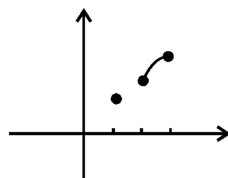
الف) قطع نکند، یک به یک است.

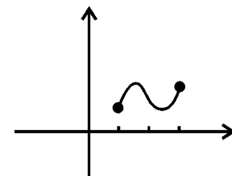
ب) در یک نقطه قطع کند، یک به یک است.

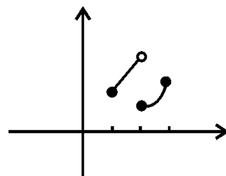
ج) در بیش از یک نقطه قطع کند، یک به یک نیست.

تست: کدام نمودار، نمودار یک تابع یک به یک را در فاصله‌ی $[1,3]$ نمایش می‌دهد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


پاسخ صحیح گزینه‌ی ۲ می‌باشد.

۲) توابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی، یک به یک می‌باشند ولی عکس این مطلب، ممکن است درست نباشد.

۳) تابع ثابت، یک به یک نیست.

۴) تابع زوج، یک به یک نیست.

۵) تابع متناوب یک به یک نیست.

۶) هرگاه توابع f و g، یک به یک باشند، آنگاه fog و gof نیز یک به یک هستند.

۷) توابع خطی به صورت $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ یک به یک می‌باشند.

۸) توابع درجه‌ی سوم به فرم $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ با شرط $b^2 - 3ac \leq 0$، یک به یک می‌باشند.

۹) توابع درجه‌ی دوم یک به یک نیستند.

۱۰) توابع هموگرافیک در دامنه‌ی تعریفشان، یک به یک هستند.

۱۱) توابع چند ضابطه‌ای به شرطی یک به یک هستند که اولاً تک تک ضابطه‌ها، یک به یک باشند، ثانیاً اشتراک برد دو به دوی ضابطه‌ها، تهی باشد، (مگر در دامنه‌های مشترک)

مثال: تابع $f: R \to R$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x+1 & ,(x\le 0) \\ x-1 & ,(0<x\le 2) \\ x^2+2 & ,(2<x) \end{cases}$ **مفروض است، آیا این تابع یک به یک است؟**

اولاً: تک تک ضابطه‌ها در دامنه‌شان یک به یک‌اند.

$$\begin{cases} x\le 0 \Rightarrow x+1\le 1 \Rightarrow R_{f_3}=(-\infty,1] \\ 0<x\le 2 \Rightarrow -1<x-1\le 1 \Rightarrow R_{f_2}=(-1,1] \\ 2<x \Rightarrow 4<x^2 \Rightarrow 6<x^2+2 \Rightarrow R_{f_1}=(6,+\infty) \end{cases} \Rightarrow R_{f_3}\cap R_{f_2}=\{1\} \Rightarrow$$

تابع f یک به یک نمی‌باشد.

در واقع $f(2)=f(0)=1$ ولی $2\neq 0$

تعریف تابع پوشا (برو): تابع f را از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B، پوشا (پوششی) گوئیم هرگاه:

برد تابع با هم دامنه‌ی تابع برابر باشد، یعنی: $R_f = B$

به عبارت دیگر هرگاه داشته باشیم: $\forall y\in B: \exists x\in D_f \quad : y=f(x)$

نکاتی راجع به توابع پوشا:

۱) هرگاه تابعی پوشا باشد، آنگاه هر خط موازی محور xها (هر خط افقی به صورت $y = c$، $c \in B$) نمودار تابع را حداقل در یک نقطه قطع خواهد کرد.

۱ـ قطع نکند، پوشا نیست.

۲ـ در یک نقطه قطع کند، پوشاست.

۳ـ در بیش از یک نقطه قطع کند هم، پوشاست.

۲) ***نکته‌ی مهم:*** هر تابع از دامنه به بردش (نه به هم دامنه‌اش) پوشاست.

۳) توابع چند جمله‌ای از درجه‌ی فرد، از R به R پوشا هستند.

۴) تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (تابع هموگرافیک) از $R-\{-\frac{d}{c}\} \to R-\{\frac{a}{c}\}$ پوشاست.

۵) توابع خطی $y = ax + b$ با شرط $a \neq 0$ از R به R پوشا هستند.

۶) تابع گلدون $f(x) = |x-a| + |x-b|$ از $R \to [|a-b|,+\infty)$ پوشاست.

۷) تابع صندلی $f(x) = |x-a| - |x-b|$ از $R \to [-|a-b|, |a-b|]$ پوشاست.

۸) توابع $y = |x|$ و $y = x^۲$، ... از $R \to [۰, +\infty)$ پوشا هستند.

۹) توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ از $R \to [-۱, ۱]$ پوشا هستند.

۱۰) توابع $y = \tan x$ و $y = \cot x$ از $R \to R$ پوشا هستند.

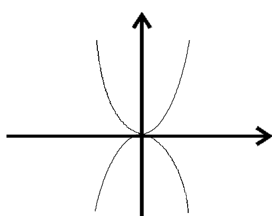
۱۱) توابع $y = \text{Arcsin} x$ و $y = \text{Arccos} x$ به ترتیب از $[-۱, ۱] \to [-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ و $[-۱, ۱] \to [۰, \pi]$ پوشا هستند.

۱۲) توابع $y = \text{Arctan} x$ و $y = \text{Arccot} x$ به ترتیب از $[-۱, ۱] \to [-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$ و $[-۱, ۱] \to [۰, \pi]$ پوشا هستند.

۱۳) تابع $y = \log_a^x$ از $R \to (۰, +\infty)$ پوشا هستند.

۱۴) تابع $y = a^x$ $(a \neq ۱, a > ۰)$ از $R \to (۰, +\infty)$ پوشاست.

تست: تابع $f(x) = x|x|$ در کدام گزینه صدق می‌کند؟

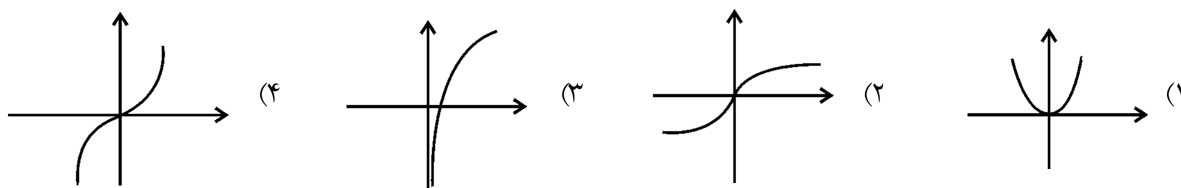


۱) فقط پوشا　　　۲) فقط یک به یک

۳) نه پوشا نه یک به یک　　　۴) هم پوشا و هم یک به یک

حل: با توجه به شکل، تابع فوق از $R \to R$ هم پوشا و هم یک به یک است.

تست: کدام نمودار، مربوط به نمودار یک تابع پوشا از $R \to R$ با دامنه‌ی R است؟



حل: پاسخ صحیح، گزینه‌ی ۴ است.

تناظر دوسوئی (تناظر یک به یک): هر تابع یک به یک و پوشا را یک تناظر دو سوئی می‌گویند.

تابع معکوس (تابع وارون): تابع f را در دامنه‌ی تعریفش، وارون‌پذیر (معکوس‌پذیر) گوئیم اگر و فقط اگر که، یک به یک باشد معکوس تابع f را با نماد $f^{-۱}$ نمایش می‌دهند. تابع معکوس f، از تغییر جای x و y در زوجهای مرتب f به دست می‌آید.

مثال: تابع معکوس $f = \{(۱,۳), (۲,۰), (۴,-۱)\}$ را بیابید؟

$f^{-۱} = \{(۳,۱), (۰,۲), (-۱,۴)\}$

نکته‌ی مهم: $f(\text{من}) = \text{تو} \Leftrightarrow f^{-۱}(\text{تو}) = \text{من}$

نکاتی راجع به تابع معکوس:

۱) نمودار توابع f و $f^{-۱}$ نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم متقارن هستند.

۲) برای تعیین ضابطه‌ی تابع معکوس یک تابع، ابتدا x را برحسب y حساب کرده، سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

۳) هرگاه $A\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ روی f باشد، $A'\left|\begin{matrix}b\\a\end{matrix}\right.$ روی f^{-1} است و بالعکس.

مثال: هرگاه $f(x) = x^3 + x + 8$، $f^{-1}(10)$ را بیابید؟

$$A'\left|\begin{matrix}10\\ \end{matrix}\right. \in f^{-1} \Rightarrow A\left|\begin{matrix}\\ 10\end{matrix}\right. \in f \Rightarrow 10 = x^3 + x + 8 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f^{-1}(10) = 1$$

۴) جهت تغییرات f و f^{-1} یکسان است، یعنی اگر f صعودی یا نزولی باشد، f^{-1} نیز چنین است.

۵) هرگاه تابع f پیوسته باشد، آنگاه تابع f^{-1} نیز پیوسته است و بالعکس.

۶) هرگاه شیب خط مماس در نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ واقع بر نمودار تابع f، برابر m باشد، آنگاه شیب خط مماس در نقطه‌ی $A'\left|\begin{matrix}b\\a\end{matrix}\right.$ واقع بر نمودار f^{-1}، برابر $\frac{1}{m}$ می‌باشد و بنابراین حاصلضرب این دو شیب، برابر ۱ می‌باشد، یعنی:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

۷) هرگاه شیب خط قائم در نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ واقع بر نمودار تابع f، برابر m باشد، آنگاه شیب خط قائم در نقطه‌ی $A'\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ واقع بر نمودار تابع f^{-1}، برابر $\frac{1}{m}$ می‌باشد و بنابراین حاصلضرب این دو شیب، برابر ۱ می‌باشد.

۸) هرگاه خط $y = x$، محور تقارن یک تابع مانند f باشد، آنگاه f و f^{-1} بر هم منطبقند.

۹) هرگاه $x = a$، محور تقارن تابعی باشد، تابع روی دامنه‌اش، معکوس‌ناپذیر است.

۱۰) معکوس تابع فرد، تابعی فرد است، در حالیکه توابع زوج، معکوس‌پذیر نیستند.

۱۱) هرگاه توابع f و g معکوس‌پذیر باشند، آنگاه توابع fog و gof نیز معکوسپذیرند و ضمناً داریم:

$$\begin{cases}(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}\\(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}\end{cases}$$

۱۲) هرگاه f معکوس g باشد، آنگاه g نیز معکوس f است.

۱۳) $(f^{-1})^{-1} = f$

۱۴) هرگاه $A\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ و $A'\left|\begin{matrix}b\\a\end{matrix}\right.$، دو نقطه به ترتیب روی f و f^{-1} باشند، آنگاه $AA' = 2|a-b|$

۱۵) ترکیب هر تابع با معکوسش، یک تابع همانی می‌باشد، یعنی:

$$\begin{cases}(f^{-1}of)(x) = x & ,(\forall x \in D_f)\\(fof^{-1})(x) = x & ,(\forall x \in D_{f^{-1}})\end{cases}$$

مثال: هرگاه $f(x) = x^3 + x$، حاصل $(f^{-1}of)(10)$ چند است؟

$(f^{-1}of)(10) = 10$

۱۶) به طور کلی در توابع هموگرافیک، اگر $a + d = 0$ باشد، آنگاه ضابطه‌های توابع f و f^{-1} با هم برابرند.

۱۷) هرگاه f و f^{-1} معکوس یکدیگر باشند، آنگاه:

$$\begin{cases}D_f = R_{f^{-1}}\\R_f = D_{f^{-1}}\end{cases}$$

۱۸) دو تابع $f^{-1}of$ و fof^{-1}، به شرطی با هم برابرند که $D_f = R_f$ باشد.

تست: هرگاه $f = \{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵)\}$ باشد، توابع $f^{-1}of$ و fof^{-1} در چند نقطه با هم برابرند؟

۱) یک نقطه ۲) دو نقطه ۳) سه نقطه ۴) هیچ نقطه

$$f^{-1} = \{(۲,۱),(۳,۲),(۴,۳),(۵,۴)\} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}of = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴)\} \\ fof^{-1} = \{(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵)\} \end{cases} \Rightarrow$$ در سه نقطه

۱۹) ممکن است تابعی معکوس‌پذیر باشد ولی نتوان ضابطه‌ی تابع معکوسش را به دست آورد مانند:

$f(x) = ۳x + \sin x$ یا $f(x) = x^۵ + x + ۱$ و ....

۲۰) $(f \cup g)^{-1} = f^{-1} \cup g^{-1}$

۲۱) $(f \cap g)^{-1} = f^{-1} \cap g^{-1}$

۲۲) $(f - g)^{-1} = f^{-1} - g^{-1}$

۲۳) به طوری کلی نمی‌توان گفت که تمام نقاط تلاقی دو تابع f و f^{-1} روی خط $y = x$، قرار دارند، ولی می‌توان گفت که نقاط تلاقی خط $y = x$ با خود تابع، نقاط تلاقی f و f^{-1} می‌باشند.

مثال: آیا همه‌ی نقاط تلاقی تابع $f(x) = -x^۳$ با تابع معکوسش روی خط $y = x$، قرار دارند؟

$$\begin{cases} f(x) = -x^۳ \\ f^{-1}(x) = -\sqrt[۳]{x} \end{cases} \Rightarrow -x^۳ = -\sqrt[۳]{x} \Rightarrow x^۹ - x = ۰ \Rightarrow x(x^۸ - ۱) = ۰$$

$$x = ۰, -۱, ۱ \Rightarrow A \begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix} \quad , B \begin{vmatrix} ۱ \\ -۱ \end{vmatrix} \quad , C \begin{vmatrix} -۱ \\ ۱ \end{vmatrix}$$

همان طوری که دیده می‌شود، فقط نقطه‌ی A روی نیمساز قرار دارد و نقاط B و C روی نیمساز قرار ندارند.

ضمناً با توجه به اینکه: $\begin{cases} y = -x^۳ \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^۳ + x = ۰ \Rightarrow x(x^۲ + ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow A \begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix}$ دیده می‌شود که نقطه‌ی تلاقی تابع با خط $y = x$ روی تابع معکوس f نیز قرار دارد.

۲۴) معکوس تابعی که یک به یک نیست، تابع نیست.

۲۵) هر تابع اکیداً یکنوا معکوس‌پذیر است.

تست: برد تابع معکوس تابع $f(x) = ۳x + \sqrt{x - ۱}$ کدام است؟

۱) $(۰, +\infty)$ ۲) R ۳) $[۰, +\infty)$ ۴) $[۱, +\infty)$

حل: برد تابع معکوس = دامنه‌ی خود تابع = $[۱, +\infty)$

۲۶) هرگاه تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته و اکیداً صعودی باشد، آنگاه تابع f^{-1} در بازه‌ی بسته‌ی $[f(a),f(b)]$ پیوسته و

اکیداً صعودی است و برعکس.

۲۷) هرگاه تابع f در بازه‌ی بسته‌ی [a,b] پیوسته و اکیداً نزولی باشد، آنگاه تابع f^{-1} در بازه‌ی بسته‌ی [f(b),f(a)] پیوسته و اکیداً نزولی است و برعکس.

۲۸) هرگاه تابع f دو یا چند ضابطه‌ای باشد، هنگامی معکوس‌پذیر است که

اولاً: تک تک ضابطه‌ها معکوس‌پذیر (یک به یک) باشند.

ثانیاً: اشتراک برد دو به دوی ضابطه‌ها، تهی باشد.

در این حالت برای تعیین ضابطه‌ی تابع معکوس، ابتدا معکوس هر یک از ضابطه‌ها را به دست آورده، سپس به جای دامنه‌ی هر ضابطه، بردش را قرار می‌دهیم.

مثال: ضابطه‌ی تابع معکوس توابع زیر را بیابید؟

۱) $f(x)=\sqrt{2-\sqrt{x-1}}$

$y^2=2-\sqrt{x-1}\Rightarrow x-1=(2-y^2)^2\Rightarrow x=1+(2-y^2)^2\Rightarrow f^{-1}(x)=1+(2-x^2)^2$

۲) $f(x)=64x^3+48x^2+12x+2$

$f(x)=(4x+1)^3+1\Rightarrow \sqrt[3]{y-1}=4x+1\Rightarrow \frac{\sqrt[3]{y-1}-1}{4}=x$

$f^{-1}(x)=\frac{1}{4}(\sqrt[3]{x-1}-1)$

۳) $f(x)=x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}$

$f(x)=(\sqrt{x}+1)^3-1\Rightarrow \sqrt[3]{y+1}=\sqrt{x}+1\Rightarrow x=(\sqrt[3]{y+1}-1)^2$

$f^{-1}(x)=(\sqrt[3]{x+1}-1)^2$

۴) $f(x)=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\Rightarrow ye^{2x}-y=e^{2x}+1\Rightarrow (y-1)e^{2x}=y+1\Rightarrow e^{2x}=\frac{y+1}{y-1}\Rightarrow 2x=\mathrm{Ln}\frac{y+1}{y-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{y+1}{y-1}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{x+1}{x-1}$

۵) $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & ,(x\ge 1)\\ \sqrt[3]{x-1} & ,(x<1)\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}y=x^2-1\Rightarrow x=\pm\sqrt{y+1}\Rightarrow x=\sqrt{y+1}\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}\\ y=\sqrt[3]{x-1}\Rightarrow y^3=x-1\Rightarrow x=y^3+1\Rightarrow f^{-1}(x)=x^3+1\end{cases}$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1} & ,(x\ge 0)\\ x^3+1 & ,(x<0)\end{cases}$

توجه کنید که تابع معکوس هر ضابطه را به دست آورده‌ایم، و سپس برد هر ضابطه را به عنوان دامنه‌ی تابع معکوس همان ضابطه قرار داده‌ایم.

۶) $f(x)=x+\lfloor x\rfloor\Rightarrow y=x+\frac{1}{2}\times 2\lfloor x\rfloor=x+\frac{1}{2}\lfloor x+\lfloor x\rfloor\rfloor$

$\Rightarrow y = x + \frac{۱}{۲}\lfloor y \rfloor \quad \Rightarrow x = y - \frac{۱}{۲}\lfloor y \rfloor \Rightarrow f^{-۱}(x) = x - \frac{۱}{۲}\lfloor x \rfloor$

۷) $f(x) = ۳x - |x - ۱|$

$$f(x) = \begin{cases} ۲x + ۱ & ,(x \geq ۱) \\ ۴x - ۱ & ,(x < ۱) \end{cases} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \begin{cases} \frac{x - ۱}{۲} & ,(x \geq ۳) \\ \frac{x + ۱}{۴} & ,(x < ۳) \end{cases}$$

۸) $y = \text{Arccos}\frac{۱ - x^۲}{۱ + x^۲} \Rightarrow \frac{۱ - x^۲}{۱ + x^۲} = \cos y \Rightarrow \cos y + x^۲\cos y = ۱ - x^۲$

$(۱ + \cos y)x^۲ = ۱ - \cos y \Rightarrow x^۲ = \frac{۱ - \cos y}{۱ + \cos y} \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{۱ - \cos y}{۱ + \cos y}} \quad \overset{x > ۰}{\Rightarrow} x = \sqrt{\frac{۱ - \cos y}{۱ + \cos y}}$

$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{\frac{۱ - \cos x}{۱ + \cos x}} = \tan\frac{x}{۲}$

۹) $h(x) = f(\frac{x}{۶})$, (h,f معکوس‌پذیرند) $\Rightarrow y = f(\frac{x}{۶}) \Rightarrow \frac{x}{۶} = f^{-۱}(y)$

$x = ۶f^{-۱}(y) \Rightarrow y = ۶f^{-۱}(x) \Rightarrow h^{-۱}(x) = ۶f^{-۱}(x)$

وجدان صدای خداوند است.

«لامارتین»

مردمان مردد هرگز موفق نیستند.

«ناپلئون»

مطالعه‌ی کتاب یعنی استحمام مغز.

«ژنرال گالینی»

تست ۱:

۱ـ تابع $f: R \to R$

$f(x) = x - \lfloor x \rfloor$

۱) یک به یک است. ۲) پوشاست. ۳) تناظر دو سوئی است. ۴) نه یک به یک است و نه پوشا.

۲ـ کدامیک از توابع زیر یک به یک و پوشا هستند؟

۱) $\begin{cases} f: R \to R \\ f(x) = x^2 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} g: R \to R \\ g(x) = x^3 + 1 \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} h: R \to R \\ h(x) = -|x-1| \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} t: R \to Z \\ t(x) = \lfloor x \rfloor \end{cases}$

۳ـ تابع $f: R - \{\frac{3}{2}\} \to R - \{-\frac{1}{2}\}$**، با کدام ضابطه می‌تواند پوشا باشد؟**

۱) $f(x) = \frac{x+2}{2x-3}$ ۲) $f(x) = \frac{4x-2}{2x-3}$ ۳) $f(x) = \frac{2+x}{4x-6}$ ۴) $f(x) = \frac{1-2x}{4x-6}$

۴ـ کدام تابع پوشا نیست؟

۱) $\begin{cases} f: R \to [-1, 1] \\ f(x) = \sin x \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} f: R \to R \\ f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & ,(x > 1) \\ 1 & ,(x = 1) \\ 3x - 4 & ,(x < 1) \end{cases} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f: R \to R \\ f(x) = Lnx \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} f: R \to R^+ \\ f(x) = 2^x \end{cases}$

۵ـ کدام یک از نقاط زیر، روی تابع معکوس تابع $f(x) = x^3 + x - 1$ **قرار ندارند؟**

۱) $(-1, 0)$ ۲) $(1, 1)$ ۳) $(9, 2)$ ۴) $(28, 3)$

۶ـ تابع معکوس $f(x) = |x - 2| - |x - 5|$ **وقتی** $2 \le x \le 5$ **باشد، چه ضریب زاویه‌ای دارد؟**

۱) 0 ۲) 2 ۳) -2 ۴) $\frac{1}{2}$

۷ـ کدام یک از توابع زیر، از R به R، یک به یک است؟

۱) $y = |x + 1|$ ۲) $y = x - \lfloor x \rfloor$ ۳) $y = \sqrt[3]{x}$ ۴) $y = x - |x|$

۸ـ چند تا از توابع زیر، یک به یک نیستند؟

الف) $y = \lfloor x \rfloor$ ب) $y = \sin x$ ج) $y = 2^x$ د) $y = \frac{2x+4}{2+x}$ هـ) $y = \begin{cases} x + 1 & ,(x \ge 0) \\ x + 2 & ,(x < 0) \end{cases}$

۱) ۲ مورد ۲) ۳ مورد ۳) ۴ مورد ۴) ۵ مورد

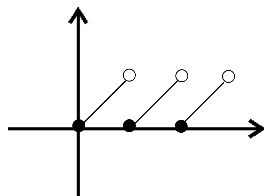
۹ـ هرگاه تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & ,(x > 2) \\ x + a & ,(x \le 2) \end{cases}$**، یک به یک باشد، حدود a، کدام است؟**

۱) $a \ge 1$ ۲) $a \le 1$ ۳) $a = 2$ ۴) $a \in R$

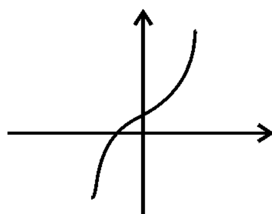
۱۰ـ تابع $f: N \to Z$ **با ضابطه‌ی** $f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & (\text{زوج } n) \\ \frac{n-1}{2} & (\text{فرد } n) \end{cases}$ **مفروض است، در این صورت:**

۱) f هم پوشا و هم یک به یک است. ۲) f نه پوشا و نه یک به یک است.

۳) f پوشاست ولی یک به یک نیست. ۴) f یک به یک است ولی پوشا نیست.



۱ـ (۴) با توجه به شکل، تابع مزبور از $R \to R$ نه یک به یک است نه پوشا



۲ـ (۲)

۳ـ (۴) تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ از {ریشه‌ی مخرج} $- R \to R -$ {مجانب افقی} پوشاست، بنابراین گزینه‌ای درست است که مجانب افقی‌اش $y = \frac{-۱}{۲}$ باشد.

۴ـ (۲) $D_f = R$

$$\begin{cases} x > ۱ \Rightarrow ۲x - ۱ > ۱ \Rightarrow y > ۱ \\ x = ۱ \Rightarrow y = ۱ \\ x < ۱ \Rightarrow ۳x - ۴ < -۱ \Rightarrow y < -۱ \end{cases} \Rightarrow$$

هم دامنه $\neq$ برد $(-\infty,-۱) \cup [۱,+\infty) =$ برد

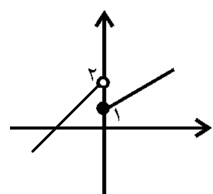
هم دامنه

۵ـ (۴) $f(۳) = ۲۹ \neq ۲۸ \Rightarrow (۳,۲۸) \notin f \Rightarrow (۲۸,۳) \notin f^{-۱}$

۶ـ (۴) $۲ \le x \le ۵ \Rightarrow f(x) = (x-۲) + (x-۵) = ۲x - ۷ \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x+۷}{۲} = \frac{۱}{۲}x + \frac{۷}{۲} \Rightarrow m = \frac{۱}{۲}$

۷ـ (۳) از روی شکل نیز به سادگی مشخص می‌شود که تابع مزبور یک به یک است. $\sqrt[۳]{x_۱} = \sqrt[۳]{x_۲} \Rightarrow x_۱ = x_۲$

۸ـ (۳) توابع (الف) و (ب) و (د) و (هـ) یک به یک نیستند. توابع (الف) و (ب) با توجه به شکلشان یک به یک نیستند، تابع (د) تابع ثابت $y = ۲$ $(x \neq -۲)$ است و لذا یک به یک نیست و تابع (هـ) نیز به دلیل اینکه برد دو ضابطه‌اش، اشتراک دارند، یک به یک نیست. در واقع برد ضابطه‌ی بالائی‌اش $y \ge ۱$ و برد ضابطه‌ی پائینی‌اش $y < ۲$ است و لذا اگر به عنوان مثال $y = \frac{۳}{۲}$ را انتخاب کنیم داریم:



$$\begin{cases} x + ۱ = \frac{۳}{۲} \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \\ x + ۲ = \frac{۳}{۲} \Rightarrow x = \frac{-۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow (\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}) \in f, (-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}) \in f \Rightarrow$$ f یک به یک نیست

البته با رسم شکل تابع (هـ) نیز بسادگی دیده می‌شود که تابع مزبور یک به یک نیست.

۹ـ (۲) چون تک تک ضابطه‌ها، در دامنه‌اشان یک به یک‌اند، لذا برد دو ضابطه نباید اشتراک داشته باشند بنابراین باید داشته باشیم:

$$\left.\begin{matrix} x > ۲ \Rightarrow ۲x > ۴ \Rightarrow ۲x - ۱ > ۳ \Rightarrow y > ۳ \\ x \le ۲ \Rightarrow x + a \le ۲ + a \Rightarrow y \le ۲ + a \end{matrix}\right\} ۲ + a \le ۳ \Rightarrow a \le ۱$$

۱۰ـ (۱) اولاً f، یک به یک است، زیرا تک تک ضابطه‌ها، یک به یک‌اند و اشتراک بردشان تهی است، ثانیاً f پوشا نیز هست زیرا برد تابع z است که با هم دامنه‌اش برابر است (برد ضابطه‌ی بالائی z^- و برد ضابطه‌ی پائینی $(\{۰\} \cup z^+$ است)

تست ۲:

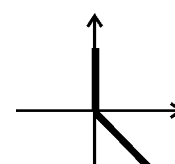
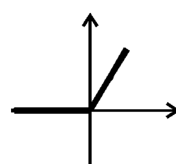
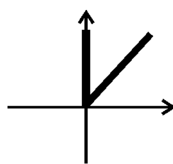
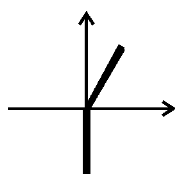
۱ـ تابع معکوس تابع $f(x) = \sin(\cos x)$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x) = \text{Arcsin}(\cos x)$
۲) $f^{-1}(x) = \text{Arccos}(\cos x)$
۳) $f^{-1}(x) = \text{Arccos}(\text{Arcsin}x)$
۴) $f^{-1}(x) = \text{Arcsin}(\text{Arccos}x)$

۲ـ هرگاه $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$، $f^{-1}(-\frac{۳}{۲})$ کدام است؟

۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $-\frac{۳}{۲}$
۳) $-\frac{۲}{۳}$
۴) $-\frac{۳}{۵}$

۳ـ منحنی نمایش تابع معکوس تابع $y = ۳x + |۳x|$ کدام است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۴ـ هرگاه $f(x) = \frac{x + \alpha}{\beta x + \gamma}$ و $f^{-1}(x) = f(x)$، γ کدام است؟

۱) -۱
۲) ۱
۳) -۲
۴) ۲

۵ـ تابع معکوس تابع $h(x) = \frac{۲ + f(x)}{۲ - f(x)}$ کدام است؟ (توابع f و h هردو معکوسپذیرند)

۱) $h^{-1}(x) = f^{-1}(\frac{۲ - x}{۲ + x})$
۲) $h^{-1}(x) = f^{-1}(\frac{۲x - ۲}{x + ۱})$
۳) $h^{-1}(x) = \frac{۲ + f^{-1}(x)}{۲ - f^{-1}(x)}$
۴) $h^{-1}(x) = f^{-1}(\frac{f^{-1}(x) - ۲}{۲ + f^{-1}(x)})$

۶ـ تابع معکوس تابع $y = \text{Arccos}(\log_a(x + ۱))$، کدام است؟

۱) $y = a^{\cos x} + ۱$
۲) $y = a^{\cos x} - ۱$
۳) $y = -a^{\cos x} + ۱$
۴) $y = -۱ - a^{\cos x}$

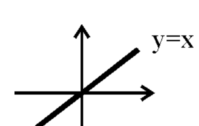
۷ـ اگر $g(x) = f(۳f(x^۳))$ و $f(۶) = ۱$ و $f(۸) = ۲$ و f وارون‌پذیر باشد، $g^{-1}(۱)$ کدام است؟

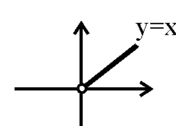
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۸
۴) ۳۶

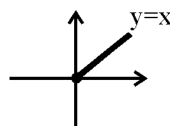
۸ـ هرگاه $f(x) = \begin{cases} ۲x + ۱ & , (x \geq ۲) \\ x + ۳ & , (x < ۲) \end{cases}$، $f^{-1}(-۷)$ کدام است؟

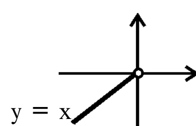
۱) -۱۳
۲) -۴
۳) -۱۰
۴) ۱۵

۹ـ تابع $f(x) = ۲^x$ داده شده است، نمودار تابع fof^{-1} کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

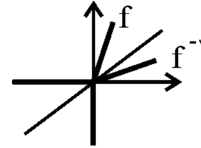
۱۰ـ هرگاه f تابعی وارون‌پذیر بوده و $g = f^{-1}$ وارون آن باشد و $g(x) = ۳ - f(۲x - ۱)$ باشد و $f(۴) = ۱$، آنگاه $g^{-1}(۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$
۲) $\frac{۵}{۲}$
۳) ۳
۴) ۱

۱ـ (۳) $y = \sin(\cos x) \Rightarrow \cos x = \text{Arcsin}y \Rightarrow x = \text{Arccos}(\text{Arcsin}y) \Rightarrow f^{-1}(x) = \text{Arccos}(\text{Arcsin}x)$

۲ـ (۱) $-\frac{۳}{۲} = x + \lfloor x \rfloor \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲}$

۳ـ (۴)



$$f(x) = \begin{cases} ۶x & ,(x \geq ۰) \\ ۰ & ,(x < ۰) \end{cases}$$

۴ـ (۱) ***یادآوری:*** در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$، هرگاه $a+d=۰$ شود آنگاه معکوس تابع با خودش برابر می‌شود.

$۱ + \gamma = ۰ \Rightarrow \gamma = -۱$

۵ـ (۲) $y = \frac{۲+f(x)}{۲-f(x)} \Rightarrow ۲y - yf(x) = ۲ + f(x) \Rightarrow (۱+y)f(x) = ۲y - ۲$

$f(x) = \frac{۲y-۲}{y+۱} \Rightarrow x = f^{-۱}(\frac{۲y-۲}{y+۱}) \Rightarrow y = f^{-۱}(\frac{۲x-۲}{x+۱}) \Rightarrow h^{-۱}(x) = f^{-۱}(\frac{۲x-۲}{x+۱})$

۶ـ (۲) $y = \text{Arccos}(\log_a^{(x+۱)}) \Rightarrow \log_a^{(x+۱)} = \cos y \Rightarrow x + ۱ = a^{\cos y}$

$x = a^{\cos y} - ۱ \Rightarrow y = a^{\cos x} - ۱$

۷ـ (۲) $۱ = f(۳f(x^۳)) \Rightarrow ۳f(x^۳) = f^{-۱}(۱) = ۶ \Rightarrow \begin{cases} f(x^۳) = ۲ \\ f(۸) = ۲ \end{cases} \Rightarrow x^۳ = ۸ \Rightarrow x = ۲$

۸ـ (۳) $-۷ = ۲x + ۱ \Rightarrow x = -۴$ غیرقابل قبول ، $-۷ = x + ۳ \Rightarrow x = -۱۰$

۹ـ (۲) $f(x) = ۲^x \Rightarrow f^{-۱}(x) = \log_۲^x \Rightarrow D_{f^{-۱}} = (۰, +\infty)$

$(fof^{-۱})(x) = x \quad (x \in D_{f^{-۱}}) \Rightarrow y = x \quad ,x \in (۰, +\infty)$

۱۰ـ (۲) $f(۴) = ۱ \Rightarrow f^{-۱}(۱) = ۴$

$g(x) = ۳ - f(۲x-۱) \Rightarrow y = ۳ - f(۲x-۱) \Rightarrow f(۲x-۱) = ۳ - y$

$۲x - ۱ = f^{-۱}(۳-y) \Rightarrow x = \frac{۱+f^{-۱}(۳-y)}{۲} \Rightarrow y = \frac{۱+f^{-۱}(۳-x)}{۲}$

$\Rightarrow g^{-۱}(x) = \frac{۱+f^{-۱}(۳-x)}{۲} \Rightarrow g^{-۱}(۲) = \frac{۱+f^{-۱}(۱)}{۲} = \frac{۱+۴}{۲} = \frac{۵}{۲}$

تا بدانجا رسید دانش من   که بدانم همی که نادانم

«ابوشکور بلخی»

فصل یازدهم

دستگاه اعداد حقیقی

۱) $N = \{۱,۲,۳, ...\}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی

۲) W یا $I = \{۰,۱,۲,۳, ...\}$ مجموعهٔ اعداد صحیح حسابی

۳) $Z = \{..., -۲ , -۱ , ۰ , ۱ , ۲ , ...\}$ مجموعهٔ اعداد صحیح نسبی

۴) $Q = \{\frac{p}{q} : p , q \in Z , q \neq ۰\}$ مجموعهٔ اعداد گویا

۵) $Q' = R - Q$ مجموعهٔ اعداد اصم یا گنگ

۶) $R = Q \cup Q'$ مجموعهٔ اعداد حقیقی

۷) $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$

۸) $R = (-\infty , +\infty)$

نکته: عدد ۰ عددی گویاست، زیرا $\frac{۰}{۱} = ۰$، ضمناً عددی زوج است زیرا ۱ عددی فرد است از طرف دیگر $۰ \times ۲ = ۰$

نکته: ۹) اعداد π و e اعدادی اصم هستند (عدد e را عدد نپر یا عدد اولّر می‌گویند) $e \simeq ۲/۷۱۸$ و $\pi \simeq ۳/۱۴$

۱۰) کسر اعشاری متناوب ساده: هر کسر به صورت $۰/\overline{۴}$، $۰/\overline{۲۵}$ یا $۰/\overline{۴۷۳}$ و... را یک کسر اعشاری متناوب ساده می‌گویند. (این کسرها فقط دورهٔ گردش دارند)

فرمول تبدیل کسرهای اعشاری متناوب ساده به کسر متعارفی:

$$\text{کسر اعشاری} = \frac{\text{رقم یا ارقام گردش}}{\text{به تعداد آنها ۹}}$$

مثال:

$$\begin{cases} ۰/\overline{۴} = \frac{۴}{۹} \\ ۰/\overline{۲۵} = \frac{۲۵}{۹۹} \\ ۰/\overline{۴۷۳} = \frac{۴۷۳}{۹۹۹} \end{cases}$$

۱۱) کسر اعشاری متناوب مرکب: هر کسر به صورت $۰/۲\overline{۸}$ یا $۰/۳\overline{۲۷}$ و ... را یک کسر اعشاری متناوب مرکب می‌گویند. (این کسرها، علاوه بر دورهٔ گردش، دورهٔ غیرگردش نیز دارند)

فرمول تبدیل کسرهای اعشاری متناوب مرکب به کسر متعارفی:

کسر اعشاری = (رقم یا ارقام گردش و غیرگردش − رقم یا ارقام غیرگردش) / (به تعداد گردش ۹ می‌گذاریم و جلوی آن، به تعداد غیرگردش ۰ می‌گذاریم)

مثال:

$$\begin{cases} ۰/۹\overline{۸} = \frac{۹۸-۹}{۹۰} = \frac{۸۹}{۹۰} \\ ۰/۳\overline{۲۷} = \frac{۳۲۷-۳}{۹۹۰} = \frac{۳۲۴}{۹۹۰} \end{cases}$$

کسرها
- متعارفی
- اعشاری
  - نامتناوب ←
    - متناهی (مختوم) ← ۰/۰۰۲ ← عددی است گویا
    - نامتناهی (نامختوم) ← $\pi \simeq$ ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۴... ← عددی است گنگ
  - متناوب ←
    - ساده ← $۰/\overline{۱۲}$ ← عددی است گویا
    - مرکب $۰/\overline{۳۲۷}$ ← عددی است گویا

«ادب خرجی ندارد، ولی همه چیز را خریداری می‌کند.»	«لاوی، تلناجیو»

سورها: علائم یا نمادهائی هستند که در جلوی یک گزاره قرار می‌گیرند و آن گزاره را به یک گزارهٔ سوری درست یا نادرست تبدیل می‌کنند.

سورها بر چهار نوع‌اند.

۱) سور عمومی (سور کلی): علامت این سور به صورت $\forall$ می‌باشد. نماد $\forall$ یعنی «به ازاء هر» یا «به ازاء جمیع»

۲) سور وجودی: علامت این سور به صورت $\exists$ می‌باشد. نماد $\exists$ یعنی «به ازاء بعضی» یا «وجود دارد»

۳) سور صفر: علامت این سور به صورت $\nexists$ می‌باشد. نماد $\nexists$ یعنی «به ازاء هیچ» یا «وجود ندارد»

۴) سور وحدت یا سوریگانه: علامت این سور به صورت $\exists!$ می‌باشد. نماد $\exists!$ یعنی «فقط و فقط یکی وجود دارد»

نامساویهای مهم

۱) $\forall x \in R : x^2 \geq 0$

۲) $\forall x \in R : x \geq x$

۳) $a > b \Rightarrow a \geq b$

۴) $\begin{cases} a \leq b, c > 0 \Rightarrow ac \leq bc \\ a \leq b, c < 0 \Rightarrow ac \geq bc \end{cases}$

۵) $\begin{cases} a \leq b, c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \leq \frac{b}{c} \\ a \leq b, c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} \geq \frac{b}{c} \end{cases}$

۶) $\begin{cases} a<b \\ c<d \end{cases} \Rightarrow a+c<b+d$

۷) $\begin{cases} ۰<a<b \\ ۰<c<d \end{cases} \Rightarrow ac<bd$

۸) $\begin{cases} a<b<۰ \\ c<d<۰ \end{cases} \Rightarrow ac>bd$

۹) $\{a<b \Rightarrow a^{۲n+۱}<b^{۲n+۱}, \sqrt[۲n+۱]{a} < \sqrt[۲n+۱]{b}$

۱۰) $\begin{cases} ۰<a<b \Rightarrow a^{۲n}<b^{۲n}, \sqrt[۲n]{a} < \sqrt[۲n]{b} \\ a<b<۰ \Rightarrow a^{۲n}>b^{۲n} \end{cases}$

۱۱) $\begin{cases} a>۰ \Rightarrow \frac{۱}{a}>۰ \\ a<۰ \Rightarrow \frac{۱}{a}<۰ \end{cases}$

۱۲) $\begin{cases} ۰<a<b \Rightarrow \frac{۱}{a}>\frac{۱}{b} \\ a<b<۰ \Rightarrow \frac{۱}{a}>\frac{۱}{b} \end{cases}$

۱۳) $\frac{bc}{a^۲}=\frac{\frac{b}{a}}{\frac{a}{c}}$,$(a,c\neq ۰)$

۱۴) $x^۲<a^۲, \ (a>۰) \xRightarrow[\text{دو طرف}]{\text{بین}} -a<x<a$

۱۵) $x^۲>a^۲, \ (a>۰) \Rightarrow$ $x<-a$ یا $x>a$

۱۶) $a^۲<x^۲<b^۲, (a,b>۰) \Rightarrow$ $-b<x<-a$ یا $a<x<b$

۱۷) $\begin{cases} a>۰ \Rightarrow a+\frac{۱}{a}\geq ۲ \Rightarrow \text{Min}(a+\frac{۱}{a})=۲ \Leftrightarrow a=۱ \\ \text{متحدالعلامه } b,a \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq ۲ \end{cases}$

۱۸) $\begin{cases} a<۰ \Rightarrow a+\frac{۱}{a}\leq -۲ \Rightarrow \text{Max}(a+\frac{۱}{a})=-۲ \Leftrightarrow a=-۱ \\ \text{مختلف‌العلامه } b,a \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq -۲ \end{cases}$

۱۹) $\{a\neq ۰ \Rightarrow \left|a+\frac{۱}{a}\right|\geq ۲ \quad ,(a+\frac{۱}{a}\leq -۲, a+\frac{۱}{a}\geq ۲)$

۲۰) $\begin{cases} a,b>۰ \Rightarrow (a+b)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b})\geq ۴ \\ a,b,c>۰ \Rightarrow (a+b+c)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c})\geq ۹ \\ a,b,c,...>۰ \Rightarrow (\underbrace{a+b+c+...}_{n})(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}+...)\geq n^۲ \end{cases}$

۲۱) $\begin{cases} a^۲ + b^۲ \geq ۲ab \\ a^۲ + b^۲ + c^۲ \geq ab + ac + bc \end{cases}$

۲۲) $\begin{cases} a,b > ۰ \Rightarrow a + b \geq ۲\sqrt{ab} \\ a,b,c > ۰ \Rightarrow a + b + c \geq ۳\sqrt[۳]{abc} \\ a,b,c,d > ۰ \Rightarrow a + b + c + d \geq ۴\sqrt[۴]{abcd} \end{cases}$

۲۳) $\begin{cases} a > ۰ \Rightarrow \sqrt[۲n]{a} > ۰ \\ a < ۰ \Rightarrow \sqrt[۲n]{a} \quad \text{تعریف نشده} \\ a > ۰ \Rightarrow \sqrt[۲n+۱]{a} > ۰ \\ a < ۰ \Rightarrow \sqrt[۲n+۱]{a} < ۰ \end{cases}$

«برای تربیت اراده، بهترین وقت ایام جوانی است.»	**«لابرویر»**

۲۴) $\begin{cases} a > ۱ \Rightarrow a < a^۲ < a^۳ < \ldots \to +\infty \\ a > \sqrt{a} > \sqrt[۳]{a} > \ldots \to ۱^+ \end{cases}$

عدد بزرگتر از ۱، هر چه به توان برسد بزرگ و بزرگتر می‌شود و به سمت $\infty +$، میل می‌کند و هر چه از آن ریشه گرفته شود، کوچک و کوچکتر می‌شود و به عدد ۱ (البته از راست) میل می‌کند.

۲۵) $a > ۱ \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = ۱^+ \end{cases}$

۲۶) $۰ < a < ۱ \Rightarrow \begin{cases} a > a^۲ > a^۳ > \ldots \to ۰^+ \\ a < \sqrt{a} < \sqrt[۳]{a} < \ldots \to ۱^- \end{cases}$

عدد بین ۰ و ۱، هرچه به توان برسد، کوچک و کوچکتر می‌شود و به سمت ۰ (البته از راست) میل می‌کند و هر چه از آن ریشه گرفته شود، بزرگ و بزرگتر می‌شود و به عدد ۱ (البته از چپ) میل می‌کند.

۲۷) $۰ < a < ۱ \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} a^n = ۰^+ \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = ۱^- \end{cases}$

۲۸) $a \times b \times c \times \ldots \times z = ۰ \Rightarrow a = ۰$ یا $b = ۰$ یا ... یا $z = ۰$

۲۹) $|a| + |b| + |c| + \ldots + |z| = ۰ \Rightarrow a = b = c = \ldots = z = ۰$

۳۰) $a^{\text{زوج}} + b^{\text{زوج}} + \ldots + z^{\text{زوج}} = ۰ \Rightarrow a = b = c = \ldots = z = ۰$

۳۱) $\sqrt[\text{زوج}]{a} + \sqrt[\text{زوج}]{b} + \ldots + \sqrt[\text{زوج}]{z} = ۰ \Rightarrow a = b = c = \ldots = z = ۰$

۳۲) $\forall n \in N : Lnn < n < n^۲ < n^۳ < ۲^n < ۳^n < n! < n^n < (n!)^۲$

تست: ریشه‌ی معادله‌ی $(x^۲ - ۱)^{۸۰} + \sqrt[۱۰]{x^۳ - ۱} + |x^۲ - x| = ۰$ **کدام است؟**

۱) ۰ ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ریشه ندارد.

حل:

$$\begin{cases} x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1 \\ x^3-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x^2-x=0 \Rightarrow x=0,1 \end{cases}$$ ریشه مشترک $\Rightarrow x=1$

«تواضع نردبان بزرگی و بلندی است.» «شکسپیر»

۳۳) نامساوی «کُشی ـ شوارتز» در حالات خاص:

حالت خاص دوتائی:

$$\forall a,b,x,y\in R: (ax+by)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

تساوی وقتی برقرار است که: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

حالت خاص سه‌تائی:

$$\forall a,b,c,x,y,z\in R: (ax+by+cz)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

تساوی وقتی برقرار است که: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

۳۴) نامساوی کُشی شوارتز در حالت کلی:

هرگاه a_1 و a_2 و ... و a_n و b_1 و b_2 و ... و b_n اعداد حقیقی دلخواهی باشند آنگاه:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

یا

$$(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)$$

تساوی وقتی برقرار است که: $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$

۳۵) ***نکته:*** در حالت خاص دو تائی و سه تائی داریم:

$$\begin{cases} \text{if} \quad ax+by=k \Rightarrow x^2+y^2 \ge \frac{k^2}{a^2+b^2} \Rightarrow \text{Min}\,(x^2+y^2)=\frac{k^2}{a^2+b^2} \\ \text{if} \quad ax+by+cz=k \Rightarrow x^2+y^2+z^2 \ge \frac{k^2}{a^2+b^2+c^2} \Rightarrow \text{Min}\,(x^2+y^2+z^2)=\frac{k^2}{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

«دری آهنین مقابل دیروز بکشید و فقط برای امروز زندگی کنید.» «دیل کارنگی»

تست: حاصل ... + ۰/۰۰۰۰۲ + ۰/۰۰۰۲ + ۰/۵۴۲ کدام است؟

۱) $\frac{542}{990}$ ۲) $\frac{488}{990}$ ۳) $\frac{488}{900}$ ۴) $\frac{540}{900}$

حل:

$$0/54\overline{2}=\frac{542-54}{900}=\frac{488}{900}$$

تست: اگر $a^۲ + a < ۰$ و $b^۲ < ۳b - ۲$، کدام نامساوی زیر درست است؟

۱) $۰ < a + b < ۲$ ۲) $۱ < a + b < ۲$ ۳) $-۳ < a + b < -۱$ ۴) $۰ < a + b < ۱$

حل:

$a^۲ + a < ۰ \Rightarrow -۱ < a < ۰$

$b^۲ - ۳b + ۲ < ۰ \Rightarrow ۱ < b < ۲$

$+$ ---------

$۰ < a + b < ۲$

تست: اگر $a < b$ و $c < d$، آنگاه کدام حکم زیر همواره درست است؟

۱) $ac < bd$ ۲) $|a-c| < |b-d|$ ۳) $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ ۴) $(a-b)(d-c) < ۰$

حل:

$$\begin{cases} a < b \Rightarrow \\ c < d \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} a - b < ۰ \\ d - c > ۰ \end{cases} \Rightarrow (a-b)(d-c) < ۰$$

تست: هرگاه $x > ۰$ و $\frac{x^۴+۱}{x^۲}$، کمترین مقدار خود را داشته باشد، مقدار عددی $۳x^۵ + ۲$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -۱ ۳) ۵ ۴) ۱

حل: $\frac{x^۴ + ۱}{x^۲} = x^۲ + \frac{۱}{x^۲} \Rightarrow Min(x^۲ + \frac{۱}{x^۲}) = ۲ \Rightarrow x^۲ = ۱ \overset{x>۰}{\Rightarrow} x = ۱$

$۳x^۵ + ۲ = ۵$

تست: اگر $x < ۵$ باشد، بیشترین مقدار عبارت $x + \frac{۱}{x-۵}$، کدام است؟

۱) ۵ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) ۷

حل:

$x < ۵ \Rightarrow x - ۵ < ۰$

$x + \frac{۱}{x-۵} = x - ۵ + \frac{۱}{x-۵} + ۵ \leq -۲ + ۵ \leq ۳$

لذا گزینه‌ی (۳) صحیح است.

تست: اگر $۰ < a < ۱$، کدام گزینه درست است؟

۱) $a^{۱۰} > a^۹$ ۲) $\sqrt{a} < a$ ۳) $\sqrt[۷]{a} > \sqrt[۵]{a}$ ۴) $\frac{۱}{a} < a^۳$

حل: گزینه ۳ درست می‌باشد.

$۰ < a < ۱ \Rightarrow \sqrt[۷]{a} > \sqrt[۵]{a}$

تست: با فرض $x + y = ۱۵$، $Min(\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y})$ کدام است؟ $(x,y > ۰)$

۱) $\frac{۲}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۱۵}$ ۴) $\frac{۴}{۱۵}$

حل:

$x , y > ۰ \Rightarrow (x + y)(\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y}) \geq ۴$

$۱۵(\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y}) \geq ۴$

$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} \geq \frac{۴}{۱۵} \Rightarrow Min(\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y}) = \frac{۴}{۱۵}$

تست: اگر $x , y > ۰$ و $۳x + ۴y = ۷$، $Min(x^۲ + y^۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۴۹}{۱۶}$ ۲) $\frac{۴۹}{۲۵}$ ۳) $\frac{۴۹}{۹}$ ۴) $\frac{۲۵}{۴۹}$

حل: $Min(x^۲ + y^۲) = \frac{k^۲}{a^۲ + b^۲} = \frac{۴۹}{۹ + ۱۶} = \frac{۴۹}{۲۵}$

«دانستن توانستن است.» «فردوسی»

تست: اگر $b > a > 0$ و $a^2 - 6ab + b^2 = 0$، آنگاه حاصل $\frac{a+b}{a-b}$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) -2 ۳) $-\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

حل:

$$a^2 - 6ab + b^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = 8ab \\ a^2 - 2ab + b^2 = 4ab \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+b)^2 = 8ab \\ (a-b)^2 = 4ab \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{a-b} = +\sqrt{2} & \text{غیرقابل قبول} \\ \frac{a+b}{a-b} = -\sqrt{2} & \text{قابل قبول} \end{cases} \quad ,(b > a > 0 \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} < 0)$$

تست: برد تابع $y = \tan x + \cot x$، کدام است؟

۱) $-\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}$ ۲) $-2 \le y \le 2$ ۳) $y \ge 2$ یا $y \le -2$ ۴) $y \ge \sqrt{2}$ یا $y \le -\sqrt{2}$

حل:

$$y = \tan x + \frac{1}{\tan x}$$

$$\begin{cases} \tan x > 0 \Rightarrow y \ge 2 \\ \tan x < 0 \Rightarrow y \le -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ x در ناحیهٔ اول یا سوم باشد.

$\Rightarrow$ x در ناحیهٔ دوم یا چهارم باشد.

تست: برد تابع $y = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ کدام است؟

۱) $y \ge 0$ ۲) $y \ge 2$ ۳) $1 \le y \le 2$ ۴) $0 \le y \le 2$

حل: ***نکته:*** $a > 0 \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$

$$y = \frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ge 2$$

«باید زیاد مطالعه کنید تا بفهمید که هیچ نمی‌دانید.» «مونتسکیو»

مجموعه‌های شمارا: به هر مجموعه می‌گویند که اعضایش قابل شمارش باشد، به عبارت دیگر با مجموعهٔ اعداد طبیعی و یا قطعه‌ی از اعداد طبیعی مانند $N_k = \{1, 2, 3, ..., k\}$، در تناظر یک به یک باشد مانند Q, Z, N و کلیهٔ مجموعه‌های متناهی و ...

مجموعه‌های ناشمارا: به هر مجموعه که شمارا نباشد، ناشمارا می‌گویند.

مانند $[4,7]$ و R و ...

مجموعه‌های متناهی: به هر مجموعه می‌گویند که تعداد اعضایش، پایان‌پذیر (تمام شدنی) باشد، حتی اگر بسیار زیاد باشد، مانند: $\{1,2,3, ..., 1000\}$، مجموعهٔ انسانهای روی کرهٔ زمین، مجموعهٔ موهای سر یک انسان و ...

مجموعه‌های نامتناهی: به هر مجموعه می‌گویند که متناهی نباشد مانند R , Q , N و [۲,۳]

مجموعه‌های از بالا کراندار (محدود از بالا): به هر زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی مانند A می‌گویند که کلیهٔ اعضایش از عددی حقیقی مانند b (که الزاماً ممکن است در A نباشد) کوچکتر (و یا کوچکتر مساوی) باشند به عدد b و هر عدد حقیقی بزرگتر از آن، یک کران یا یک بند بالای مجموعه می‌گویند. مانند [۲,۴)، (۰ , ∞-) و هر مجموعه‌ی متناهی .

تست: مجموعهٔ کرانهای بالای مجموعهٔ {۰,۶,۷,۸,۹} کدام است؟

۱) {... ,۹,۱۰,۱۱} ۲) (۹,+ ∞) ۳) [۹,+ ∞) ۴) {... ,۱۰,۱۱,۱۲}

گزینه‌ی ۳ صحیح است.

نکته: مجموعهٔ اعداد طبیعی از بالا کراندار نیست. (یادت نره)

مجموعه‌های از پائین کراندار (محدود از پائین): به هر زیر مجموعه از اعداد حقیقی مانند A می‌گویند که کلیهٔ اعضایش از عددی حقیقی مانند a (که الزاماً ممکن است در A نباشد) بزرگتر (و یا بزرگتر مساوی) باشند به عدد a و هر عدد حقیقی کوچکتر از آن، یک کران یا یک بند پائین A می‌گویند.

مانند (∞ +,۰]، N و (۲,۸) و هر مجموعهٔ متناهی .

مجموعه‌های کراندار (محدود): به هر مجموعه می‌گویند که هم از بالا و هم از پائین کراندار باشد، به عبارت دیگر، کلیهٔ اعضای مجموعه، بین دو عدد حقیقی باشند، مانند [۳,۷)، (۰,۱۰) و {۱۰۰ , ... ,۱,۲} و ...

نکته: هر مجموعهٔ متناهی، کراندار است ولی عکس آن همیشه درست نیست به عنوان مثال مجموعهٔ [۰,۸) کراندار هست ولی متناهی نیست.

مجموعه‌های بی‌کران (نامحدود): به هر مجموعه می‌گویند که حداقل از یک طرف (بالا یا پائین) کراندار نباشد، مانند Q', N , Z , Q, (۹,+ ∞) , [۱۰,∞-) و (∞- , ∞ +) =R

«اشکهای دیگران را به شادی بدل کردن، بالاترین خوشبختی است.»	«بودا»

تعریف سوپریمم یک مجموعه: به کوچکترین کران بالای یک مجموعه (در صورت وجود) سوپریمم آن مجموعه می‌گویند، توجه داشته باشید که سوپریمم یک مجموعه، می‌تواند متعلق به مجموعه باشد و یا نباشد.

مثال:
$$\begin{cases} \sup\{۱,۲,...,۱۰۰\}=۱۰۰ \\ \sup(۰,+\infty)= \text{وجود ندارد} \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \sup(۲,۶)=۶ \\ \sup(۲,۶]=۶ \end{cases}$$

تعریف اینفیمم یک مجموعه: به بزرگترین کران پائین یک مجموعه (در صورت وجود) اینفیمم آن مجموعه می‌گویند، توجه داشته باشید که اینفیمم یک مجموعه، می‌تواند متعلق به مجموعه باشد و یا نباشد.

مثال:
$\begin{cases} \inf(۰,۶)=۰ \quad \inf(N)=۱ \\ \inf[۰,۶)=۰ \quad \inf(-\infty,۶)= \end{cases}$ وجود ندارد

تعریف Max یا عضو انتهای یک مجموعه: به بزرگترین عضو یک مجموعه (در صورت وجود) Max آن مجموعه می‌گویند، به عبارت دیگر، هرگاه، عددی مانند M متعلق به A وجود داشته باشد به طوریکه $\forall x \in A: x \leq M$، M را Max A می‌گویند، توجه داشته باشید که Max یک مجموعه، حتماً متعلق به آن مجموعه است در واقع ماکزیمم A، کوچکترین کران بالای A یا همان سوپریمم A است به شرط آنکه عضو آن نیز باشد.

مثال:
$\begin{cases} Max(۲,۹]=۹ \\ Max(۲,۹)= \text{وجود ندارد} \\ Max(-N)=-۱ \end{cases}$

نکته: همیشه Max یک مجموعه (در صورت وجود)، SUP آن مجموعه نیز هست، اما سوپریمم یک مجموعه (در صورت وجود) ممکن است Max آن نباشد، چراکه ممکن است متعلق به مجموعه نباشد، لذا اگر سوپریمم یک مجموعه متعلق به آن باشد، این سوپریمم ماکزیمم مجموعه نیز هست.

مثال:
$\begin{cases} \sup(-\infty,۰]=۰ \\ Max(-\infty,۰]=۰ \end{cases}$ $\begin{cases} \sup(-\infty,۲)=۲ \\ Max(-\infty,۲)= \text{وجود ندارد} \end{cases}$

تعریف Min یا عضو ابتدای یک مجموعه: به کوچکترین عضو یک مجموعه (در صورت وجود) Min آن مجموعه می‌گویند، به عبارت دیگر، هرگاه، عددی مانند m متعلق به A وجود داشته باشد به طوریکه: $\forall x \in A: x \geq m$، m را Min A می‌گویند، توجه داشته باشید که Min یک مجموعه، حتماً متعلق به آن مجموعه است. در واقع می‌نیمم A، بزرگترین کران پائین A (یا همان اینفیمم A) است بشرط آنکه عضو آن نیز باشد.

مثال:
$\begin{cases} Min(-۴,\infty)= \text{وجود ندارد} \\ Min[-۴,\infty)=-۴ \\ Min(N)=۱ \end{cases}$

نکته: همیشه Min یک مجموعه (در صورت وجود) inf آن مجموعه نیز هست، اما اینفیمم یک مجموعه (در صورت وجود) ممکن است Min آن نباشد، چراکه ممکن است متعلق به مجموعه نباشد، لذا اگر اینفیمم یک مجموعه، متعلق به آن باشد، این اینفیمم می‌نیمم مجموعه نیز هست.

مثال:
$\begin{cases} \inf[۱,۴)=۱ \\ Min[۱,۴)=۱ \end{cases}$ $\begin{cases} \inf(۰,+\infty)=۰ \\ Min(۰,+\infty)= \text{وجود ندارد.} \end{cases}$

«ارزنده‌ترین مرحلهٔ خرد، خودشناسی است.» «امام رضا (ع)»

نکته: در مجموعه‌های متناهی Max و sup یکی هستند همچنین Min و inf نیز یکی هستند. جهت درک بهتر تعاریف فوق به

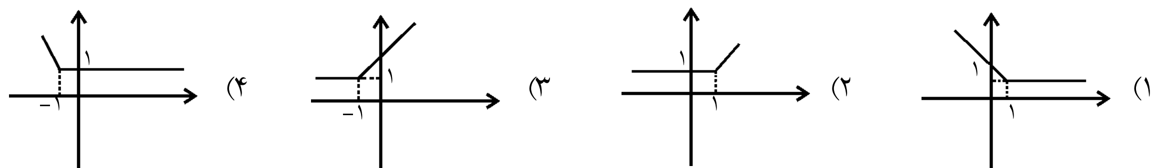
جدول زیر توجه کنید در این جدول × به معنای خیر و ✓ به معنای بله و -- به معنای ندارد می‌باشند.

مجموعه	شمارا	متناهی	کراندار از بالا	کراندار از پائین	کراندار	مجموعهٔ کرانهای بالا	مجموعهٔ کرانهای پائین	sup	Max	inf	Min
(۳,۵]	×	×	✓	✓	✓	[۵,+∞]	(-∞,۳]	۵	۵	۳	--
N	✓	×	×	✓	×	--	(-∞,۱]	--	--	۱	۱
(-∞,۰)	×	×	✓	×	×	[۰,+∞)	--	۰	--	--	--
{۲,۴,...,۲۰۰}	✓	✓	✓	✓	✓	[۲۰۰,+∞)	(-∞,۲]	۲۰۰	۲۰۰	۲	۲
R	×	×	×	×	×	--	--	--	--	--	--
$\{\frac{1}{n}:n\in N\}$	✓	×	✓	✓	✓	[۱,+∞)	(-∞,۰]	۱	۱	۰	--

نکته:

$$\begin{cases} \sup\{a,b\} = \text{Max}\{a,b\} = \frac{a+b}{۲} + \frac{|a-b|}{۲} \\ \inf\{a,b\} = \text{Min}\{a,b\} = \frac{a+b}{۲} - \frac{|a-b|}{۲} \\ \text{Max}\{-a,-b\} = -\text{Min}\{a,b\} \end{cases}$$

تست: نمودار $y = \text{Max}\{۱,x\}$ کدام است؟



حل:

$$y = \text{Max}\{۱,x\} = \begin{cases} x & ,(x \geq ۱) \\ ۱ & ,(x < ۱) \end{cases}$$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

ویژگی یا اصل ارشمیدسی اعداد حقیقی: برای هر دو عدد حقیقی x و y به طوریکه $x > ۰$ باشد، عددی طبیعی مانند n وجود دارد به طوریکه $nx > y$ به عبارت معادل: $\exists n \in N : nx > y$

چیستان ریاضی: عددی حقیقی هستم، منفی نیستم و از هر عدد مثبتی، کوچکترم، من کیستم؟ واضح است که آن عدد صفر است.

این چیستان را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد که یکی از تمرینات کتاب درسی حساب و دیفرانسیل و انتگرال نیز هست.

«هرگاه به ازاء هر $\varepsilon > ۰$ داشته باشیم: $۰ \leq x < \varepsilon$ ثابت کنید: $x = ۰$»

از این چیستان در حل مسائل و تستهای مختلف استفاده می‌شود.

تست: هرگاه به ازاء هر $n \in N$ داشته باشیم: $۰ \leq x^۲+x < \frac{۱}{n}$، مقادیر x کدامند؟

۱) ۰ ۲) ۱- ۳) ۰ یا ۱- ۴) ۰ یا ۱

حل: طبق چیستان یا تمرین فوق (با فرض $\varepsilon = \frac{1}{n}$) نتیجه می‌شود که:

$x^2 + x = 0 \Rightarrow x = 0$ یا -1

تست: هرگاه به ازاء هر $n \in N$ داشته باشیم: $3 \le x^2 + 2x < \frac{3n^2+1}{n^2}$، مقادیر x عبارتند از:

۱) ۰ یا ۲- ۲) ۱- یا ۳ ۳) ۱ یا ۲- ۴) ۳- یا ۱

حل: از طرفین نامساوی فوق ۳ واحد کم می‌کنیم لذا داریم:

$$0 \le x^2 + 2x - 3 < \frac{1}{n^2}$$

با فرض $\varepsilon = \frac{1}{n^2}$، طبق چیستان یا تمرین فوق داریم:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = \frac{c}{a} = -3 \end{cases}$$

قضیه: بین هر دو عدد حقیقی متمایز،

الف) حداقل یک عدد گویا وجود دارد. ب) حداقل یک عدد اصم وجود دارد.

اثبات الف: فرض می‌کنیم a و b دو عدد حقیقی متمایز باشند به طوریکه $a < b$، لذا $b - a > 0$، طبق خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی (و البته با فرض $x = b - a$) عددی طبیعی مانند n وجود دارد به طوریکه $n(b - a) > 1$ (در اینجا مقدار y را در خاصیت ارشمیدسی برابر ۱ فرض کرده‌ایم)

$$\Rightarrow b - a > \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow b > a + \frac{1}{n} \quad (3)$$

بنابر ویژگی ($\forall x \in R \; ; \exists n \in Z: n \le x < n+1$)، نتیجه می‌شود که عددی صحیح مانند m هست به طوریکه

$$m-1 \le na < m$$

$$\begin{cases} na < m \Rightarrow a < \frac{m}{n} & (1) \\ m - 1 < na \Rightarrow \frac{m-1}{n} < a \Rightarrow \frac{m}{n} - \frac{1}{n} < a \Rightarrow \frac{m}{n} < a + \frac{1}{n} & (2) \end{cases}$$

واضح است که $\frac{m}{n}$ عددی است گویا. حال ادعا می‌کنیم که همین $\frac{m}{n}$ عدد گویای مطلوبست کافی است ثابت کنیم $\frac{m}{n}$ بین a و b است.

برطبق روابط ۱ و ۲ و ۳ داریم:

$$a < \frac{m}{n} < a + \frac{1}{n} < b$$

لذا ثابت کردیم بین هر دو عدد حقیقی متمایز a و b، عددی گویا مانند $\frac{m}{n}$ وجود دارد.

اثبات ب: مشابه بند الف فرض می‌کنیم a و b دو عدد حقیقی متمایز باشند و $a < b$، لذا $\frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}}$، برطبق بند (الف)، عددی گویا مانند r وجود دارد به طوریکه $\frac{a}{\sqrt{2}} < r < \frac{b}{\sqrt{2}}$ و یا $a < r\sqrt{2} < b$، واضح است که $r\sqrt{2}$ عددی اصم است که بین a و b قرار دارد و بنابراین اثبات (ب) نیز تمام است.

تعریف: زیر مجموعهٔ B از مجموعهٔ A را $(B \subseteq A \subseteq R)$ در A چگال گوئیم هرگاه بین هر دو عضو متمایز از A، عضوی از B، واقع باشد.

نتیجه: با توجه به تعریف فوق و قضیهٔ قبل، هر دو مجموعهٔ Q و Q' در R چگالند.

قضیه: هر زیر مجموعهٔ غیر خالی از اعداد حقیقی که از بالا کراندار باشد، sup دارد.

قضیه: هر زیر مجموعهٔ غیر خالی از اعداد حقیقی که از پائین کراندار باشد، inf دارد.

تعریف: مجموعهٔ A را کامل گویند هرگاه هر زیر مجموعهٔ غیرخالی و کراندار از بالای آن، sup داشته باشد.

قضیه د. د. کیند: مجموعهٔ اعداد حقیقی یعنی R، کامل است.

اصل دد کیند (اصل موضوع تمامیت یا اصل کمال): گاهی از قضیهٔ فوق به عنوان اصل د.د.کیند و یا اصل کمال یاد می‌کنند. اصل کمال در واقع بیانگر آن است که هر زیر مجموعهٔ غیرخالی کراندار از بالای R، sup دارد.

نکته: Q کامل نیست زیرا مجموعهٔ $A=(\sqrt{۲},\sqrt{۳})\cap Q$ زیر مجموعه‌ای از اعداد گویاست که غیر خالی و کراندار از بالا بوده ولی، sup ندارد. (توجه داشته باشید که $(\sqrt{۲} \notin Q)$) در واقع مجموعهٔ A، مجموعهٔ تمام اعداد گویای موجود در بازه‌ی $(\sqrt{۲},\sqrt{۳})$ است.

تست: کدام مجموعهٔ زیر کراندار ولی نامتناهی است؟

۱) N ۲) $(-\infty,۲)$ ۳) $[۰,۱۰]$ ۴) $\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$

گزینه‌ی (۳) صحیح است.

تست: کدام گزینه راجع به مجموعهٔ N- (مجموعهٔ قرینهٔ اعداد طبیعی) نادرست است؟

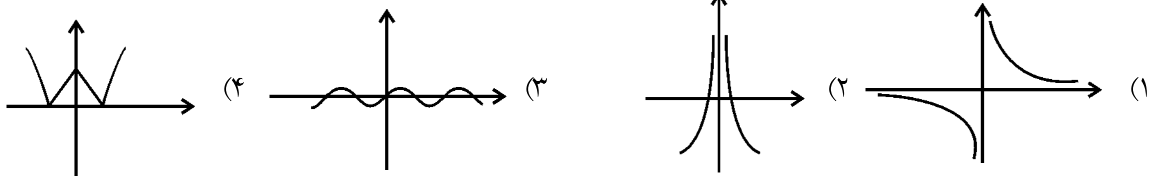
۱) این مجموعه از پائین کراندار است. ۲) $\sup(-N) = -۱$

۳) این مجموعه از بالا کراندار است. ۴) این مجموعه Min ندارد.

حل: گزینه‌ی (۱) صحیح می‌باشد. $-N = \{..., -۳, -۲, -۱\}$

تعریف تابع کراندار: تابع f را کراندار گوئیم، هرگاه بُردش کراندار باشد.

تست: نمودار چهار تابع در زیر داده شده است، کدام نمودار مربوط به یک تابع کراندار می‌باشد؟



حل: گزینه‌ی (۳) صحیح می‌باشد.

تست: کدام مجموعهٔ زیر کراندار است؟

۱) $\{\frac{۱}{x} : x > ۰\}$ ۲) $\{\frac{۱}{x^۲-۹} : |x| < ۳\}$ ۳) $\{\frac{۱}{x+۲} : x \in (-\infty,-۲)\}$ ۴) $\{\frac{۱}{x-۴} : ۶ < x < ۱۰\}$

حل:

$$۶ < x < ۱۰ \Rightarrow ۲ < x - ۴ < ۶ \Rightarrow \frac{۱}{۶} < \frac{۱}{x-۴} < \frac{۱}{۲}$$

مجموعهٔ گزینه‌ی ۱ از بالا کراندار نیست زیرا: $\lim_{x \to ۰^+} \frac{۱}{x} = +\infty$

مجموعهٔ گزینه‌ی ۲ از پائین کراندار نیست. زیرا: $\lim_{x \to ۳^-} \frac{۱}{x^۲ - ۹} = -\infty$

مجموعهٔ گزینهٔ ۳ از پائین کراندار نیست. زیرا: $\lim_{x \to (-۲)^-} \frac{۱}{x+۲} = -\infty$

تست: مجموعهٔ $A = \{\frac{۱}{x-۲} : ۸ \leq x < ۱۸\}$ **مفروض است، کدام گزینه نادرست است؟**

۱) $\sup(A) = \frac{۱}{۶}$ ۲) A کراندار است.

۳) $\min(A) = \frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\max(A) = \frac{۱}{۶}$

حل: لذا گزینه‌ی (۳) درست است.

$$۸ \leq x < ۱۸ \Rightarrow ۶ \leq x - ۲ < ۱۶ \Rightarrow \frac{۱}{۱۶} < \frac{۱}{x-۲} \leq \frac{۱}{۶}$$

تست: کدام مجموعهٔ زیر متناهی است؟

۱) $A = \{n \in N : n^۲ < n^۳\}$ ۲) $B = \{n \in N : n! > ۲^n\}$

۳) $C = \{n \in N : ۲^n < n^۲\}$ ۴) $D = \{n \in N : \text{Ln}n < n\}$

حل: با توجه به سرعت رشد، چون سرعت رشد ۲^n بیشتر از $n^۲$ است لذا مجموعهٔ گزینه‌ی ۳ متناهی است، در واقع

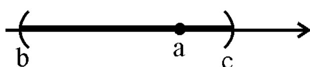
$$\begin{cases} n^۲ \to ۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, ... \\ ۲^n \to ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ... \end{cases}$$

همان طوریکه دیده می‌شود فقط به ازاء یک مقدار n ($n = ۳$)، نامساوی $۲^n < n^۲$ برقرار است لذا: $C = \{۳\}$

همسایگی

تعریف همسایگی باز یک عدد: فرض می‌کنیم a عددی حقیقی باشد، هربازهٔ باز شامل a را یک همسایگی باز عدد a می‌نامیم. در شکل زیر بازه‌ی (b,c) یک همسایگی a است. زیرا $a \in (b,c)$

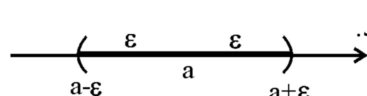
در تعریف فوق،



لزومی ندارد که a وسط بازه باشد.

مثال: هر یک از بازه‌های (۳,۵)، (۰,۱۲) و (۳/۹۹ , ۴/۰۱) و ... یک همسایگی باز عدد ۴ هستند، در حالیکه بازهٔ (۶,۹) یک همسایگی باز عدد ۴ نیست زیرا $۴ \notin (۶,۹)$

تعریف همسایگی باز متقارن یک عدد: در تعریف فوق، اگر a وسط بازهٔ (b,c) باشد، بازهٔ (b,c) را یک همسایگی باز متقارن عدد a می‌گویند، در حالت کلی هر همسایگی باز متقارن عدد a بازه‌ی بازی است به صورت $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ که در آن $\varepsilon > ۰$ است، عدد a را مرکز همسایگی و ε را شعاع همسایگی می‌گویند.



به شکل مقابل توجه کنید.

به عنوان مثال بازه‌ی (۳,۵) یک همسایگی باز متقارن عدد ۴ است ۴ مرکز این همسایگی و عدد ۱ شعاع همسایگی است.

$(۳,۵) = (۴-۱ , ۴+۱)$

نکته: هرگاه بازه‌ی باز (a,b) یک همسایگی متقارن باشد، مرکز و شعاع آن به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} \text{مرکز} = \frac{a+b}{۲} \\ \text{شعاع} = \frac{b-a}{۲} \end{cases}$$

مثال: مرکز و شعاع همسایگی متقارن (۳,۱۱) را بیابید؟ $\begin{cases} \text{مرکز} = ۷ \\ \text{شعاع} = ۴ \end{cases}$

تذکر: هر همسایگی باز متقارن به صورت $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ را می‌توان به صورت قدر مطلقی $|x - a| < \varepsilon$ نیز نمایش داد.

در واقع داریم: $(a - \varepsilon , a + \varepsilon) = \{x \in R \mid a-\varepsilon < x < a + \varepsilon\}$

$$= \{x \in R \mid -\varepsilon < x - a < \varepsilon\}$$

$$= \{x \in R : |x - a| < \varepsilon\}$$

در نامساوی $|x - a| < \varepsilon$، a مرکز همسایگی و ε شعاع آن است.

مثال: مرکز و شعاع هر یک از همسایگیهای متقارن زیر را بدست آورده و سپس آنها را به صورت بازه بنویسید.

$$۱)\ |x - ۲| < ۱ \rightarrow \begin{cases} \text{مرکز} = ۲ \\ \text{شعاع} = ۱ \\ \text{بازه} = (۲-۱,۲+۱) = (۱,۳) \end{cases}$$

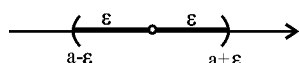
$$۲)\ |x + ۴| < ۳ \rightarrow \begin{cases} \text{مرکز} = -۴ \\ \text{شعاع} = ۳ \\ \text{بازه} = (-۴-۳ , -۴+۳) = (-۷,-۱) \end{cases}$$

$$۳)\ |۲x - ۶| < ۵ \xrightarrow{\div ۲} |x - ۳| < \frac{۵}{۲} \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز} = ۳ \\ \text{شعاع} = ۲/۵ \\ \text{بازه} = (۳-۲/۵ , ۳+۲/۵) = (۰/۵,۵/۵) \end{cases}$$

$$۴)\ |\frac{x}{۵} + \frac{۱}{۴}| < \frac{۱}{۱۵} \xrightarrow{\times ۵} |x + \frac{۵}{۴}| < \frac{۱}{۳} \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز} = -\frac{۵}{۴} \\ \text{شعاع} = \frac{۱}{۳} \\ \text{بازه} = (-\frac{۵}{۴}-\frac{۱}{۳} \text{ و } -\frac{۵}{۴}+\frac{۱}{۳}) = (-\frac{۹}{۱۲} \text{ و } \frac{-۱۱}{۱۲}) \end{cases}$$

تعریف همسایگی باز متقارن محذوف (حذف شده یا سوراخ شده یا سفتهٔ) یک عدد:

هرگاه از همسایگی متقارن a، عدد a را حذف کنیم، همسایگی متقارن به دست آمده را یک همسایگی باز متقارن محذوف عدد a می‌گویند. به عبارت دیگر، هر همسایگی باز متقارن محذوف عدد a، یک مجموعه به صورت $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) - \{a\}$ است. به شکل توجه کنید.



مثال: مجموعهٔ {۱۰} - (۴,۱۶) یک همسایگی باز متقارن محذوف عدد ۱۰ به شعاع ۶ می‌باشد.

(۴,۱۶) - {۱۰} = (۱۰−۶, ۱۰+۶) - {۱۰}

تذکر: هر همسایگی باز متقارن محذوف a را به یکی از صورتهای زیر می‌توان نمایش داد.

نمادهای مختلف نمایش همسایگی متقارن محذوف a:

۱) $(a - \varepsilon , a + \varepsilon) - \{a\}$

۲) $(a - \varepsilon , a) \cup (a , a + \varepsilon)$

۳) $\{x \in R : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon , x \neq a\}$

۴) $\{x \in R : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$

تست: کدامیک از مجموعه‌های زیر یک همسایگی باز متقارن محذوف عدد ۵ می‌باشند؟

۱) $\{x \in R : 0 < |2x - 10| < 1\}$　　۲) $(-5, 15) - \{5\}$

۳) $(-1,5) \cup (5,11)$　　۴) هر سه گزینه

حل: پاسخ صحیح گزینه‌ی ۴ می‌باشد.

نکته: اجتماع و اشتراک هر دو همسایگی باز یک عدد، باز هم یک همسایگی باز آن عدد است.

نکته: اجتماع و اشتراک هر دو همسایگی باز متقارن یک عدد، باز هم یک همسایگی باز متقارن آن عدد است.

نکته: اجتماع و اشتراک هر دو همسایگی باز متقارن محذوف یک عدد، باز هم یک همسایگی باز متقارن محذوف آن عدداست.

نکته: تفاضل دو همسایگی باز (باز متقارن یا باز متقارن محذوف) یک عدد، یک همسایگی باز (باز متقارن یا باز متقارن محذوف) آن عدد نخواهد بود.

نکته: هر همسایگی باز متقارن به مرکز a و شعاع ε را با نماد $N(a,\varepsilon)$ نیز نمایش می‌دهند به عبارت دیگر:

$$N(a , \varepsilon) = \{x \in R : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

N حرف اول کلمه‌ی (neighbourhood) به معنای همسایگی است.

تست: هرگاه $N_1 = N(3,2)$ و $N_2 = N(2,1/5)$، باشند حاصل $N_1 \cap N_2$ کدام است؟

۱) $N(2/5,1)$　　۲) $N(2/25,1/25)$　　۳) $N(2/75,0/25)$　　۴) $N(2/25,0/25)$

$$\begin{cases} N_1 = (3-2 , 3+2) = (1,5) \\ N_2 = (2 - 1/5, 2 + 1/5) = (0/5, 3/5) \end{cases} \Rightarrow N_1 \cap N_2 = (1, 3/5) = N(2/25, 1/25)$$

تست: همسایگی محذوف متقارن عدد ۳ به شعاع ۰/۰۱ کدام است؟

۱) $(2/99,3) \cup (3,3/01)$　　۲) $\{x \in R: 0 < |2x-6| < \frac{1}{50}\}$

۳) $(2/99,3/01) - \{3\}$　　۴) هر سه گزینه

پاسخ صحیح هر سه گزینه می‌باشد.

تست ۱ :

۱ـ بزرگترین کران پائین مجموعه‌ی $A = \{x \in R: ۱ < |x - ۳| < ۲\}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) ۱

۲ـ کدام گزینه راجع به مجموعهٔ $A = \{۳^n: n \in Z , n < ۱۰\}$ درست است؟

۱) $MinA = ۰$ ۲) A فقط از بالا کراندار است.

۳) $SUP(A) = ۳^۹$ ۴) $inf(A) = ۱$

۳ـ کدام نامساوی زیر همواره $(\forall a,b \in R)$ برقرار است؟

۱) $a^۲ > a$ ۲) $(a+b)(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}) \geq ۴$ ۳) $|a+\frac{۱}{a}| \geq ۲$ ۴) $a^{۱۰}+\frac{۱}{a^{۱۰}+۱} \geq ۱$

۴ـ کدامیک از مجموعه‌های زیر، در مجموعهٔ مورد بحث، کوچکترین کران بالا ندارد؟

۱) $\{q \in Q: q^۲ < \frac{۲۵}{۱۶}\}$ ۲) $\{q \in Q: q^۲ < ۱۱\}$ ۳) $\{x \in R: x^۴ < ۳\}$ ۴) $\{n \in Z: n^۲ < ۱۰۰\}$

۵ـ اگر $a \in Q$ و $b \in Q'$ (Q و Q' به ترتیب مجموعهٔ اعداد گویا و اصم می‌باشند)، کدام گزینه‌ی زیر، همواره صحیح است؟

۱) $ab \in Q$ ۲) $b^۲ \in Q$ ۳) $۲a-۳b \in Q'$ ۴) $\frac{a}{b} \in Q$

۶ـ هرگاه $A_k = [۱ - \frac{۱}{k} , ۲ + \frac{۳}{k}]$ (A_k دنباله‌ای از بازه‌هاست)، حاصل $\bigcup_{k=۱}^{\infty} A_k$ کدام است؟

۱) $[۱,۲]$ ۲) $[\frac{۱}{۲},۵]$ ۳) $[۰,۵]$ ۴) $[۰,۲]$

۷ـ در تست فوق، حاصل $\bigcap_{k=۱}^{\infty} A_k$ کدام است؟

۱) ϕ ۲) $[۰,۵]$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $[۱,۳]$

۸ـ مجموعه‌ی کران‌های بالای مجموعه‌ی $\{x \in R : x^۲ < ۹\}$، کدام است؟

۱) $[۹,+\infty)$ ۲) $[۳,+\infty)$ ۳) $(۹,+\infty)$ ۴) $(۳,+\infty)$

۹ـ اگر $S = \frac{۲\sqrt{x}}{x+۱}$, $(x \geq ۰)$، کدام گزینه‌ی زیر درست می‌باشد؟

۱) $\frac{-۱}{۲} \leq s \leq \frac{۱}{۲}$ ۲) $۰ \leq s \leq ۱$ ۳) $۰ \leq s \leq \frac{۱}{۲}$ ۴) $۰ \leq s \leq \frac{۱}{۴}$

۱۰ـ هرگاه $I_n = [۳ - \frac{۱}{n} , ۵ + \frac{۲}{n}]$، حاصل $I_۲ \cap I_۵$ کدام است؟

۱) $[۲/۵,۵/۴]$ ۲) $[۲/۸,۵/۴]$ ۳) $[۲/۵,۶]$ ۴) $[۲/۸,۶]$

۱- (۴) $۱ < |x - ۳| < ۲ \Rightarrow \begin{cases} ۱ < x - ۳ < ۲ \\ \text{یا} \\ -۲ < x - ۳ < -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴ < x < ۵ \\ \text{یا} \\ ۱ < x < ۲ \end{cases} \Rightarrow A = (۱, ۲) \cup (۴, ۵)$

لذا بزرگترین کران پائین A، عدد ۱ می‌باشد.

۲- (۳) $A = \{..., ۳^{-۲}, ۳^{-۱}, ۳^{۰}, ۳^{۱}, ۳^{۲}, ..., ۳^{۹}\} \Rightarrow \sup(A) = ۳^{۹}$

۳- (۴) $a^{۱۰} + ۱ > ۰ \quad \Rightarrow a^{۱۰} + ۱ + \frac{۱}{a^{۱۰} + ۱} \geq ۲ \quad \Rightarrow a^{۱۰} + \frac{۱}{a^{۱۰} + ۱} \geq ۱$

۴- (۲) این مجموعه در Q، کوچکترین کران بالا ندارد. $\{q \in Q : -\sqrt{۱۱} < q < \sqrt{۱۱}\}$

۵- (۳)
a گویا $\Rightarrow$ ۲a گویا $\Rightarrow$
b اصم $\Rightarrow$ ۳b اصم
$\Rightarrow$ ۲a - ۳b = اصم

۶- (۳) $[۰, ۵] \cup [\frac{۱}{۲}, ۳/۵] \cup [\frac{۲}{۳}, ۳] \cup ... = [۰, ۵]$

۷- (۳) $\lim_{k \to +\infty} (۱ - \frac{۱}{k}) = ۱ = ۱^{-}, \lim_{k \to +\infty} (۲ + \frac{۳}{k}) = ۲ = ۲^{+} \Rightarrow \bigcap_{k=۱}^{n} A_k = [۱, ۲] \subset [۱^{-}, ۲^{+}]$

۸- (۲) $x^{۲} < ۹ \Rightarrow -۳ < x < ۳ \Rightarrow [۳, +\infty)$

۹- (۲) $\frac{۱}{s} = \frac{۱}{۲}(\sqrt{x} + \frac{۱}{\sqrt{x}}) \geq \frac{۱}{۲} \times ۲ \Rightarrow \frac{۱}{s} \geq ۱ \Rightarrow s \leq ۱ \Rightarrow ۰ \leq s \leq ۱$

۱۰- (۲) $I_{۲} \cap I_{۵} = [\frac{۵}{۲}, ۶] \cap [\frac{۱۴}{۵}, \frac{۲۷}{۵}] = [\frac{۱۴}{۵}, \frac{۲۷}{۵}] = [۲/۸, ۵/۴]$

انسان اشرف مخلوقات و مادر اشرف انسانهاست. «ساموئل اسماسلز»

اگر مرتکب خطائی شدید، فوراً اعتراف کنید. (ارسطو)

تست ۲:

۱ـ هرگاه x و y مثبت بوده و $x + y = ۳$، $Min(x^۲+y^۲)$ برابر است با:

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۲۹}$ ۳) $\frac{۹}{۲۹}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

۲ـ هرگاه بازه‌ی $(۲m-۶,n+۳)$ یک همسایگی باز متقارن به مرکز ۱ و به شعاع ۳ باشد، $m+n$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) -۱

۳ـ کدامیک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

۱) اگر A متناهی باشد، A کراندار است.

۲) اشتراک دو همسایگی متقارن a، یک همسایگی متقارن a است.

۳) اگر A کراندار باشد، A متناهی است.

۴) هر زیر مجموعهٔ غیر خالی کراندار از بالای R، سوپریمم دارد.

۴ـ اگر $a = b + c$، آنگاه حاصل $a^۳ - b^۳ - c^۳$ کدام است؟

۱) $۳abc$ ۲) ۰ ۳) $-۳abc$ ۴) $-a^۳$

۵ـ اگر $x^۲ + y^۲ = ۳$ و $A = x^۴ + y^۴$ باشد، آنگاه همواره داریم:

۱) $A \geq \frac{۹}{۲}$ ۲) $A \geq ۰$ ۳) $A \geq ۱$ ۴) $A \geq ۶$

۶ـ اگر $A = \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ و a و b و c، سه عدد حقیقی مثبت باشند، همواره داریم:

۱) $A \geq ۸$ ۲) $A \geq ۴$ ۳) $A \geq ۳$ ۴) $A \geq ۹$

۷ـ اگر $a^x = b^y$ و $b^z = a^t$ باشد، آنگاه همواره داریم:

۱) $x + z = y + t$ ۲) $xz = yt$ ۳) $zt = xy$ ۴) $xt = yz$

۸ـ اگر x و y دو عدد حقیقی باشند و داشته باشیم $x < ۰ < y$ آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

۱) $x + y > ۰$ ۲) $x + y < ۰$ ۳) $x - y > ۰$ ۴) $x - y < ۰$

۹ـ اگر N مجذور کامل باشد، اولین عدد مجذور کامل پس از N، کدام است؟

۱) $N + ۱$ ۲) $\sqrt{N} + ۱$ ۳) $N + ۲\sqrt{N} + ۱$ ۴) $N - ۲\sqrt{N} + ۱$

۱۰ـ کدامیک از اعداد زیر، مربع کامل است؟

۱) $۵^{۳۵}$ ۲) $۲۷^۷$ ۳) ۲×۸^۵ ۴) $۴^۴ + ۵^۴$

۱ـ (۱) $x^۲+y^۲=(x+y)^۲-۲xy=۹-۲xy$

برای اینکه $x^۲+y^۲$ می‌نیمم شود، بایستی xy، Max شود، اما چون $x+y=۳$ لذا باید: $x=y=\frac{۳}{۲}$

$\text{Min}(x^۲+y^۲)=۹-۲(\frac{۳}{۲})(\frac{۳}{۲})=\frac{۹}{۲}$

۲ـ (۲) $N(۱,۳)=(۱-۳,۱+۳)=(-۲,۴)=(۲m-۶,n+۳)$

$\begin{cases}۲m-۶=-۲\\n+۳=۴\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=۲\\n=۱\end{cases}\Rightarrow m+n=۳$

۳ـ (۳) مجموعه‌ی $A=[۱,۲]$ کراندار است اما نامتناهی است.

۴ـ (۱) $a=b+c\Rightarrow a+(-b)+(-c)=۰\Rightarrow a^۳+(-b)^۳+(-c)^۳=۳a(-b)(-c)\Rightarrow a^۳-b^۳-c^۳=۳abc$

۵ـ (۱) $x^۲+y^۲=۳\Rightarrow x^۲=y^۲=\frac{۳}{۲}\Rightarrow \text{Max}(x^۲y^۲)=\frac{۹}{۴}$

$x^۲y^۲\le\frac{۹}{۴}\Rightarrow -۲x^۲y^۲\ge-\frac{۹}{۲}\Rightarrow x^۴+y^۴=(x^۲+y^۲)^۲-۲x^۲y^۲\ge ۹-\frac{۹}{۲}=\frac{۹}{۲}$

۶ـ (۳) همیشه واسطه‌ی حسابی n عدد مثبت از واسطه‌ی هندسیشان بزرگتر است.

$x_۱,x_۲,x_۳>۰\Rightarrow\frac{x_۱+x_۲+x_۳}{۳}\ge\sqrt[۳]{x_۱x_۲x_۳}\Rightarrow\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{۳}\ge\sqrt[۳]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}}\Rightarrow\frac{A}{۳}\ge۱\Rightarrow A\ge۳$

۷ـ (۲)

$\begin{cases}a^x=b^y\Rightarrow b=a^{\frac{x}{y}}\\b^z=a^t\Rightarrow b=a^{\frac{t}{z}}\end{cases}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{t}{z}\quad\Rightarrow xz=yt$

۸ـ (۴) $x<۰<y\Rightarrow x<y\Rightarrow x-y<۰$

۹ـ (۳) $N=k^۲\Rightarrow\sqrt{N}=k\Rightarrow(k+۱)^۲=(\sqrt{N}+۱)^۲=N+۲\sqrt{N}+۱$

مثال عددی $۹=۳^۲\Rightarrow(۳+۱)^۲=۱۶$

۱۰ـ (۳) $۲\times(۲^۳)^۵=۲^{۱۶}\quad\Rightarrow\sqrt{۲^{۱۶}}=۲^۸$

اتلاف وقت، خودکشی واقعی است. (ابوسعید)

تست ۳:

۱ـ در عدد $A = ۲^۵ \times x \times ۹^۵ \times ۱۱^۳$، x چند باشد تا عدد A مجذور کامل شود؟

۱) ۲۲ ۲) ۳۳ ۳) ۶ ۴) ۹

۲ـ اگر $(۲ - x)^x$ و $(۲ - x)^۲$، معکوس یکدیگر باشند، آنگاه x برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۲- ۳) ۳ یا ۲- ۴) ۲ یا ۰

۳ـ اگر $A = (\frac{۲}{۳} + \frac{۴}{۵} + \frac{۶}{۷} + ... + \frac{۱۰۰}{۱۰۱}) + (\frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۴} + \frac{۷}{۶} + ... + \frac{۱۰۱}{۱۰۰})$ آنگاه کدام رابطه درست است؟

۱) $A \geq ۲۰۰$ ۲) $A \geq ۱۰۰$ ۳) $A \geq ۵۰$ ۴) $A = ۱۰۰$

۴ـ هرگاه داشته باشیم $۷^{۵x+۱} + ۷^{۵x-۱} - ۷^{۵x} = ۴۳$، حاصل $۵x(۵x - ۱)(۵x + ۱)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۵ـ هرگاه x و y هر دو مثبت بوده و داشته باشیم: $\begin{cases} x^۲ + y = ۲۱ \\ x + y^۲ = ۲۹ \end{cases}$، حاصل $x^۲ + y^۲$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۴۱ ۳) ۳۴ ۴) ۳۶

۶ـ هرگاه $۱ \leq x^۲ - ۳x < ۱ + t^۲$، به ازاء هر $t \neq ۰$ برقرار باشد، حاصل $\frac{x^۶ - ۱}{x^۳}$ کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۶ ۳) ۲۷ ۴) ۳۰

۷ـ اگر $x = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۲}$، کدام عبارت زیر، عدد صحیح است؟

۱) $x^۲ - x$ ۲) $x^۲ + x$ ۳) $x^۲ + ۱$ ۴) $x^۲ + ۲$

۸ـ هرگاه $n \geq ۲$ باشد، کدامیک از اعداد زیر در فاصله‌ی $(۰, \frac{۱}{n})$ واقع نیست؟

۱) $\frac{۱}{۲n}$ ۲) $\frac{۱}{n^۲}$ ۳) $\frac{۱}{n+۱}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{n}}$

۹ـ هرگاه $۳x + ۲y - ۶z = ۷$ باشد، کمترین مقدار عبارت $x^۲ + y^۲ + z^۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴۹}$ ۲) ۴۹ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۷}$

۱۰ـ از نامساویهای $x + y < ۱$, $x - y > -۱$ نتیجه می‌شود:

۱) $x < ۱$ ۲) $x > -۱$ ۳) $y < ۱$ ۴) $y > -۱$

زندگی بدون کوشش، مرگ قبل از وقت است. «گوته»

۱ـ (۱) $A = ۲^{۵} \times x \times ۳^{۱۰} \times ۱۱^{۳}$

برای آنکه عدد مربع کامل شود، باید توان همه‌ی عاملهای اول آن زوج باشند، پس کوچکترین عددی که می‌توان در نظر گرفت ۱۱ × ۲ یعنی ۲۲ است.

۲ـ (۳) $(x-۲)^{x} = \frac{۱}{(x-۲)^{۲}} \Rightarrow (x-۲)^{x} = (x-۲)^{-۲} \Rightarrow \begin{cases} x=-۲ \\ x-۲=۱ \end{cases} \quad \begin{cases} x=-۲ \\ x=۳ \end{cases}$

۳ـ (۲) $A = (\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۲}) + (\frac{۴}{۵}+\frac{۵}{۴}) + ... + (\frac{۱۰۰}{۱۰۱}+\frac{۱۰۱}{۱۰۰}) \geq \underbrace{۲+۲+...+۲}_{۵۰} = ۱۰۰$

۴ـ (۱) $۷^{۵x-۱}(۴۹+۱-۷) = ۴۳ \quad \Rightarrow ۷^{۵x-۱} \times ۴۳ = ۴۳$

$۷^{۵x-۱} = ۱ \Rightarrow ۵x-۱ = ۰ \Rightarrow ۵x(۵x-۱)(۵x+۱) = ۰$

۵ـ (۲) $\begin{cases} x^{۲}+y = ۴^{۲}+۵ \\ x+y^{۲} = ۴+۵^{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ y=۵ \end{cases} \quad \Rightarrow x^{۲}+y^{۲} = ۴۱$

۶ـ (۲) $x^{۲}-۳x = ۱ \quad \overset{\div x}{\Rightarrow} \; x-۳ = \frac{۱}{x} \quad \Rightarrow x-\frac{۱}{x} = ۳$

$\frac{x^{۶}-۱}{x^{۳}} = x^{۳}-\frac{۱}{x^{۳}} = (x-\frac{۱}{x})^{۳} + ۳x.\frac{۱}{x}(x-\frac{۱}{x}) = ۳^{۳}+۳(۳) = ۳۶$

۷ـ (۲) $x = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲} \Rightarrow \sqrt{۵} = ۲x+۱ \Rightarrow ۵ = (۲x+۱)^{۲} \Rightarrow ۴x^{۲}+۴x+۱ = ۲۵ \Rightarrow x^{۲}+x = ۶$

۸ـ (۴) $n \geq ۲ \Rightarrow n > \sqrt{n} \Rightarrow \frac{۱}{n} < \frac{۱}{\sqrt{n}} \quad \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{n}} \notin (۰, \frac{۱}{n})$

۹ـ (۳) $(۳^{۲}+۲^{۲}+(-۶)^{۲})(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}) \geq (۳x+۲y-۶z)^{۲}$

$۴۹(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}) \geq ۴۹ \quad \Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+z^{۲} \geq ۱$

۱۰ـ (۳) $\begin{cases} x+y < ۱ \\ x-y > -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y < ۱ \\ y-x < ۱ \end{cases}$

$+ \; \overline{\quad\quad\quad}$

$۲y < ۲ \Rightarrow y < ۱$

اعتراف به نادانی از چیزی که نمی‌دانم، مرا شرمگین نمی‌سازد. (سیسرون)

تست ۴:

۱ـ هرگاه رابطه‌ی $0 \le a^2+b^2-2a-4b+5 < \frac{1}{x^2+x+1}$ برای هر $x \in R$ برقرار باشد، ab برابر است با:

۱) ۴　　۲) ۶　　۳) ۲　　۴) ۱

۲ـ کدام نادرست است؟

۱) $\text{Min}\ \{a,b,c\} \le \text{Min}\ \{b,c\}$　　۲) $\text{Max}\ \{a,b,c\} \ge \text{Max}\ \{b,c\}$

۳) $\text{Max}\ \{-a,-b,-c\} = -\text{Min}\ \{a,b,c\}$　　۴) $\text{Min}\ \{-a,-b,-c\} = \text{Max}\ \{a,b,c\}$

۳ـ کدام حکم نادرست است؟

۱) $\text{Max}\{a,0\} = \frac{a+|a|}{2}$　　۲) $\text{Min}\{a,0\} = \frac{a-|a|}{2}$

۳) $\text{Max}\{a,-a\} = |a|$　　۴) $|a| + |b| \ge |a+b| + |a-b|$

۴ـ هرگاه از رابطه‌ی $2 < x < 4$، رابطه‌ی $|x+\alpha| < B$ را نتیجه گرفته باشیم، $\alpha + B$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۴　　۳) ۵　　۴) -2

۵ـ هرگاه $a\in R$,　$0 < a \le 1$,　$A=\{\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, ...\}$، آنگاه:

۱) A کراندار است و $\sqrt{a}$، Max مجموعه است.　　۲) A کراندار است و $\sqrt{a}$، Min مجموعه است.

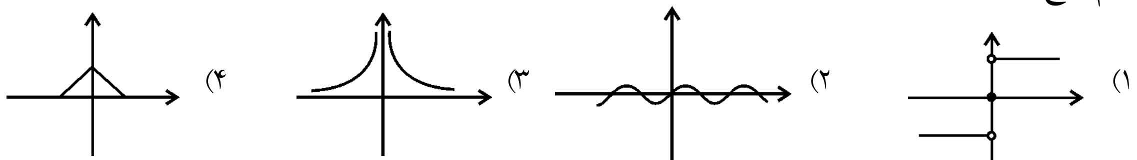
۳) A کراندار نیست ولی $\sqrt{a}$، Min مجموعه است.　　۴) A کراندار نیست ولی $\sqrt{a}$، Max مجموعه است.

۶ـ کدام مجموعه از بالا کراندار است ولی عضو انتها (ماکزیمم) ندارد؟

۱) $\{x \in R : 9 < x \le 10\}$　　۲) $\{x \in R : 5x^3 - x^2 + x + 7 = 0\}$

۳) $\{x \in z : 1 < x < 17\}$　　۴) $\{x \in R : 1 < x < 7$

۷ـ کدام تابع کراندار نیست؟



۸ـ هرگاه $x > 2$، بزرگترین کران پائین مجموعه‌ی $A=\{x+\frac{1}{x-2} : x \in R\}$ کدام است؟

۱) ۲　　۲) ۴　　۳) ۱　　۴) ۸

۹ـ هرگاه $x > 3$، کوچکترین کران بالای مجموعه‌ی $A=\left\{\frac{(x-3)^2+1}{x-3} : x \in R\right\}$ کدام است؟

۱) ۳　　۲) ۲　　۳) -2　　۴) ۰

۱۰ـ هرگاه $a^2+2a < 0$, $b^2 < b+2$، آنگاه کدام نامساوی زیر درست است؟

۱) $a+b < 3$　　۲) $a+b > 3$　　۳) $-3 < a+b < 2$　　۴) $-4 < a+b < -1$

۱ـ (۳) $\circ \leq (a-۱)^۲ + (b-۲)^۲ < \varepsilon \qquad \varepsilon = \frac{۱}{x^۲+x+۱} > \circ$

$\Rightarrow (a-۱)^۲ + (b-۲)^۲ = \circ \quad \Rightarrow \begin{cases} a = ۱ \\ b = ۲ \end{cases} \quad \Rightarrow ab = ۲$

۲ـ (۴) $\text{Min}\{-a, -b, -c\} = -\text{Max}\{a,b,c\}$

۳ـ (۴) مثال نقض $a = \circ, b = ۱ \Rightarrow \circ + ۱ \geq ۱ + ۱$

۴ـ (۴) $۲ < x < ۴ \quad \Rightarrow |x-۳| < ۱ \quad \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -۳ \\ \beta = ۱ \end{cases} \quad \Rightarrow \alpha + \beta = -۲$

۵ـ (۲) از اعداد بین ۰ و ۱ ، هرچه ریشه بگیریم. بزرگتر می‌شوند.

۶ـ (۴)

۷ـ (۳) این نمودار از بالا کراندار نیست زیرا به سمت $+\infty$ رفته است.

۸ـ (۲) $x - ۲ + \frac{۱}{x-۲} + ۲ \geq ۴ \Rightarrow A = [۴, +\infty)$

۹ـ (۳) $\frac{(x-۳)^۲}{x-۳} + \frac{۱}{x-۳} = x - ۳ + \frac{۱}{x-۳} \leq -۲ \Rightarrow A = (-\infty, -۲]$

۱۰ـ (۳)

$$\begin{cases} a^۲ + ۲a < \circ \Rightarrow -۲ < a < \circ \\ b^۲ - b - ۲ < \circ \Rightarrow -۱ < b < ۲ \end{cases}$$

$$-۳ < a + b < ۲$$

اگر می‌خواهید حرف شما را باور کنند از خود سخن نگوئید، زندگی یعنی جستجوی دائم. «لامارتین»

تمام شأن و عظمت انسان در فکر است. (پاسکال)

تست ۵:

۱ـ هرگاه $a \in R$ و $a > ۱$ و $A = \{a, a^۲, a^۳, ...\}$، آنگاه:

۱) A کراندار است ولی ماکزیمم ندارد.
۲) A کراندار نیست ولی ماکزیمم دارد.
۳) A کراندار است و a مینیمم مجموعه‌ی A است.
۴) A کراندار نیست و a مینیمم مجموعه‌ی A است.

۲ـ هرگاه برای هر سه عدد حقیقی a و b و c و به ازاء هر $n \in N$ داشته باشیم:

$a \leq b \leq a + \frac{c}{n}$، آنگاه:

۱) $a = nb$
۲) $a = \frac{b}{n}$
۳) $a = b$
۴) $b = ۰$

۳ـ کدامیک از مجموعه‌های زیر، یک همسایگی متقارن عدد ۳ می‌باشد؟

۱) $(-۱,۵) \cup (۳,۴)$
۲) $(-۲,۱) \cap (۰,۴)$
۳) $(۰,۵) \cap (۱,۶)$
۴) $(-۱,۳) \cup (۳,۵)$

۴ـ هرگاه $x > ۰$ و $\frac{x^۲+۱}{x}$، می‌نیمم باشد، مقدار عددی عبارت $۲x^۳ + x$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) $\frac{۱}{۳}$

۵ـ هرگاه $A = \frac{۱}{۲^{\alpha}}$ باشد، کدامیک از احکام زیر درست می‌باشد؟

۱) برای کلیه‌ی اعداد $\alpha > ۰$، $A > ۱$ است.
۲) برای کلیه‌ی اعداد $\alpha > ۰$، $A < ۱$ است.
۳) α هر چه باشد، $A > ۱$ است.
۴) برای کلیه‌ی اعداد $\alpha < ۰$، $A < ۱$ است.

۶ـ از چهار عدد a , b , c , d، سه عدد منفی و یکی مثبت بوده و $a < b < c < d$، در این صورت کدامیک از اعداد زیر منفی است؟

۱) abc
۲) abd
۳) acd
۴) bcd

۷ـ کدام مجموعه سوپریمم دارد ولی ماکزیمم ندارد؟

۱) -N
۲) $[۲,۵]$
۳) $(-\infty,۰) \cup \{۱\}$
۴) $(۰,۲) \cup (۳,۷)$

۸ـ سوپریمم مجموعه‌ی $A = \{۲\sin^۲x + ۴\sin x \cos x + ۴\cos^۲x : x \in R\}$ کدام است؟

۱) $۳ - \sqrt{۵}$
۲) $۲ + \sqrt{۵}$
۳) $۲ - \sqrt{۵}$
۴) $۳ + \sqrt{۵}$

۹ـ هرگاه $A = \{x \in R : |x - ۴| < ۶\}$، به ازاء کدام مقدار k، برای هر $x \in A$ نامساوی $|x| \leq k$ برقرار است؟

۱) ۶
۲) ۴
۳) ۱۰
۴) ۸

۱۰ـ کدام حکم درست است؟

۱) هر زیر مجموعه‌ی ناتهی از R، دارای کوچکترین کران بالاست.
۲) هر زیر مجموعه‌ی ناتهی از R، دارای عضو ابتدا است.
۳) هر زیر مجموعه‌ی ناتهی و کراندار از بالای R، دارای ماکزیمم است.
۴) هر زیر مجموعه‌ی ناتهی و کراندار از بالای R، دارای کوچکترین کران بالاست.

۱ـ (۴) اعداد بزرگتر از ۱، هرچه به توان برسند، بزرگتر می‌شوند.

۲ـ (۳) $a \le b \le a + \frac{c}{n} \Rightarrow a - a \le b - a \le a + \frac{c}{n} - a$

$۰ \le b - a \le \frac{c}{n} = \varepsilon \quad \Rightarrow b - a = ۰ \Rightarrow b = a$

۳ـ (۳) $(۰,۵) \cap (۱,۶) = (۱,۵)$

۴ـ (۲) $x > ۰ \quad \Rightarrow \frac{x^۲ + ۱}{x} = x + \frac{۱}{x} \ge ۲ \quad \Rightarrow \text{Min}(x + \frac{۱}{x}) = ۲ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow ۲x^۳ + x = ۳$

۵ـ (۲)

۶ـ (۱) با توجه به صورت تست نتیجه می‌شود که d مثبت و a و b و c منفی‌اند لذا $abc < ۰$

۷ـ (۴)

۸ـ (۴) $P = ۱ - \cos ۲x + ۲\sin ۲x + ۲(۱ + \cos ۲x) = ۲\sin ۲x + \cos ۲x + ۳$

یادآوری: $-\sqrt{a^۲ + b^۲} \le a\sin x + b\cos x \le \sqrt{a^۲ + b^۲}$

$\Rightarrow ۳ - \sqrt{۵} \le p \le ۳ + \sqrt{۵} \Rightarrow \sup(A) = ۳ + \sqrt{۵}$

۹ـ (۳) $-۶ < x - ۴ < ۶ \Rightarrow \quad -۲ < x < ۱۰ \Rightarrow \quad -۱۰ < x < ۱۰ \Rightarrow \quad |x| \le ۱۰ \Rightarrow \quad |x| \le ۱۰$

نتیجه می‌شود که: $\{n : ۲^n < n^۲\} = \{۳\}$، در واقع فقط به ازاء $n = ۳$، $۲^n < n^۲$ است.

۱۰ـ (۴) اصل کمال است.

زیاد در فکر عبادت خداوند که نمدانی خواست او چست مباش بلکه به خدمت خلق بپرداز که میدانی مشکلاتشان چیست و چه می‌خواهند. **«کنفوسیون»**

خود را فدا سازیم بهتر است تا دیگران را نابود کنیم. **«گاندی»**

فصل دوازدهم

دنباله

تعریف دنباله: هر تابع که دامنه‌اش اعداد طبیعی و یا قطعه‌ای از اعداد طبیعی ($N_k=\{۱,۲,۳,...,k\}$) و بردش زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد را یک دنباله‌ی حقیقی یا به اختصار یک دنباله می‌گویند.

هرگاه دامنه‌ی دنباله، مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد، دنباله را یک دنباله‌ی نامتناهی می‌گویند. و هرگاه دامنه‌ی دنباله، قطعه‌ای از اعداد طبیعی باشد، دنباله را یک دنباله‌ی متناهی می‌گویند.

ما در اینجا بیشتر با دنباله‌های نامتناهی سروکار داریم. چون دامنه‌ی همه‌ی دنباله‌ها، مجموعه‌ی اعداد طبیعی می‌باشد، لذا دنباله‌ها را معمولاً با مقادیر برد آن، به صورت پی‌درپی، به شکل زیر نمایش می‌دهند.

$a_۱, a_۲, a_۳, ..., a_n, ...$

a_n را جمله‌ی nام یا جمله‌ی عمومی دنباله می‌گویند.

مثال: در زیر جمله‌ی عمومی چند دنباله نوشته شده است، جملات آنها را به صورت پی در پی بنویسید؟

$a_n=\frac{۱}{n} \rightarrow ۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, ...$

$a_n=(-۱)^n \rightarrow -۱, ۱, -۱, ۱, ...$

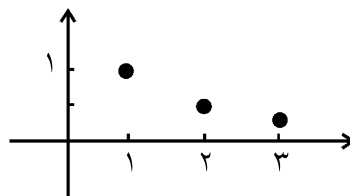
$a_n=\frac{n}{n+۱} \rightarrow \frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, ...$

تذکر مهم: در هر دنباله مانند $\{a_n\}$، n همیشه عددی طبیعی است و لذا جملاتی از قبیل $a_{۰/۵}$، $a_{\frac{۴}{۹}}$ و $a_{\sqrt{۲}}$ و $a_{-۳}$ و نظایر آنها بی‌معنی هستند.

نکته: چون دنباله، در واقع یک تابع می‌باشد لذا دنباله‌ها را می‌توان با ازواج مرتّب نیز نمایش داد.

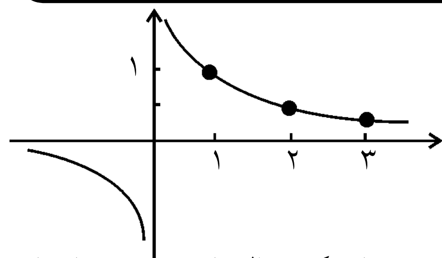
مثال: دنباله‌ی $a_n=\frac{۱}{n}$ مفروض است، این دنباله را به صورت ازواج مرتّب نمایش دهید.

$a=\{(۱,۱),(۲,\frac{۱}{۲}),(۳,\frac{۱}{۳}),...\}$



نمودار دنباله: چون دنباله‌ها، رده‌ی خاصی از توابع هستند، لذا رسم نمودار آن‌ها، همانند رسم نمودار توابع می‌باشد.

مثال: نمودار دنباله‌ی $a_n=\frac{۱}{n}$ را در صفحه‌ی دو بعدی رسم کنید.



در واقع می‌توان گفت، نمودار دنباله‌ی $\{\frac{1}{n}\}$، بخشی از نمودار تابع هموگرافیک $y = \frac{1}{x}$ می‌باشد.

تذکر: چون دامنه‌ی همه‌ی دنباله‌ها، مجموعه‌ی اعداد طبیعی (N) است، لذا می‌توان نمودار یک دنباله را روی محور اعداد حقیقی و فقط با نمایش مقادیر بُردش یا جملاتش نمایش داد.



تست: جمله‌ی چندم دنباله‌ی $\left\{\frac{2n+1}{n-2}\right\}$ برابر ۳ است؟

۱) پنجم ۲) ششم ۳) هفتم ۴) هشتم

حل: $\frac{2n+1}{n-2} = 3 \Rightarrow n = 7$

تست: در یک دنباله، $t_{2n-1} = n^2$ است، جمله‌ی هفتم دنباله برابر است با:

۱) ۴۹ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۲۵

حل: $n = 4 \Rightarrow t_7 = 4^2 = 16$

انواع دنباله‌ها

۱) دنباله‌ی همگرا (متقارب): هرگاه با بزرگ شدن n، جملات دنباله به سمت یک عدد حقیقی منحصر به فرد مانند l، نزدیک شوند، دنباله را همگرا به l می‌گویند، به عبارت دیگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ را همگرا گویند هرگاه $\lim_{n\to+\infty} a_n$ برابر یک عدد حقیقی منحصر به فرد مانند l شود، در این حالت l را حد دنباله می‌گویند و می‌نویسند. $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$

مثال: دنباله‌های $a_n = \frac{1}{n}$ و $a_n = \frac{2n}{n+5}$ و $a_n = 10$ به ترتیب همگرا به ۰، ۲، ۱۰ می‌باشند.

۲) دنباله‌های واگرا (متباعد): هر دنباله را که همگرا نباشد، واگرا گویند، به عبارت دیگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ را واگرا گویند، هرگاه $\lim_{n\to+\infty} a_n$، برابر $+\infty$ یا $-\infty$ و یا دو عدد، سه عدد و ... باشد.

مثال: دنباله‌های $a_n = \frac{n^2}{n+3}$، $a_n = -\sqrt{n}$ و $a_n = (-1)^n$ هر سه واگرایند زیرا حد اولی $+\infty$، حد دومی $-\infty$ و حد سومی ± 1 می‌باشد، در هر سه مثال، گویند دنباله‌ی a_n، حد ندارد.

تذکر: در صفحات بعدی با مثال‌های بسیار متنوع و جالبی از دنباله‌های همگرا و واگرا آشنا می‌شویم.

۳) دنباله‌ی ثابت: هر دنباله که جمله‌ی عمومیش به صورت $t_n = c$ $(c \in R)$ باشد را یک دنباله‌ی ثابت می‌گویند، توجه‌داشته باشید که دنباله‌ی ثابت $t_n = c$، دنباله‌ای همگرا بوده و حدّش برابر c است.

تست: چند تا از دنباله‌های زیر ثابت‌اند؟

الف) $a_n = (-1)^{2n+7}$ ب) $a_n = \lfloor n \rfloor + \lfloor -n \rfloor$ ج) $a_n = (-1)^n \cos n\pi$

د) $a_n = \cos(2n+1)\pi$ ه) $a_n = n\sin n\pi$ و) $a_n = \left\lfloor \frac{1}{n+1} \right\rfloor$

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

جواب گزینه‌ی ۱ است.

زیرا:

$a_n = (-1)^{2n+7} = -1$

$a_n = \lfloor n \rfloor + \lfloor -n \rfloor = 0$

$a_n = (-1)^n \cos n\pi = (-1)^n (-1)^n = (-1)^{2n} = 1$

$a_n = \cos(2n+1)\pi = -1$

$a_n = n\sin n\pi = n \times 0 = 0$

$a_n = \left\lfloor \frac{1}{n+1} \right\rfloor = 0$

۴) دنباله‌ی اعداد طبیعی: جمله‌ی عمومی این دنباله به صورت $a_n = n$ می‌باشد و جملاتش به صورت زیر است:

۱، ۲، ۳، ۴، ...

این دنباله، دنباله‌ای واگرا است و حدّش، $+\infty$ است.

۵) دنباله‌ی تصاعد حسابی (عددی): جملات این دنباله به صورت زیر می‌باشد:

a و $a+d$ و $a+2d$ و ... و $a+(n-1)d$ و ...

جمله‌ی عمومی این دنباله به صورت $a_n = a+(n-1)d$ می‌باشد.

مجموع n جمله‌ی اول این دنباله از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{n}{2}(t_1+t_n) = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

مثال: دنباله ... و ۱۱ و ۸ و ۵ و ۲ یک دنباله‌ی تصاعد حسابی است.

۶) دنباله‌ی تصاعد هندسی: جملات این دنباله به صورت زیر می‌باشد.

a و ar و ar^2 و ... و ar^{n-1} و ...

جمله‌ی عمومی این دنباله به صورت $a_n = ar^{n-1}$ می‌باشد.

تذکر: اگر $r = 1$ باشد، جملات دنباله‌ی فوق به صورت

$a, a, a, ..., a, ...$

در می‌آیند، که در این حالت دنباله به دنباله‌ای ثابت تبدیل می‌شود.

تذکر: اگر $r = -1$ باشد، جملات دنباله‌ی فوق به صورت

$a, -a, a, -a, ...$

در می‌آیند.

نکته: در حالتی که $r \neq 1$ باشد، مجموع n جمله‌ی اول تصاعد فوق از دستور

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

به دست می‌آید.

نکته: در حالتی که $r = 1$ باشد، مجموع n جمله‌ی اول تصاعد فوق از دستور:

$$S_n = na$$

به دست می‌آید.

۷) دنباله‌ی متناهی: به دنباله‌ای می‌گویند که تعداد جملاتش متناهی (تمام شدنی) باشد.

مثال: $3, 5, 7, \dots, 99$

۸) دنباله‌ی نامتناهی: به دنباله‌ای می‌گویند که تعداد جملاتش نامتناهی (تمام نشدنی) باشد.

۹) دنباله‌ی کران‌دار (محدود): به دنباله‌ای می‌گویند که هم از بالا و هم از پائین کراندار باشد به عبارت دیگر همه‌ی جملات دنباله، از عددی حقیقی مانند k کوچکتر (کوچکتر یا مساوی) و از عددی حقیقی مانند m بزرگتر (بزرگتر یا مساوی) باشند:

یعنی: $\forall n \in N : m \le a_n \le k$

در این حالت k و هر عدد بزرگتر از آن را یک کران بالای (یک بند بالای) دنباله و m و هر عدد کوچکتر از آنرا یک کران پائین (یک بند پائین) دنباله می‌گویند.

مثال: دنباله‌ی $a_n = \frac{1}{n}$ کراندار است زیرا با توجه به جملات دنباله یعنی $\dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ می‌بینیم:

$$\forall n \in N \quad 0 < a_n \le 1$$

عدد ۱ و هر عدد حقیقی بزرگتر از ۱ را کرانهای بالای دنباله و عدد ۰ و هر عدد حقیقی کوچکتر از ۰ را کران‌های پائین دنباله می‌گویند. عدد ۱ را سوپریمم دنباله و عدد ۰ را مینیمم دنباله می‌گویند.

تست: کدام دنباله‌ی زیر فقط از پائین کراندار است؟

۱) $\{\frac{n}{n+1}\}$ ۲) $\{2^n\}$ ۳) $\{(-2)^n\}$ ۴) $\{-n^3\}$

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۲ می‌باشد زیرا: $\forall n \in N : 1 < 2^n < +\infty$

نکته‌ی بسیار بسیار مهم: هر دنباله‌ی همگرا کراندار است (ولی عکس این مطلب در حالت کلی، درست نیست) بنابراین برای تشخیص اینکه یک دنباله، کراندار است یا نه، کافی است حدش را حساب کنیم اگر همگرا بود که کراندار است اما اگر حدش $+\infty$ یا $-\infty$ شد، بی‌کران است. ضمناً اگر حدش دو عدد یا ۳ عدد یا... شد (متناهی) باز هم کراندار است.

تست: کدام دنباله‌ی زیر بی‌کران است؟

۱) $\{\frac{2n}{n+5}\}$ ۲) $\{(-1)^n + 1\}$ ۳) $\{\frac{3^n}{3^n+1}\}$ ۴) $\{\frac{n^3}{n+5}\}$

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۴ می‌باشد. زیرا: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n+5} = +\infty$

تذکر مهم: عکس مطلب فوق در حالت کلی، صحیح نیست به عنوان مثال، دنباله‌های $a_n = (-1)^n$ و $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$، دنباله‌هائی

کراندارند که همگرا نیستند.

نکته‌ی مهم: دنباله‌هائی نظیر $\{\sin n\}$، $\{\cos n!\}$، $\{\mathrm{Arctan}\frac{1}{n}\}$ و $\{\mathrm{Arccot}\sqrt{3}\,n\}$ و $\{a\sin n + b\cos n\}$ کراندارند.

زیرا: $-1 \le \sin n \le 1 \quad , -1 \le \cos n! \le 1 \quad , -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Arctan}\frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$

$-\sqrt{a^2+b^2} < a\sin n + b\cos n \le \sqrt{a^2+b^2} \; , \; 0 < \mathrm{Arccot}\sqrt{3}\,n < \pi$

تذکر مهم: دنباله‌ی ثابت، دنباله‌ای کراندار است.

نکته‌ی مهم: دیدیم که هر دنباله‌ی همگرا، کراندار است، لذا هر دنباله که کراندار نباشد، (چه از بالا و چه از پائین) واگراست.

۱۰) دنباله‌ی بی‌کران (نامحدود): هر دنباله را که کراندار یا محدود نباشد، بی‌کران یا نامحدود می‌گویند، به عبارت دیگر، هر دنباله را که حداقل از یک طرف کران‌دار نباشد بی‌کران می‌گویند.

مثال: دنباله‌های $\{n^3\}$، $\{\frac{1-n^2}{1+n}\}$، $\{(-3)^n\}$ بی‌کران‌اند، اولی از بالا کراندار نبوده، دومی از پائین و سومی از هر دو طرف بی‌کران است.

۱۱) دنباله‌های نوسانی همگرا: دنباله‌هائی نظیر $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$، $b_n = 1 + \frac{\sin n}{n}$، $c_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ و نظایر آنها را که جملاتشان دائماً در حال نوسان هستند و ضمناً همگرا نیز می‌باشند دنباله‌های نوسانی همگرا می‌گویند.

$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

$\lim_{n \to +\infty} b_n = 1 + 0 = 1$

$\lim_{n \to +\infty} c_n = 0$

۱۲) دنباله‌های نوسانی واگرا: دنباله‌هائی نظیر $a_n = (-1)^n$ و $b_n = \sin\frac{n\pi}{2}$ و $c_n = \cos n$ و $d_n = (-3)^n$ و $e_n = \frac{(-1)^n n^2}{n+1}$ و نظایر آنها را که دائماً در حال نوسان هستند و ضمناً واگرا نیز می‌باشند دنباله‌های نوسانی واگرا می‌گویند.

$a_n = (-1)^n + 1 \to 0, 1, 0, 1, \ldots \qquad \lim_{x \to +\infty} a_n =$ نامنحصر به فرد = موجود نیست

$b_n = \sin\frac{n\pi}{2} \to 1, 0, -1, 0, 1, 0, \ldots \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n =$ نامنحصر به فرد = موجود نیست

$c_n = \cos n \to \cos 1, \cos 2, \cos 3, \ldots \qquad \lim_{n\to+\infty} c_n =$ عددی بین ۱ و ۱- = نامنحصر به فرد = موجود نیست

$d_n = (-3)^n \to -3, 9, -27, \ldots \qquad \lim_{n\to+\infty} d_n = \pm\infty =$ نامنحصر به فرد = موجود نیست

$e_n = \frac{(-1)^n n^2}{n+1} \to -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{-27}{4}, \ldots \qquad \lim_{n\to+\infty} e_n = \pm\infty =$ نامنحصر به فرد = موجود نیست

تذکر مهم: توجه داشته باشید که دنباله‌هائی نظیر $\{(-1)^{2n+1}\}$، $\{\sin n\pi\}$، $\{\cos(2n+1)\pi\}$ و نظایر آنها، دنباله‌هائی نوسانی نبوده، بلکه دنباله‌هائی ثابت‌اند (و لذا همگرا) که به ترتیب به ۱-، ۰ و ۱- میل می‌کنند.

۱۳) دنباله‌های صعودی (افزایشی): دنباله‌ی $\{a_n\}$ را صعودی می‌گویند هرگاه با بزرگ شدن n، جملات دنباله یا تغییری نکنند و یا بزرگ شوند (کوچک نشوند) به عبارت دیگر: هر جمله از جمله‌ی بعدیش، کوچکتر یا مساوی باشد، یعنی:

$$\forall n \in N : a_n \le a_{n+1}$$

یا

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le a_{n+1} \le \ldots$$

توجه داشته باشید که دنباله‌ی صعودی، همیشه از پائین کراندار است، زیرا همه‌ی جملات دنباله، از جمله‌ی اول بزرگتر یا مساوی‌اند در این دنباله‌ها، a_1 کوچکترین جمله‌ی دنباله (اینفیمم دنباله) می‌باشد.

مثال: دنباله‌هائی نظیر $a_n = 2^n$، $a_n = Lnn$، $a_n = \frac{n}{n+1}$، دنباله‌هائی صعودیند.

تذکر: دنباله‌ی ثابت، دنباله‌ای صعودی است.

تذکر: اگر جملات دنباله‌ی a_n، مثبت باشند، برای اثبات صعودی بودن دنباله می‌توان ثابت کرد:

$$\forall n \in N \quad : \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

تذکر: یک دنباله ممکن است از مرتبه‌ای به بعد صعودی باشد، مانند $a_n = \frac{n!}{n^2}$

$$1 , \frac{1}{2} , \frac{2}{3} , \frac{3}{2} , \frac{24}{5} , \ldots$$

که به ازاء $n \geq 2$، صعودی است.

مثال: ثابت کنید دنباله‌ی $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ صعودی است؟

$$\forall n \in N \quad : a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow \frac{n^2}{n^2+1} \leq \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} \Rightarrow n^2(n+1)^2 + n^2 \leq n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 \Rightarrow n^2 \leq (n+1)^2$$

تذکر مهم: برای تشخیص اینکه یک دنباله مانند $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ صعودی یا نزولی است. می‌توان از مشتق نیز استفاده کرد در واقع مشتق تابع $(x \geq 1)$ $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ را حساب می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \geq 0 \quad (x \geq 1)$$

پس تابع $y = f(x)$ به ازاء $x \geq 1$ و لذا دنباله‌ی $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ صعودی است.

معمولاً در تستها از این روش استفاده می‌کنند.

۱۴) دنباله‌های اکیداً صعودی (صعودی اکیداً): دنباله‌ی $\{a_n\}$ را صعودی اکیداً گویند هرگاه:

$$\forall n \in N : a_n < a_{n+1}$$

مثال: دنباله‌ی $a_n = n^3$ اکیداً صعودی است ولی دنباله‌ی $a_n = 5$ فقط صعودی است و اکیداً صعودی نیست.

تذکر: هر دنباله‌ی اکیداً صعودی، صعودی نیز هست ولی عکس این مطلب همواره درست نمی‌باشد، به عنوان مثال دنباله‌ی ثابت، دنباله‌ای صعودی است ولی اکیداً صعودی نیست.

۱۵) دنباله‌های نزولی (کاهشی): دنباله‌ی $\{a_n\}$ را نزولی گویند هرگاه با بزرگ شدن n، جملات دنباله یا تغییری نکنند و یا کوچک شوند (بزرگ نشوند)، به عبارت دیگر، هر جمله از جمله‌ی بعدیش، بزرگتر یا مساوی باشد، یعنی:

$$\forall n \in N : a_n \geq a_{n+1}$$

یا

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots$$

توجه داشته باشید که دنباله‌ی نزولی، همیشه از بالا کراندار است، زیرا همه‌ی جملات دنباله، از جمله‌ی اول کوچکتر یا مساوی‌اند.

در این دنباله‌ها، a_1 بزرگترین جمله‌ی دنباله (سوپریمم دنباله) می‌باشد.

مثال: دنباله‌هائی نظیر $a_n=\frac{1}{n}$، $a_n=(\log^2)^n$، $a_n=\frac{n+1}{2n-1}$**، دنباله‌هائی نزولیند.**

تذکر: دنباله‌ی ثابت، دنباله‌ای نزولی است.

تذکر: اگر جملات دنباله‌ی a_n، نامنفی باشند، برای اثبات نزولی بودن دنباله می‌توان ثابت کرد:

$$\forall n\in N \quad : \frac{a_{n+1}}{a_n}\le 1$$

تذکر: یک دنباله ممکن است از مرتبه‌ای به بعد نزولی باشد. مانند: $a_n=\frac{n^2}{2^n}$

$\frac{1}{2}$ و ۱ و $\frac{9}{8}$ و ۱ و $\frac{25}{32}$ و $\frac{36}{64}$ و ...

که به ازاء $n\ge 3$، نزولی است.

مثال: ثابت کنید دنباله‌ی $a_n=\frac{2^n}{(n+1)!}$ **نزولی است؟**

چون جملات دنباله، مثبت می‌باشند کافی است ثابت کنیم:

$$\forall n\in N: \quad \frac{a_{n+1}}{a_n}\le 1$$

$$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}\le 1 \Rightarrow \frac{2}{n+1}\le 1 \Rightarrow 2\le n+1 \Rightarrow 1\le n$$

۱۶) دنباله‌های اکیداً نزولی (نزولی اکیداً): دنباله‌ی $\{a_n\}$ را نزولی اکیداً گویند هرگاه:

$$\forall n\in N: a_n > a_{n+1}$$

مثال: دنباله‌ی $a_n=\frac{1}{n}$ نزولی اکید است، ولی دنباله‌ی $a_n=10$ فقط نزولی است و نزولی اکیداً نیست.

تذکر: هر دنباله‌ی نزولی اکید، نزولی نیز هست ولی عکس این مطلب، در حالت کلی نادرست است. به عنوان مثال، دنباله‌ی ثابت، دنباله‌ای نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست.

تذکر: یک دنباله ممکن است هم صعودی باشد هم نزولی مانند دنباله‌ی ثابت، همچنین یک دنباله ممکن است نه صعودی باشد نه نزولی مانند: $a_n=(-1)^n$

۱۷) دنباله‌های یکنوا: هر دنباله را که یا صعودی باشد یا نزولی یا هم صعودی باشد هم نزولی، دنباله‌ی یکنوا می‌گویند.

۱۸) دنباله‌های غیریکنوا: هر دنباله را که یکنوا نباشد، غیریکنوا می‌گویند، به عبارت دیگر هر دنباله را که نه صعودی باشد نه نزولی، غیریکنوا می‌گویند.

تست: کدام دنباله‌ی زیر غیریکنواست؟

۱) $\{\text{Arctan}\frac{1}{n}\}$ ۲) $\{\frac{2n+1}{n+5}\}$ ۳) $\{\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}\}$ ۴) $\{(\frac{3}{2})^n\}$

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۳ می‌باشد.

نکته: دنباله‌ی $\{\frac{n+a}{n+b}\}$، $(a,b>0)$، با شرط $a<b$ صعودی است و با شرط $a>b$ نزولی است.

نکته: دنباله‌ی $\{\frac{n^k+a}{n^k+b}\}$ $(b>0)$، با شرط $a<b$ صعودی است و با شرط $a>b$ نزولی است.

۱۹) دنباله‌ی بازگشتی (تراجعی): به دنباله‌ای می‌گویند که جمله‌ی عمومی آن، برحسب یکی (یا بیشتر از یکی) از جملات ما قبل آن، داده شده باشد.

مثال: دنباله‌های زیر، همگی دنباله‌هائی بازگشتی‌اند، چند جمله‌ی اول هر کدام از آنها را نوشته‌ایم.

$$\begin{cases} a_1 = \frac{5}{2} \\ a_{n+1} = 4(1 - \frac{1}{a_n}) \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{2}, \frac{12}{5}, \frac{7}{3}, \dots$$

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2} \\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$$

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \end{cases} \Rightarrow 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

این دنباله را دنباله‌ی فیبوناتچی می‌گویند.

فیبوناتچی ریاضی دان ایتالیائی بوده است.

۲۰) تعریف حد دنباله‌ها: فرض می‌کنیم $\{a_n\}$، یک دنباله و l یک عدد حقیقی باشد اگر برای هر عدد حقیقی و مثبت ε، عدد طبیعی M $(M \in N)$ وجود داشته باشد به طوریکه به ازاء هر عدد طبیعی $n \in N$، با شرط $n \geq M$، داشته باشیم: $|a_n - l| < \varepsilon$ (به عبارت دیگر: $(\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in N : \forall n \in N \ (n \geq M \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon)$ (*)

در این صورت می‌گوئیم دنباله‌ی $\{a_n\}$ به عدد حقیقی l همگراست و یا l، حد دنباله‌ی a_n است و می‌نویسیم:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

مثال: با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1$$

$$\varepsilon > 0 \ \exists M \in N \ \forall n \in N \ (n \geq M \Rightarrow \left|\frac{n^2-1}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon)$$

$$\left|\frac{n^2 - 1 - n^2 - 1}{n^2 + 1}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{2}{n^2+1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{n^2+1}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n^2 + 1 > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow n^2 > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1} \quad (n \in N)$$

لذا کافی است M را عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی $\sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1}$ اختیار کنیم یعنی:

$$M \geq \left\lfloor \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1} \right\rfloor + 1$$

۲۱) هرگاه $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ $(l \in R)$، این بدان معناست که به ازاء هر همسایگی l به شعاع ε یعنی: $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$، جز تعداد متناهی از جملات دنباله، بقیه‌ی جملات دنباله، درون این همسایگی هستند (همانطور که زنبورهای یک کندوی زنبور عسل، دور ملکه جمع می‌شوند، جملات دنباله‌ی همگرا هم دور حدشان یعنی l جمع می‌شوند)، در واقع جملات از مرتبه M به

بعد و خود M، یعنی جملات a_M ، a_{M+1}، a_{M+2} و ... حتماً در همسایگی $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ قرار دارند، اما ممکن است همگی و یا برخی از جملات a_1 و a_2 و ...، a_{M-1} داخل همسایگی فوق نباشند.

تست: دنباله‌ی $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$ مفروض است، کوچکترین عدد طبیعی M به طوریکه به ازاء هر $n > M$ داشته باشیم $1/99 < a_n < 2/01$، کدام است؟

۱) ۴۹۸ ۲) ۴۹۶ ۳) ۴۹۷ ۴) ۵۰۰

$$1/99 < a_n < 2/01 \Rightarrow 2-0/01 < a_n < 2+0/01$$

$$\Rightarrow |a_n - 2| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{2n+1}{n+3} - 2\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{5}{n+3} < \frac{1}{100} \Rightarrow n+3 > 500 \Rightarrow n > 497$$

۲۲) دنباله‌ی $\{c^n\}$: زمانی همگراست که $|c| < 1$ یا $c = 1$ ؛ زمانی واگراست که $|c| > 1$ یا $c = -1$

در واقع داریم:

$$\lim_{n \to +\infty} c^n = \begin{cases} 0 & (|c| < 1), \text{همگرا} \\ +\infty \text{ یا } -\infty & (|c| > 1), \text{در این حالت دنباله واگراست.} \\ 1 & (c = 1), \text{همگرا} \\ \pm 1 & (c = -1), \text{در این حالت نیز دنباله واگراست.} \end{cases}$$

مثال: حد دنباله‌ی زیر را حساب کنید.

۱) $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ همگرا و $\left(\left|\frac{2}{3}\right| < 1\right)$

۲) $b_n = \left(\frac{\pi}{e}\right)^n \rightarrow \lim_{n \to +\infty} b_n = +\infty$ واگرا $\left(\left|\frac{\pi}{e}\right| > 1\right)$

۳) $c_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{-n} \rightarrow \lim_{n \to +\infty} c_n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$ واگرا

۴) $d_n = (-2)^n \rightarrow \lim_{n \to +\infty} d_n = \pm\infty$ واگرا

۵) $e_n = (-1)^n \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} e_n = \pm 1$ نامنحصر به فرد = موجود نیست = واگرا

تست: هرگاه دنباله‌ی $\{3^{2n}(2m-1)^n\}$ همگرا به صفر باشد، حدود m، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2} < m \le \frac{1}{2}$ ۲) $0 < m \le \frac{5}{9}$ ۳) $\frac{16}{9} < m \le \frac{20}{9}$ ۴) $\frac{4}{9} < m \le \frac{5}{9}$

حل: $-1 < 9(2m-1) \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{9} \le 2m-1 \le \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{8}{9} < 2m \le \frac{10}{9} \Rightarrow \frac{4}{9} < m \le \frac{5}{9}$

۲۳) هرگاه دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به ترتیب به دو عدد حقیقی l_1 و l_2 همگرا باشند.

یعنی:

$$\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} a_n = l_1 \\ \lim_{n \to +\infty} b_n = l_2 \end{cases}$$

در این صورت

۱ـ مجموع و تفاضل دو دنباله همگرایند و $\lim_{n \to +\infty} (a_n \pm b_n) = l_۱ \pm l_۲$

۲ـ حاصلضرب دو دنباله نیز همگراست و $\lim_{n \to +\infty} a_n b_n = l_۱ l_۲$

۳ـ تقسیم دو دنباله نیز همگراست و $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l_۱}{l_۲} \quad (l_۲ \neq ۰)$

۲۴) چند برابر یک دنباله‌ی همگرا، همگراست. یعنی: $\lim_{n \to +\infty} a_n = l \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} ca_n = cl$

۲۵) هرگاه دنباله‌ی a_n به عدد حقیقی l همگرا باشد، آنگاه:

$$۱)\ \lim_{n \to +\infty} |a_n| = |l|$$

$$۲)\ \lim_{n \to +\infty} (a_n)^k \ -= (\lim_{n \to +\infty} a_n)^n = l^k \qquad (k \in N)$$

$$۳)\ \lim_{n \to +\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \to +\infty} a_n} = \sqrt[k]{l}$$

تذکر: در اینحالت هرگاه k زوج باشد، بایستی $l \geq ۰$

مثال: حد دنباله‌های زیر را حساب کنید؟

$$۱)\ a_n = \left| \frac{۲n + ۵}{۳ - n} \right| \to \lim_{n \to +\infty} a_n = |-۲| = ۲$$

$$۲)\ b_n = (۳ + \frac{\sin n}{n})^۴ \to \lim_{n \to +\infty} b_n = (۳ + ۰)^۴ = ۸۱$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[۳]{\frac{n^۲ + ۵}{۱ + n - ۸n^۲}} = \sqrt[۳]{-\frac{۱}{۸}} = \frac{-۱}{۲}$$

۲۶) هرگاه $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ آنگاه:

$$۱)\ \lim_{n \to +\infty} \sin(a_n) = \sin l$$

$$۲)\ \lim_{n \to +\infty} \cos(a_n) = \cos l$$

$$۳)\ \lim_{n \to +\infty} \tan(a_n) = \tan l \quad ,(l \neq k\pi + \frac{\pi}{۲})$$

$$۴)\ \lim_{n \to +\infty} \cot(a_n) = \cot l \quad ,(l \neq k\pi)$$

$$۵)\ \lim_{n \to +\infty} \mathrm{Arcsin}(a_n) = \mathrm{Arcsin}\, l \quad ,(-۱ < l < ۱)$$

$$۶)\ \lim_{n \to +\infty} \mathrm{Arccos}(a_n) = \mathrm{Arccos}\, l \quad ,(-۱ < l < ۱)$$

$$۷)\ \lim_{n \to +\infty} \mathrm{Arctan}(a_n) = \mathrm{Arctan}\, l$$

$$۸)\ \lim_{n \to +\infty} \mathrm{Arccot}(a_n) = \mathrm{Arccot}\, l$$

$$۹)\ \lim_{n \to +\infty} \log(a_n) = \log l \quad ,(l > ۰)$$

$$۱۰)\ \lim_{n \to +\infty} \mathrm{Ln}(a_n) = \mathrm{Ln}\, l \quad ,(l > ۰)$$

مثال: حد دنباله‌های زیر را حساب کنید؟

$$۱)\ \lim_{n \to +\infty} \operatorname{Arcsin}\frac{۲n+۱}{۴n} = \operatorname{Arcsin}\frac{۱}{۲} = \frac{\pi}{۶}$$

$$۲)\ \lim_{n \to +\infty} \log_{۲} \frac{۸n+۱}{n+۵} = \log_{۲}^{۸} = ۳$$

۲۷) مقایسه‌ی سرعت رشد چند دنباله:

جملات چند دنباله، در زیر با یکدیگر مقایسه شده‌اند، جمله‌ی دهم هر یک از آنها نیز نوشته شده است.

$a_n = Lnn \rightarrow$ ۰ و ۰/۶۹ و ۱/۰۹ و ... و ۲/۳۰ و ...

$a_n = n \rightarrow$ ۱ و ۲ و ۳ و ... و ۱۰ و ...

$a_n = n^۲ \rightarrow$ ۱ و ۴ و ۹ و ... و ۱۰۰ و ...

$a_n = n^۳ \rightarrow$ ۱ و ۸ و ۲۷ و ... و ۱۰۰۰ و ...

$a_n = ۲^n \rightarrow$ ۲ و ۴ و ۸ و ... و ۱۰۲۴ و ...

$a_n = ۳^n \rightarrow$ ۳ و ۹ و ۲۷ و ... و ۵۹۰۴۹ و ...

$a_n = n! \rightarrow$ ۱ و ۲ و ۶ و ... و ۳۶۲۸۸۰۰ و ...

$a_n = n^n \rightarrow$ ۱ و ۴ و ۲۷ و ... و ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ و ...

همانطوریکه مشاهده می‌شود، از مرتبه‌ای به بعد، هرچه n بزرگتر شود، جملات دنباله‌های فوق در نامساوی زیر صدق می‌کنند:

$$Lnn < n < n^۲ < n^۳ < ۲^n < ۳^n < n! < n^n$$

ضمناً همه‌ی دنباله‌های فوق واگرا بوده و حدشان برابر $+\infty$ است، اما بزرگی جملاتشان، یکسان نیست. لذا خواهیم داشت:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^۲}{۲^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{۳^n}{n!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{۳^n}{۱۰^n} = ۰$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{۵^n}{۲^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{۳^n}{n^۲} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

تذکر مهم: حد دنباله‌های خارج قسمت، از چپ به راست به یکدیگر، برابر ۰ و از راست به چپ به یکدیگر برابر $+\infty$ است.

۲۸) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n + b^n}{a^{n+k} + b^{n+k}} = \frac{۱}{(\operatorname{Max}\{a,b\})^k}$$

تست: $\lim_{n \to +\infty} \frac{۲^n + ۳^n}{۲^{n+۲} + ۳^{n+۲}}$ **برابر است با:**

۱) ۴ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۹ ۴) $\frac{۱}{۹}$

پاسخ صحیح طبق نکته‌ی فوق گزینه‌ی (۴) است. دقت کنید که وقتی $n \rightarrow +\infty$, $۳^n > ۲^n$

۲۹) ***نکته‌ی مهم:*** $$\lim_{n \to -\infty} \frac{a^n + b^n}{a^{n+k} + b^{n+k}} = \frac{۱}{(\operatorname{Min}\{a,b\})^k}$$

تست: حاصل $\lim\limits_{n \to -\infty} \frac{۴^n + ۷^n}{۴^{n+۲} + ۷^{n+۲}}$ **برابر است با:**

۱) ۱۶ ۲) ۴۹ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴۹}$

حل: $\lim\limits_{n \to -\infty} a_n = \lim\limits_{n \to -\infty} \frac{۴^n}{۴^{n+۲}} = \frac{۱}{۱۶}$

دقت کنید که وقتی $n \to -\infty$، $۴^n > ۷^n$

تست: $\lim\limits_{n \to -\infty} \frac{۲^{۱-n} + ۳^{۱-n}}{۲^{۴-n} + ۳^{۴-n}}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۲۷}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۸۱}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

حل: $\lim\limits_{n \to -\infty} a_n = \lim\limits_{n \to -\infty} \frac{۳^{۱-n}}{۳^{۴-n}} = \frac{۱}{۲۷}$

دقت کنید که وقتی $n \to -\infty$, $۲^{-n} < ۳^{-n}$

۳۰) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = ۱$

توجه کنید که ما در زیر، جملات دنباله را با ماشین حساب، حساب کرده‌ایم تا میل کردن این دنباله به عدد ۱ را به وضوح ببینید.

$$\begin{array}{cccccc} ۱, & \sqrt{۲}, & \sqrt[۳]{۳}, \; \dots, & \sqrt[۱۰۰]{۱۰۰}, & \dots, & \sqrt[۱۰۰۰۰۰۰]{۱۰۰۰۰۰۰} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ ۱, & ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲, & ۱/۴۴۲۲۴۹۵۷, \; \dots & ۱/۰۴۷۱۲۸۵۴۸, & \dots, & ۱/۰۰۰۰۱۳۸۱۶ \end{array}$$

۳۱) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = ۱ \quad ,(a > ۰)$

مثال: حد هر دو دنباله‌ی زیر، برابر ۱ است .

الف) $۲, \sqrt{۲}, \sqrt[۳]{۲}, \dots, \sqrt[۱۰۰]{۲}, \dots \quad \to ۱^+$

در واقع جملات این دنباله، رفته رفته کوچک شده و به عدد یک از طرف راست میل می‌کنند.

ب) $۰/۱, \sqrt{۰/۱}, \sqrt[۳]{۰/۱}, \dots, \sqrt[۱۰۰]{۰/۱}, \dots \quad \to ۱^-$

جملات این دنباله هم، رفته رفته بزرگ شده و به عدد یک، از طرف چپ میل می‌کنند.

تست: حد کدام دنباله، نادرست نوشته شده است؟

۱) $\lim\limits_{n \to +\infty} \lfloor -\sqrt[n]{۵} \rfloor = -۱$ ۲) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = ۱$

۳) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{۱}{۲}} = ۱$ ۴) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{۱۰۰۰} = ۱$

پاسخ درست، گزینه‌ی ۱ می‌باشد، چون

$$\forall n \in N \; : \sqrt[n]{۵} > ۱ \Rightarrow -\sqrt[n]{۵} < -۱ \Rightarrow \lfloor -\sqrt[n]{۵} \rfloor = -۲ \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \lfloor -\sqrt[n]{۵} \rfloor = -۲$$

۳۲)

۱) $\lim\limits_{n \to +\infty} (۱ + \frac{۱}{n})^n = e$

۲) $\lim\limits_{n \to +\infty} (۱ + \frac{۱}{n})^{-n} = \frac{۱}{e}$

۳) $\lim\limits_{n \to +\infty} (۱ - \frac{۱}{n})^n = \frac{۱}{e}$

$$۴)\ \lim_{n\to+\infty}(۱+\frac{۱}{n})^{mn}=e^m$$

$$۵)\ \lim_{n\to+\infty}(۱+\frac{k}{pn})^{mn}=e^{\frac{km}{p}}$$

$$۶)\ \lim_{n\to+\infty}(۱+\frac{۱}{an+b})^{cn+d}=e^{\frac{c}{a}}$$

$$۷)\ \lim_{h\to۰}(۱+h)^{\frac{۱}{h}}=e$$

$$۸)\ \lim_{n\to+\infty}(\frac{n+a}{n+b})^{\frac{n+c}{d}}=e^{\frac{a-b}{d}}$$

تست: حاصل $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n+۴}{n+۳})^{۱-۲n}$ برابر است با:

۱) e　۲) $e^۲$　۳) $\sqrt{e}$　۴) $\frac{۱}{e^۲}$

$$\lim_{n\to+\infty}(\frac{n+۳+۱}{n+۳})^{۱-۲n}=\lim_{n\to+\infty}(۱+\frac{۱}{n+۳})^{۱-۲n}=e^{-۲}=\frac{۱}{e^۲}$$

۳۳)

$$۱+۲+۳+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}=\frac{۱}{۲}n^۲+\frac{۱}{۲}n$$

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+...+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}=\frac{۱}{۳}n^۳+\frac{۱}{۲}n^۲+\frac{۱}{۶}n$$

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+....+n^۳=(\frac{n(n+۱)}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}n^۴+\frac{۱}{۲}n^۳+\frac{۱}{۴}n^۲$$

$$۱^۴+۲^۴+۳^۴+...+n^۴=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)(۳n^۲+۳n-۱)}{۶}=\frac{۱}{۵}n^۵+\frac{۱}{۲}n^۴+\frac{۱}{۳}n^۳+...$$

و به طور کلی داریم:

$$۱^p+۲^p+۳^p+...+n^p=\frac{۱}{p+۱}n^{p+۱}+\frac{۱}{۲}n^p+\frac{p}{۱۲}n^{p-۱}+...$$

تست: حاصل $\lim_{n\to+\infty}\frac{۱+۲+۳+...+n}{۳n^۲+n+۱}$ کدام است؟

۱) ۰　۲) $\frac{۱}{۳}$　۳) $\frac{۱}{۶}$　۴) $\frac{۳}{۲}$

$$\lim_{n\to+\infty}a_n\sim\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{۱}{۲}n^۲}{۳n^۲}=\frac{۱}{۶}$$

تست: حاصل $\lim_{n\to+\infty}\frac{۱^۷+۲^۷+۳^۷+...+n^۷}{n^۸}$ برابر است با:

۱) $+\infty$　۲) ۰　۳) $\frac{۱}{۸}$　۴) $\frac{۱}{۷}$

$$\lim_{n\to+\infty}a_n\sim\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{۱}{۸}n^۸}{n^۸}=\frac{۱}{۸}$$

یادآوری:

$$۲+۴+۶+...+۲n=n(n+۱)$$

$$۱+۳+۵+...+۲n-۱=n^۲$$

تست: حاصل $\lim_{n\to+\infty}\frac{۱-۲+۳-۴+۵-۶+...+۲n-۱-۲n}{۳n+۵}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$　۲) $-\frac{۲}{۳}$　۳) $+\infty$　۴) $-\frac{۱}{۳}$

راه حل اول:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{(۱+۳+۵+...+۲n-۱)-(۲+۴+۶+...+۲n)}{۳n+۵}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^۲ - n(n+۱)}{۳n+۵} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n}{۳n} = \frac{-۱}{۳}$$

راه حل دوم: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-۱)+(-۱)+...+(-۱)}{۳n+۵} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n}{۳n+۵} = \frac{-۱}{۳}$

۳۴) هرگاه $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$، آنگاه $\lim_{n\to+\infty} a_{n+۱} = l$, $\lim_{n\to+\infty} a_{n-۱} = l$

مثال:

$$\begin{cases} a_n = \frac{۱}{n} & \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = ۰ \\ a_{n+۱} = \frac{۱}{n+۱} & \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_{n+۱} = ۰ \qquad (n \neq ۱) \\ a_{n-۱} = \frac{۱}{n-۱} & \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_{n-۱} = ۰ \end{cases}$$

۳۵) حد دنباله ... , $\sqrt{a}, \sqrt{a\sqrt{a}}, \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ $(a > ۰)$ برابر است با a

۳۶) حد دنباله‌ی ...,$\sqrt{a}, \sqrt{a+\sqrt{a}}, \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$ برابر است با: $\frac{۱+\sqrt{۱+۴a}}{۲}$

اثبات: دنباله‌ی فوق را می‌توان به صورت بازگشتی $\begin{cases} a_۱ = \sqrt{a} \\ a_{n+۱} = \sqrt{a+a_n} \end{cases}$ نوشت حال فرض می‌کنیم، $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$، لذا

$\lim_{n\to+\infty} a_{n+۱} = l$ بنابراین: $\lim_{n\to+\infty} a_{n+۱} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{a+a_n} \Rightarrow l = \sqrt{a+l}$

$$l^۲ = a + l \Rightarrow l^۲ - l - a = ۰ \Rightarrow l = \frac{۱ \pm \sqrt{۱+۴a}}{۲}$$

چون جملات دنباله مثبت‌اند لذا حدشان نیز مثبت است. $l = \frac{۱+\sqrt{۱+۴a}}{۲}$ قابل قبول

تست: حد دنباله‌ی ... , $\sqrt{۶}, \sqrt{۶+\sqrt{۶}}, \sqrt{۶+\sqrt{۶+\sqrt{۶}}}$ برابر است با:

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) $\sqrt{۳}$

$$l = \frac{۱+\sqrt{۱+۴l}}{۲} = \frac{۱+\sqrt{۲۵}}{۲} = ۳$$

۳۷) حد دنباله‌ی $\sqrt{b + \sqrt{b^۲ + \sqrt{b^۴ + \sqrt{b^۸ + ...}}}}$ برابر است با: $\sqrt{b}\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)$

تست: حاصل $\sqrt{۳ + \sqrt{۹ + \sqrt{۲۷ + ...}}}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۱۵}}{۲}$ ۴) ۹

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{۳}\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right) = \frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۱۵}}{۲}$$

تست: حاصل تقریبی عبارت $۱ + \cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+...}}}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

حل: فرض می‌کنیم: $l = ۱ + \cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+...}}}$ لذا

$$l = ۱ + \frac{۱}{l} \Rightarrow l^۲ - l - ۱ = ۰ \Rightarrow l = \frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲} \Rightarrow l = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$ قابل قبول

۳۸) هرگاه $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند به طوریکه $\{a_n\}$ همگرا به ۰ و $\{b_n\}$ کراندار باشد آنگاه حد حاصلضربشان صفر

است. یعنی: $\lim_{n \to +\infty} a_n b_n = ۰$

تذکر: لزومی ندارد که $\{b_n\}$ حد داشته باشد.

مثال: حد مقابل را حساب کنید؟ $\lim_{n \to +\infty} \left\lfloor \frac{۲}{n} \right\rfloor \sin n = ۰ \times$ کران دار $= ۰$

۳۹) قضیه‌ی ساندویچ (اصل فشردگی): هرگاه دنباله‌های $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ هر دو به عدد حقیقی l همگرا باشند و از مرتبه‌ای به بعد مانند M (و یا به ازاء هر $n \in N$)، داشته باشیم $c_n \le a_n \le b_n$، آنگاه دنباله‌ی $\{a_n\}$ نیز همگراست و حد آن، همان l است.

مثال: با استفاده از قضیه‌ی فشردگی حد دنباله‌ی $a_n = \frac{n+\sin n}{n}$ را حساب کنید؟

$$a_n = ۱ + \frac{\sin n}{n} \Rightarrow ۱ - \frac{۱}{n} \le a_n \le ۱ + \frac{۱}{n}$$

چون $۱ = \lim_{n \to +\infty}(۱ + \frac{۱}{n})$, $\lim_{n \to +\infty}(۱ - \frac{۱}{n}) = ۱$، لذا طبق قضیه‌ی فشار داریم: $\lim_{n \to +\infty} a_n = ۱$

۴۰) مجموع و تفاضل یک دنباله‌ی همگرا با یک دنباله‌ی واگرا، همیشه دنباله‌ای واگرا است.

مثال: دنباله‌ی $\left\{(-۱)^n + \frac{۲n+۱}{n}\right\}$، دنباله‌ای واگرا است.

۴۱) مجموع و تفاضل و حاصلضرب و حاصل تقسیم دو دنباله‌ی واگرا، ممکن است همگرا باشد، ممکن است واگرا.

مثال: دنباله‌های $a_n = (-۱)^n$, $b_n = (-۱)^{n+۱}$، هر دو واگرایند اما دنباله‌ی مجموع یعنی: $a_n + b_n = (-۱)^n + (-۱)^{n+۱} = (-۱)^n - (-۱)^n = ۰$، دنباله ثابت $\{۰\}$ شده که همگرا به ۰ است.

۴۲) قاعده‌ی هوپیتال (لوپیتال): هرگاه $b_n = g(n)$, $a_n = f(n)$ دو دنباله باشند و داشته باشیم:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ یا $\frac{۰}{۰}$، برای رفع ابهام، می‌توان از دستور زیر استفاده کرد.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال: حد دنباله‌ی $a_n = \frac{n^۲}{e^n}$ را به کمک قاعده‌ی هوپیتال حساب کنید؟

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{x \to \infty} \frac{x^۲}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x \to \infty} \frac{۲x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x \to \infty} \frac{۲}{e^x} = \frac{۲}{\infty} = ۰$$

۴۳) هرگاه دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو کران دار باشند، آنگاه دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}$ و $\{a_n b_n\}$ نیز کراندارند.

۴۴) هرگاه $\{a_n\}$ کراندار و $\{b_n\}$ بی‌کران باشد، آنگاه دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}$ بی‌کرانند.

۴۵) هرگاه $\{a_n\}$ کراندار و $\{b_n\}$ بی‌کران باشد، آنگاه دنباله‌ی $\{a_n b_n\}$ ممکن است کران‌دار باشد، ممکن است بی‌کران.

۴۶) هرگاه $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو بی‌کران باشند، آنگاه دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}$ ممکن است کران‌دار باشد، ممکن است بی‌کران.

۴۷) هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی (یا نزولی) باشد، $\{-a_n\}$، نزولی (صعودی) خواهد بود.

۴۸) هرگاه $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو صعودی (یا هر دو نزولی) باشند دنباله‌ی $\{a_n + b_n\}$ نیز صعودی (یا نزولی) خواهد بود.

۴۹) هرگاه $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ دو دنباله با جملات مثبت بوده و هر دو صعودی (یا نزولی باشند) دنباله‌ی $\{a_n b_n\}$ نیز صعودی (یا نزولی) خواهد بود.

۵۰) هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی (یا نزولی) بوده و f تابعی صعودی باشد، آنگاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ صعودی (یا نزولی) خواهد بود، یعنی تابع صعودی، صعودی را به صعودی می‌برد و نزولی را به نزولی.

۵۱) هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی (یا صعودی) بوده و f تابعی نزولی باشد، آنگاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ صعودی (یا نزولی) خواهد بود، یعنی تابع نزولی، نزولی را به صعودی می‌برد و صعودی را به نزولی.

تست: کدام دنباله‌ی زیر نزولی است؟

۱) $a_n = \operatorname{Arctan}(\frac{1}{n^2+1})$ ۲) $a_n = -(\frac{1}{n+5})^3$

۳) $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ ۴) $a_n = \tan(\frac{n}{n+1})$

پاسخ صحیح، گزینه‌ی ۱ است. زیرا: $\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$ نزولی و $f(x) = \operatorname{Arctan}x$ صعودی است لذا: $a_n = \operatorname{Arctan}(\frac{1}{n^2+1})$ نیز نزولی است.

نکته‌ی مهم: مهمترین ویژگی دنباله‌ها، همگرا بودن آن‌هاست در زیر، دنباله‌های بسیار متنوعی ارائه شده است، ضمن محاسبه‌ی حد آنها، دنباله‌های همگرا و واگرا را مشخص کرده‌ایم. برای محاسبه‌ی حد برخی از دنباله‌ها، از هم ارزی استفاده نموده‌ایم، برای درک بهتر چگونگی محاسبه‌ی حد آنها مبحث هم ارزی را در بخش حد و لیست هم ارزیهای مهم را ملاحظه کنید.

۱) $a_n = \frac{1}{n}$	$l = 0$
۲) $a_n = \frac{n}{n+1}$	$l = 1$
۳) $a_n = \frac{n^2+1}{n}$	$l = +\infty$ واگرا
۴) $a_n = 2^n$	$l = +\infty$ واگرا
۵) $a_n = (-1)^n = -1, 1, -1, 1, \ldots$	$l =$ واگرا، (نامنحصربه فرد) موجود نیست
۶) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$	$l = \frac{\pm 1}{\infty} = 0$
۷) $a_n = \frac{3n^2}{2n^2+5}$	$l = \frac{3}{2}$
۸) $a_n = \frac{n}{n^3+7}$	$l = 0$
۹) $a_n = (\frac{2}{3})^n$	$l = 0$
۱۰) $a_n = \cos n\pi = (-1)^n$	$l =$ واگرا، (نامنحصربه فرد) موجود نیست
۱۱) $a_n = \cos\frac{n\pi}{2} =$ ۰ و ۱- و ۰ و ۱ و...	$l =$ واگرا، (نامنحصربه فرد) موجود نیست
۱۲) $a_n = \sin n\pi =$ ۰ و ۰ و ۰ و...	$l = 0$
۱۳) $a_n = 1 + \frac{1}{2n\pi}$	$l = 1$
۱۴) $a_n = \sin\frac{n\pi}{2} =$ ۱ و ۰ و ۱- و ۰ و...	$l =$ واگرا، (نامنحصربه فرد) موجود نیست

۱۵) $a_n = \cos(2n+1)\pi = -1$ و -1 و -1 و ... — $l = -1$

۱۶) $a_n = \frac{\sin n}{n}$ — $l = \frac{-1 \le \text{عدد} \le 1}{\infty} = 0$

۱۷) $a_n = (\frac{\pi}{e})^n$ — $l = +\infty$ واگرا، $\frac{\pi}{e} > 1$

۱۸) $a_n = (-1)^{2n+3} = -1$ و -1 و -1 و ... — $l = -1$

۱۹) $a_n = (-1)^n \cos n\pi$ — $a_n = (-1)^n(-1)^n = (-1)^{2n} = 1$ $l = 1$

۲۰) $a_n = \sqrt[n]{n}$ — $l = 1$

۲۱) $a_n = \sqrt[n]{2}$ — $l = 1$

۲۲) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ — $l = e$

۲۳) $a_n = \log\frac{2n+1}{n}$ — $l = \log 2$

۲۴) $a_n = \text{Arccos}\frac{1-\sqrt{3}n}{2n}$ — $l = \text{Arccos}(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$

۲۵) $a_n = \text{Arctan}\, n$ — $l = \text{Arctan}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$

۲۶) $a_n = \sin\frac{1}{n}$ — $l = \sin 0 = 0$

۲۷) $a_n = \cos\frac{1}{n}$ — $l = \cos 0 = 1$

۲۸) $a_n = \sin n$ — $l = \sin\infty =$ عددی نامعلوم بین 1 و -1 = موجود نیست، واگرا

۲۹) $a_n = \cos n!$ — $l = \cos\infty =$ عددی نامعلوم بین 1 و -1 = موجود نیست، واگرا

۳۰) $a_n = \frac{2^n}{n!}$ — $l = 0$ (سرعت رشد)

۳۱) $a_n = \sqrt[n]{1 + 3^{2n} + 5^n}$ — $l = 3^2 = 9$

۳۲) $a_n = \tan\sqrt{\frac{\pi^2 n^2 - 8}{16n^2}}$ — $l = \tan\sqrt{\frac{\pi^2}{16}} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

۳۳) $a_n = n\lfloor\frac{1}{n}\rfloor$ — $l = \lim_{n \to +\infty} a_n \sim \lim_{n \to +\infty} n \times \frac{1}{n} = 1$

۳۴) $a_n = 10 - \lfloor\frac{-10}{n}\rfloor$ — $l = 10 - \lfloor 0^- \rfloor = 11$

۳۵) $a_n = \lfloor n \rfloor + \lfloor -n \rfloor$ — $a_n = n + (-n) = 0 \Rightarrow l = 0$

۳۶) $a_n = \lfloor\frac{5}{n}\rfloor(\sin n + \cos n)$ — $l = \lfloor 0^+ \rfloor \times$ کراندار $= 0 \times$ کراندار $= 0$

۳۷) $a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$ — $a_n = (-1)^n - (-1)^n = 0 \Rightarrow l = 0$

۳۸) $a_n = (\frac{\pi}{e})^{1-n}$ — $a_n = (\frac{e}{\pi})^{n-1} \Rightarrow l = 0$

۳۹) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ — $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \Rightarrow l = 0$

۴۰) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ — $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \Rightarrow l = \lim_{n \to +\infty}\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$

۴۱) $a_n = (\frac{۵}{۳})^{-n}$ $a_n = (\frac{۵}{۳})^n \Rightarrow l = ۰$

۴۲) $a_n = \frac{۲n + \sin n!}{۳n - \cos n!}$ $l = \frac{۲}{۳}$

۴۳) $a_n = \frac{\sin n + ۲n^۲ - ۱}{۵n^۲ + ۱}$ $l = \frac{۲}{۵}$

۴۴) $a_n = (۲ + ۲^{-n})^{-۲}$ $a_n = (۲ + \frac{۱}{۲^n})^{-۲} \Rightarrow l = (۲+۰)^{-۲} = \frac{۱}{۴}$

۴۵) $a_n = n\sin\frac{۱}{n}$ $l = \lim_{n \to +\infty} n \times \frac{۱}{n} = ۱$

۴۶) $a_n = ۲n\sin\frac{\pi}{n}$ $l = \lim_{n \to +\infty} ۲n \times \frac{\pi}{n} = ۲\pi$

۴۷) $a_n = \frac{۵n^۲}{۲n+۳}\sin\frac{\pi}{۵n}$ $l = \lim_{n \to +\infty} \frac{۵n^۲}{۲n+۳} \times \frac{\pi}{۵n} \sim \lim_{n \to +\infty} \frac{\pi n^۲}{۲n^۲} = \frac{\pi}{۲}$

۴۸) $a_n = \begin{cases} \frac{n}{n+۱} & (\text{زوج } n) \\ \frac{۱}{n} & (\text{فرد } n) \end{cases}$ $l = \begin{cases} ۱ & (\text{زوج } n) \\ ۰ & (\text{فرد } n) \end{cases}$ واگرا

۴۹) $a_n = (n + \sqrt{n^۲ + n})\sin\frac{۱}{n}$ $l = \lim_{n \to +\infty} (n + n) \times \frac{۱}{n} = ۲$

۵۰) $a_n = (\log ۲)^n$ $l = ۰ \quad (۰ < \log ۲ < ۱)$

۵۱) $a_n = (۲ + \frac{۱}{n})^۳$ $l = (۲+۰)^۳ = ۸$

۵۲) $a_n = (۱ + \frac{۵}{۲n})^{۴n}$ $l = e^{۱۰}$

۵۳) $a_n = (\frac{۲n+۵}{n+۹})^{-n}$ $l = ۲^{-\infty} = \frac{۱}{۲^\infty} = ۰$

۵۴) $a_n = (۱ + \frac{۳}{n^۳})^{۲n}$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = ((۱ + \frac{۳}{n^۳})^{n^۳})^{\frac{۲}{n^۲}} = (e^۳)^۰ = ۱$

۵۵) $a_n = (۵ + \frac{۱}{n})^n$ $l = (۵ + ۰)^\infty = \infty$ ، واگرا

۵۶) $a_n = n^۴(۱ + \frac{۴}{n})^{۲n}\sin(\frac{e}{n})^۴$ $\lim_{n \to +\infty} a_n \sim \lim_{n \to +\infty} n^۴(۱ + \frac{۴}{n})^{۲n} \times (\frac{e}{n})^۴ = e^۸ \times e^۴ = e^{۱۲}$

۵۷) $a_n = (\cos\frac{۱}{n} + \sin\frac{۱}{n})^n$ $\lim_{n \to +\infty} a_n \sim \lim(۱ + \frac{۱}{n})^n = e$

۵۸) $a_n = \sin\frac{n\pi}{۲}\cos\frac{n\pi}{۲}\cos n\pi$ $a_n = \frac{۱}{۲}\sin n\pi \cos n\pi \Rightarrow l = \frac{۱}{۲} \times ۰ \times$ کران‌دار $= ۰$

۵۹) $a_n = \sqrt[۳]{\frac{(۳ - \sqrt{n})(\sqrt{n} + ۲)}{۸n - ۴}}$ $l = \sqrt[۳]{\frac{-n}{۸n}} = -\frac{۱}{۲}$

۶۰) $a_n = \operatorname{Arctan}\frac{n^۲-۱}{۱-n}$ $\quad l = \operatorname{Arctan}(-\infty) = -\frac{\pi}{۲}$

۶۱) $a_n = \begin{cases} n^۵ & ,(n < ۱۰۰۰) \\ \frac{n-۱}{n+۱} & ,(n \geq ۱۰۰۰) \end{cases}$ $\quad l = \lim_{n \to +\infty} \frac{n-۱}{n+۱} = ۱$

۶۲) $a_n = n^۲(۱ - \cos\frac{۲\pi}{n})$ $\quad l \sim \lim_{n \to +\infty} n^۲ \times \frac{(\frac{۲\pi}{n})^۲}{۲} = ۲\pi^۲$

۶۳) $a_n = n^۳(\frac{۱}{n} - \sin\frac{۱}{n})$ $\quad l \sim \lim_{n \to +\infty} n^۳ \times \frac{۱}{۶}(\frac{۱}{n})^۳ = \frac{۱}{۶}$

۶۴) $a_n = n^۳(\tan\frac{۱}{n} - \sin\frac{۱}{n})$ $\quad l = \lim_{n \to +\infty} n^۳ \times \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{n})^۳ = \frac{۱}{۲}$

۶۵) $a_n = ۲\operatorname{Arctan}\frac{۵}{۲\sqrt{۲}(\sqrt{۳n+۱} - \sqrt{۳n-۴})}$ $\quad l = ۲\operatorname{Arctan}\frac{۵(\sqrt{۳n+۱} + \sqrt{۳n+۴})}{۲\sqrt{n} \times ۵} =$

$= ۲\operatorname{Arctan}\frac{۱۰\sqrt{۳n}}{۱۰\sqrt{n}} = ۲ \times \frac{\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳}$

۶۶) $a_n = \sqrt{n^۲ + ۲n} - \sqrt{n^۲ - ۲n + ۷}$ $\quad l = \lim_{n \to +\infty}(|n+۱| - |n-۱|) = ۲$

۶۷) $a_n = \frac{\sqrt{۴n+۵}}{\sqrt{n+۱} + \sqrt{n+۲}}$ $\quad l = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{۴n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = ۱$

۶۸) $a_n = \begin{cases} \frac{۲n+۱}{n^۲} & (\text{n زوج}) \\ \frac{۲^n}{n!} & (\text{n فرد}) \end{cases}$ $\quad l = \begin{cases} ۰ \\ ۰ \end{cases} \Rightarrow l = ۰$

۶۹) $a_n = \frac{۱^۷ + ۲^۷ + ۳^۷ + ... + n^۷}{n^۸}$ $\quad l \sim \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{۱}{۸}n^۸}{n^۸} = \frac{۱}{۸}$

۷۰) $a_n = \frac{۱^۳ + ۲^۳ + ... + n^۳}{(۱+۲+۳+...+n)^۲}$ $\quad l \sim \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{۱}{۴}n^۴}{(\frac{۱}{۲}n^۲)^۲} = ۱$

۷۱) $a_n = \frac{۱}{n^۴} + \frac{۲}{n^۴} + \frac{۳}{n^۴} + ... + \frac{n^۲}{n^۴}$ $\quad l = \lim_{n \to +\infty} \frac{۱+۲+۳+...+n^۲}{n^۴} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{n^۲(n^۲+۱)}{۲}}{n^۴} = \frac{۱}{۲}$

۷۲) $a_n = \frac{۱+۲+۳+...+n}{۳n^۲+۵}$ $\quad l = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{۱}{۲}n^۲}{۳n^۲} = \frac{۱}{۶}$

۷۳) $a_n = \sqrt{n + ۲\sqrt{n}} - \sqrt{n - ۲\sqrt{n}}$ $\quad \lambda = \lim_{n \to +\infty} \frac{n + ۲\sqrt{n} - n + ۲\sqrt{n}}{\sqrt{n+۲\sqrt{n}} + \sqrt{n+۲\sqrt{n}}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{۴\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = ۲$

۷۴) $a_n = (-۱)^n + ۹$

واگرا، $l = \begin{cases} ۸ \\ ۱۰ \end{cases}$ ، $a_n = \begin{cases} ۸ & (\text{n فرد}) \\ ۱۰ & (\text{n زوج}) \end{cases}$

۷۵) $a_n = \dfrac{(-۱)^n n}{n+۵}$

واگرا $\Rightarrow l = \begin{cases} -۱ \\ ۱ \end{cases}$ ، $a_n = \begin{cases} \dfrac{-n}{n+۵}, & (\text{n فرد}) \\ \dfrac{n}{n+۵}, & (\text{n زوج}) \end{cases}$

۷۶) $a_n = \dfrac{(-۱)^n n}{n^۲+۳}$

درجه‌ی صورت از مخرج کمتر است. $l = ۰$

۷۷) $a_n = \dfrac{(-۱)^n n^۲}{n+۷}$

واگرا، درجه‌ی مخرج از صورت کمتر است. $l = \pm\infty$

۷۸) $a_n = \dfrac{۲^n + (-۲)^n}{۲^n}$

واگرا $\Rightarrow l = \begin{cases} ۰ \\ ۲ \end{cases}$ ، $a_n = \begin{cases} ۰, & (\text{n فرد}) \\ ۲, & (\text{n زوج}) \end{cases}$

۷۹) $a_n = \dfrac{\sqrt{۸n + \sqrt{۶n}}}{\sqrt{۲n + \sqrt{۵n}}}$

$l \sim \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{۸n}}{\sqrt{۲n}} = \sqrt{۴} = ۲$

۸۰) $a_n = \dfrac{(۳n+۱)^{۲۰}(۲n+۷)^{۳۰}}{(۶n+۹)^{۵۰}}$

$l \sim \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(۳n)^{۲۰}(۲n)^{۳۰}}{(۶n)^{۵۰}} = \dfrac{۳^{۲۰} \times ۲^{۳۰}}{۶^{۵۰}}$

۸۱) $a_n = \dfrac{۱+۳+۵+\dots+(۲n-۱)}{n+۱} - \dfrac{۲n+۱}{۲}$

$l = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n^۲}{n+۱} - \dfrac{۲n+۱}{۲}\right) = \lim \dfrac{-۳n-۱}{۲n+۲} = \dfrac{-۳}{۲}$

۸۲) $\sqrt{۵}, \sqrt{۵\sqrt{۵}}, \sqrt{۵\sqrt{۵\sqrt{۵}}}, \dots$

$l = ۵$

۸۳) ۱ و ۱/۱ و ۱/۱۱ و ۱/۱۱۱ و ...

$l = ۱/\overline{۱} = ۱ + ۰/\overline{۱} = ۱ + \dfrac{۱}{۹} = \dfrac{۱۰}{۹}$

۸۴) ۱ و $۱ + \dfrac{۱}{۲}$ و $۱ + \dfrac{۱}{۲} + \dfrac{۱}{۴}$ و ...

$a_n = ۱ + \dfrac{۱}{۲} + \dfrac{۱}{۴} + \dots + \dfrac{۱}{۲^{n-۱}} = \dfrac{۱\left(۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^n\right)}{۱-\frac{۱}{۲}} \Rightarrow l = \dfrac{۱-۰}{\frac{۱}{۲}} = ۲$

۸۵) $\left(\dfrac{۲}{۱}\right), \left(\dfrac{۳}{۲}\right)^۲, \left(\dfrac{۴}{۳}\right)^۳, \dots$

$a_n = \left(\dfrac{n+۱}{n}\right)^n = \left(۱ + \dfrac{۱}{n}\right)^n \Rightarrow l = e$

۸۶) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^۲ + \sqrt{۸n^۴ + \sqrt{n^۸}}}}{n}$

$a_n = \dfrac{\sqrt{n^۲ + \sqrt{۸n^۴ + n^۴}}}{n} = \dfrac{\sqrt{n^۲ + ۳n^۲}}{n} = \dfrac{۲n}{n} \Rightarrow l = ۲$

۸۷) $a_n = \dfrac{۵n + |۲n-۳|}{|۱-۳n| + ۴n}$

$l = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{۵n + ۲n - ۳}{۳n - ۱ + ۴n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{۷n}{۷n} = ۱$

۸۸) $a_n = \dfrac{۲^{n-۱} + ۳^{n-۱}}{۲^{n+۱} + ۳^{n+۱}}$

$l = \dfrac{۳^{-۱}}{۳} = \dfrac{۱}{۹}$

۸۹) $a_n = \dfrac{n(n+۲)}{n+۱} - \dfrac{n^۳}{n^۲+۱}$

$l = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(n^۲+۲n)(n^۲+۱) - n^۳(n+۱)}{(n+۱)(n^۲+۱)}$

$l = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^۳}{n^۳} = ۱$

۹۰) $a_n = n^{10} e^{-n}$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n^{10}}{e^n} \Rightarrow f(x) = \frac{x^{10}}{e^x}$$

$$\text{۱۰ بار هوپیتال} \Rightarrow l = \lim_{x \to +\infty} \frac{10!}{e^x} = 0$$

۹۱) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$

$$a_n = \frac{1(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow l = \frac{1 - 0}{\frac{1}{2}} = 2$$

۹۲) $a_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \text{ قاعده‌ی تلسکوپی}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \quad \Rightarrow l = 1 - 0 = 1$$

۹۳) $a_n = \sqrt{3}\,\sqrt[4]{3}\,\sqrt[8]{3} \dots \sqrt[2^n]{3}$

$$\Rightarrow a_n = 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} \times \dots \times 3^{\frac{1}{2^n}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \left(3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}}\right) = 3^{\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}} = 3$$

قاعدهٔ تلسکوپی را در مبحث سری، در ویژگیهای $\sum$، ملاحظه نمائید.

چیزی بگو که ارزش آن بیش از خاموشی باشد. «فیثاغورث»

حقیقت گرانبهاترین چیزی است که ما داریم، بهتر است در مصرف آن صرفه‌جوئی کنیم.
«مارک تواین»

تست ۱:

۱ـ حد دنباله‌ی $a_n=\sqrt{n}\,(\sqrt{n+a}-\sqrt{n})$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) a ۴) $\frac{a}{2}$

۲ـ کوچکترین مقدار دنباله‌ی $a_n=\frac{n^4+1-4n^2}{n^2}$ برابر است با:

۱) ۲- ۲) ۴- ۳) ۱ ۴) ۲

۳ـ جمله‌ی عمومی یک دنباله به صورت $a_n=\frac{\sqrt{n}}{n+100}$ می‌باشد، چندمین جمله‌ی دنباله، بیشترین مقدار را دارد؟

۱) جمله‌ی پنجاهم ۲) جمله‌ی دویستم ۳) جمله‌ی سیصدم ۴) جمله‌ی صدم

۴ـ $\lim_{n\to+\infty}\frac{3n+|2n-1|}{3-|1-5n|}$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۰ ۴) موجود نیست.

۵ـ چند جمله‌ی دنباله‌ی $\{a_n\}$ که به صورت $a_n=\frac{3n-1}{2n+4}$ تعریف شده است در نامعادله‌ی $|a_n-\frac{3}{2}|<0/035$ صدق نمی‌کند؟

۱) ۹۶ ۲) ۹۹ ۳) ۹۷ ۴) ۹۸

۶ـ در دنباله‌ی $a_n=\frac{4n+1}{2n-5}$، به ازاء چه مقادیری از n، نامساوی $1/99<a_n<2/01$ برقرار است؟

۱) $n\geq 551$ ۲) $n\geq 544$ ۳) $n\geq 553$ ۴) $n\geq 552$

۷ـ صدمین جمله از دنباله‌ی ...، 13^2، 9^2، 5^2، 1^2، کدام است؟

۱) 353^2 ۲) 392^2 ۳) 397^2 ۴) 401^2

۸ـ دنباله‌ی با جمله‌ی عمومی $a_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$ مفروض است، کدام گزینه‌ی زیر نادرست است؟

۱) $a_1+a_2=\frac{13}{12}$ ۲) $a_3=\frac{37}{60}$

۳) $\{a_n\}$ نزولی است. ۴) $a_{n+1}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n+2}$

۹ـ دنباله‌ی $a_n=\{\lfloor -\sqrt{n}\rfloor\}$ چگونه است ($\lfloor\ \rfloor$ به معنی جزء صحیح است)

۱) صعودی اکیداً ۲) نزولی اکیداً ۳) صعودی ۴) نزولی

۱۰ـ هرگاه c یک عدد حقیقی ثابت باشد، کدام حکم درباره‌ی دنباله‌ی $\{c^n\}$ صحیح نیست؟

۱) اگر $|c|<1$ باشد، آنگاه $\{c^n\}$ همگراست. ۲) اگر $|c|>1$ باشد، آنگاه $\{c^n\}$ واگراست.

۳) اگر $|c|=1$ باشد، آنگاه $\{c^n\}$ همگراست. ۴) فقط به ازاء دو مقدار صحیح c، دنباله‌ی $\{c^n\}$ همگراست.

۱ـ (۴) $a_n=\frac{\sqrt{n}(n+a-n)}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a\sqrt{n}}{۲\sqrt{n}}=\frac{a}{۲}$

۲ـ (۱) $a_n=n^۲+\frac{۱}{n^۲}-۴\geq ۲-۴\geq -۲ \Rightarrow Min(a_n)=-۲$

یادآوری: هرگاه $a>۰$ آنگاه $a+\frac{۱}{a}\geq ۲$

۳ـ (۴) $a_n=\frac{\sqrt{n}}{n+۱۰۰} \Rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+۱۰۰} \Rightarrow f'(x)=\frac{۱۰۰-x}{۲\sqrt{x}\,(x+۱۰۰)^۲}=۰$

$x=۱۰۰ \Rightarrow$

x	$-\infty$	۱۰۰	$+\infty$
$f'(x)$	+	۰	−
$f(x)$	↗	Max	↘

۴ـ (۲) $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{۳n+۲n-۱}{۳+۱-۵x}=-۱$

۵ـ (۴) $\left|\frac{۳n-۱}{۲n+۴}-\frac{۳}{۲}\right|<\frac{۳۵}{۱۰۰۰} \Rightarrow \left|\frac{۳n-۱-۳n-۶}{۲n+۴}\right|<\frac{۳۵}{۱۰۰۰}$

$\frac{۷}{n+۲}<\frac{۳۵}{۵۰۰} \Rightarrow n>۹۸ \Rightarrow n\geq ۹۹$

این مقادیر در نامعادله صدق می‌کنند.

لذا $n<۹۹$ یا $n\leq ۹۸$ در نامعادله صدق نمی‌کنند.

۶ـ (۳) $۱/۹۹<a_n<۲/۰۱ \Rightarrow -۰/۰۱<a_n-۲<۰/۰۱ \Rightarrow |a_n-۲|<\frac{۱}{۱۰۰}$

$\left|\frac{۴n+۱}{۲n-۵}-۲\right|<\frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow \left|\frac{۴n+۱-۴n+۱۰}{۲n-۵}\right|<\frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۱۱}{۲n-۵}<\frac{۱}{۱۰۰}$

$\Rightarrow ۲n-۵>۱۱۰۰ \Rightarrow n>۵۵۲/۵ \Rightarrow n\geq ۵۵۳$

۷ـ (۳) $۱^۲, ۵^۲, ۹^۲, ۱۳^۲, \ldots \Rightarrow ۱, ۵, ۹, ۱۳, \ldots$ تصاعد حسابی

$t_n=a+(n-۱)d \Rightarrow t_{۱۰۰}=۱+۹۹(۴)=۳۹۷ \Rightarrow ۳۹۷^۲$

۸ـ (۳) $a_n=\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\frac{۱}{n+۳}+\ldots+\frac{۱}{۲n}$

$\frac{۱}{۲}، \frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}، \frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}، \ldots$ این دنباله صعودی است.

۹ـ (۴) $\lfloor -\sqrt{۱}\rfloor, \lfloor -\sqrt{۲}\rfloor, \lfloor -\sqrt{۳}\rfloor, \lfloor -\sqrt{۴}\rfloor, \lfloor -\sqrt{۵}\rfloor, \ldots$

-۱ و -۲ و -۲ و -۲ و -۳ و -۳ و ...

۱۰ـ (۳) این دنباله به ازاء $c=-۱$ به صورت $(-۱)^n$ در می‌آید که واگراست.

$|c|=۱ \Rightarrow c=\pm ۱$

تست ۲:

۱ـ چند تا از دنباله‌های زیر، هم صعودی‌اند و هم نزولی؟

الف) $\left\lfloor \frac{-۱}{n} \right\rfloor - ۱$ ب) $۹ + (-۱)^{۴n+۳}$ ج) $(-۱)^n \cos n\pi$ د) $\sin n\pi$ هـ) $\sin\frac{n\pi}{۲}$ ی) $\cos(۲n+۱)\pi$

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۲ـ کدامیک از دنباله‌های زیر، یکنوای اکید و بی‌کران است؟

۱) $\left\{\frac{n-۱}{n+۱}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{۱}{n^۲}\right\}$ ۳) $\left\{\sqrt{n+۲}\right\}$ ۴) $\left\{\sin\frac{n\pi}{۵}\right\}$

۳ـ حد دنباله‌ی $\left\{\frac{۱-۲+۳-۴+۵-۶+...+۲n-۱-۲n}{\sqrt{n^۲+۲n}+n}\right\}$ **برابر است با:**

۱) ۲ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۴ـ هرگاه $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله‌ی مثبت و صعودی باشند، کدام حکم زیر نادرست است؟

۱) $\{a_n + b_n\}$ صعودی است. ۲) $\{a_n b_n\}$ صعودی است.

۳) $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ صعودی است. ۴) $\{\frac{۱}{a_n}\}$ نزولی است.

۵ـ جمله‌ی عمومی یک دنباله به صورت $a_n = \begin{cases} ۱-\frac{۱}{۲^{\frac{n+۱}{۲}}} & (\text{فرد } n) \\ \frac{۱}{\sqrt{۲^n}} & (\text{زوج } n) \end{cases}$ **است، $a_{۱۰}+a_{۱۱}$ برابر است با:**

۱) $\frac{۶۴}{۶۵}$ ۲) $\frac{۶۵}{۶۴}$ ۳) $\frac{۶۳}{۶۴}$ ۴) $\frac{۶۱}{۶۴}$

۶ـ دنباله‌ی $\{\text{Arccos}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})\}$ به کدام عدد زیر همگراست؟

۱) ۰ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۲}$

۷ـ دنباله‌ی $\{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}-\sqrt{n}\}$ ...

۱) همگرا به ۰ است. ۲) همگرا به ۱ است. ۳) همگرا به $\frac{۱}{۲}$ است. ۴) واگراست.

۸ـ دنباله‌ی $\left\{\left\lfloor\frac{n+(-۱)^n}{n}\right\rfloor\right\}$

۱) همگرا به صفر است. ۲) همگرا به ۱ است. ۳) همگرا به (۱−) است. ۴) واگراست

۹ـ برد دنباله‌ی $\{\cos\frac{n\pi}{۶}\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۰ـ دنباله‌ی ... و ۰/۲۳۵۵۵ و ۰/۲۳۵۵ و ۰/۲۳۵

۱) همگرا به ۰/۲۳۶ است. ۲) همگرا به $\frac{۵۳}{۲۲۵}$ است. ۳) همگرا به $\frac{۱۱۵}{۴۵۰}$ است. ۴) همگرا به $\frac{۲۱۲}{۹۹۰}$ است.

۱ـ (۲) دنباله‌های (الف)، (ب) و (ج) و (د) و (ی) دنباله‌هائی ثابت هستند و لذا هم صعودی و هم نزولی‌اند.

۲ـ (۳) دنباله‌ی $a_n = \sqrt{n+۲}$ صعودی است. زیرا مشتقش مثبت است و $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+۲} = +\infty$

۳ـ (۲)
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(۱+۳+...+۲n-۱)-(۲+۴+۶+...+۲n)}{|n+۱|+n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^۲-n(n+۱)}{۲n+۱} = -\frac{۱}{۲}$$

راه دوم:
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-۱+(-۱)+(-۱)+...+(-۱)}{|n+۱|+n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-n}{۲n+۱} = \frac{-۱}{۲}$$

۴ـ (۳) مشتق گزینه‌های (۱) و (۲) مثبت و لذا صعودی‌اند و مشتق گزینه‌ی (۴) منفی و لذا نزولی است.

۵ـ (۲)
$$a_{۱۰} = \frac{۱}{\sqrt{۲^{۱۰}}} + (۱-\frac{۱}{۲^۶}) = \frac{۱}{۲^۵} + (۱-\frac{۱}{۲^۶}) = \frac{۶۵}{۶۴}$$

۶ـ (۳)
$$\lim_{n\to+\infty}\text{Arccos}\frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} \sim \lim_{n\to+\infty}\text{Arccos}\frac{\sqrt{n}}{۲\sqrt{n}} = \frac{\pi}{۳}$$

۷ـ (۳)
$$\lim_{n\to+\infty}a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}+\sqrt{n}} \sim \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{۲\sqrt{n}} = \frac{۱}{۲}$$

۸ـ (۴)
$$a_n = \begin{cases} \left\lfloor\frac{n+۱}{n}\right\rfloor & (\text{زوج } n) \\ \left\lfloor\frac{n-۱}{n}\right\rfloor & (\text{فرد } n)\end{cases} \Rightarrow a_n = \begin{cases} \left\lfloor ۱+\frac{۱}{n}\right\rfloor & (\text{زوج } n) \\ \left\lfloor ۱-\frac{۱}{n}\right\rfloor & (\text{فرد } n)\end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} ۱ & (\text{زوج } n) \\ ۰ & (\text{فرد } n)\end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}a_n = \text{موجود نیست}$$

۹ـ (۲)
$$\text{برد} = \left\{\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{۱}{۲}, ۰, -\frac{۱}{۲}, -\frac{\sqrt{۳}}{۲}, -۱, ۱\right\}$$

۱۰ـ (۲)
$$\lim_{n\to+\infty}a_n = ۰/۲۳\overline{۵} = \frac{۲۳۵-۲۳}{۹۰۰} = \frac{۵۳}{۲۲۵}$$

خودستائی جان من، برهان نادانی بود. «حافظ»

بسیار سفر باید، تا پخته شود خامی. (سعدی)

تست ۳:

۱ـ کدام دنباله‌ی زیر واگراست؟

۱) $\left\{(-1)^{n+3}\cos n\pi\right\}$ ۲) $\{n^2 e^{-n}\}$ ۳) $\left\{\frac{\sqrt[5]{6n^4}}{n+2}\right\}$ ۴) $\left\{\frac{3^{n-5}+4}{2^{n+3}-10}\right\}$

۲ـ دنباله‌ی $\left\{\frac{1000^n+(-1000)^n}{1000^n}\right\}$ چگونه است؟

۱) همگرا به ۱ ۲) همگرا به ۰ ۳) همگرا به ۱- ۴) واگرا

۳ـ دنباله‌ی $\left\{\frac{n^2}{\sqrt{2^n}}\right\}$ است؟

۱) همگرا به ۱ ۲) همگرا به $\frac{1}{2}$ ۳) همگرا به ۰ ۴) واگرا

۴ـ دنباله‌ی $u_n=\frac{n^2+2}{n^2+1}$

۱) نزولی است و کران بالای آن ۱ است. ۲) صعودی است و کران بالای آن ۱ است.

۳) نزولی است و کران پائین آن ۱ است. ۴) صعودی است و کران پائین آن ۱ است.

۵ـ در دنباله‌ی $\{\frac{2n^2}{n^2+1}\}$، کمترین مقدار M به طوری که به ازاء هر $n > M$ داشته باشیم $\left|\frac{2n^2}{n^2+1}-2\right| < \frac{1}{41}$ کدام است؟

۱) ۷۰ ۲) ۹ ۳) ۷ ۴) ۹۰

۶ـ اگر دنباله‌ی $\left\{\frac{3-c^n}{5+c^{2n}}\right\}$ همگرا باشد، آنگاه:

۱) $|c| < 1$ ۲) $|c| > 1$ ۳) $|c| \geq 1$ ۴) $c \neq -1$

۷ـ دنباله‌ی $\left\{n^3(\tan\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n})\right\}$

۱) همگرا به $\frac{1}{3}$ است. ۲) همگرا به $\frac{1}{2}$ است. ۳) همگرا به $\frac{1}{6}$ است. ۴) همگرا به ۲ است.

۸ـ کدام دنباله، نه کران بالا دارد و نه کران پائین؟

۱) $\{3^n\}$ ۲) $\{\frac{n^3}{n+4}\}$ ۳) $\{\frac{(-1)^n}{n+5}\}$ ۴) $\{(-1)^{n+7}n\}$

۹ـ کوچکترین کران بالای مجموعه‌ی $\left\{\frac{4n+1}{5n+3} : n\in N\right\}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) وجود ندارد

۱۰ـ کمترین فاصله‌ی بین کرانهای بالا و پائین دنبالهٔ $a_n=\frac{2n+1}{n+1}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱ـ (۴) سرعت رشد $۳^{n-۵}$ از $۲^{n+۳}$ بیشتر است. ضمناً حد گزینه‌های (۲) و (۳) صفر و حد دنباله‌ی گزینه‌ی (۱)، ۱− است، زیرا
$(-۱)^{n+۳}(-۱)^{n} = (-۱)^{۲n+۳} = -۱$

۲ـ (۴) $a_n = \begin{cases} ۲ & (\text{زوج } n) \\ ۰ & (\text{فرد } n) \end{cases} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n =$ موجود نیست

۳ـ (۳) $a_n = \frac{n^۲}{۲^{\frac{n}{۲}}} = \frac{۴(\frac{n}{۲})^۲}{۲^{\frac{n}{۲}}} = \frac{۴t^۲}{۲^t} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = ۰$

سرعت رشد $t^۲$ از ۲^t کمتر است.

۴ـ (۳) عدد ۱ کران پائین u_n است. $u_n = \frac{n^۲+۱+۱}{n^۲+۱} = ۱ + \frac{۱}{n^۲+۱} > ۱ \Rightarrow$

واضح است که u_n نزولی است.

۵ـ (۲) $\left| \frac{۲n^۲ - ۲n^۲ - ۲}{n^۲+۱} \right| < \frac{۱}{۴۱} \Rightarrow n^۲ + ۱ > ۸۲ \Rightarrow n^۲ > ۸۱ \Rightarrow n > ۹$

۶ـ (۴) $|c| < ۱ \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{۳-۰}{۵+۰} = \frac{۳}{۵}$ همگراست

$|c| > ۱ \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \sim \lim_{n\to+\infty} \frac{-c^n}{c^{۲n}} = \lim_{n\to+\infty} -(\frac{۱}{c})^n = ۰$ همگراست

$c = ۱ \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{۳-۱}{۵+۱} = \frac{۱}{۳}$ همگراست

$c = -۱ \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{۳-(-۱)^n}{۵+(-۱)^{۲n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{۱}{۶}(۳-(-۱)^n) =$ واگراست

۷ـ (۲) $\tan x - \sin_{x\to۰} x \sim \frac{۱}{۲}x^۳$

$\lim_{n\to+\infty} a_n \to \lim_{n\to+\infty} n^۳ \times \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{n})^۳ = \frac{۱}{۲}$

۸ـ (۴) $a_n = \begin{cases} -n & (\text{زوج } n) \\ n & (\text{فرد } n) \end{cases} \Rightarrow -\infty < a_n < +\infty$

۹ـ (۲) چون دنباله صعودی و همگراست پس سوپریممش، همان حد دنباله یعنی $\frac{۴}{۵}$ است. به یاد داشته باشید که sup دنباله، همان کوچکترین کران بالای دنباله در صورت وجود است.

۱۰ـ (۴) چون دنباله صعودی و همگراست.

کوچکترین کران بالا = $\sup(a_n) = ۲$

بزرگترین کران بالا = $\inf(a_n) = \frac{۳}{۲}$

لذا $\frac{۳}{۲} < a_n < ۲$ و بنابراین $۲ - \frac{۳}{۲} = \frac{۱}{۲}$ = بزرگترین کران پائین − کوچکترین کران بالا = کمترین فاصله‌ی بین کرانهای بالا و پائین

بهترین وسیله برای فتح و پیروزی، سپاه امیدواری است. (کیخسرو)

تست ۴:

۱ـ حد دنباله‌ی ... , $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$, $\sqrt{6+\sqrt{6}}$, $\sqrt{6}$ برابر است با:

۱) ۶ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) ۳ ۴) ۲−

۲ـ کدام دنباله‌ی زیر، کراندار و یکنواست؟

۱) $\frac{(-1)^n}{n+1}$ ۲) $\frac{2n-1}{n+3}$ ۳) $\frac{n^3}{n+2}$ ۴) $\sin\frac{n\pi}{2}$

۳ـ هرگاه $a_n=\frac{n^2+(-1)^n}{n^2}$ و $|a_n-1|<0/0001$ به ازاء هر $n\geq M$ و $M\in N$ برقرار باشد، حداقل مقدار M کدام است؟

۱) ۱۰۲ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۰۱ ۴) 10^3

۴ـ در دنباله‌ی $a_n=\begin{cases}k+2 & ,(n=2k+1)\\ \frac{1}{k+3} & ,(n=2k)\end{cases}$ **مجموع جملات پنجم و دهم برابر است با:**

۱) $\frac{57}{8}$ ۲) $\frac{92}{13}$ ۳) $\frac{33}{8}$ ۴) $\frac{53}{13}$

۵ـ کدام نادرست است؟

۱) هر دنباله‌ی واگرا، بی‌کران است.

۲) هر دنباله‌ی همگرا، کراندار است.

۳) دنباله‌ی کراندار، اگر یکنوا باشد، همگراست.

۴) تفاضل یک دنباله‌ی همگرا از یک دنباله‌ی واگرا، واگراست.

۶ـ دنباله‌ی بازگشتی $\begin{cases}a_1=\frac{5}{2}\\ a_{n+1}=4(1-\frac{1}{a_n})\end{cases}$ **همگراست، حد این دنباله برابر است با:**

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۴

۷ـ کدام گزینه در مورد دنباله‌ی $\left\{\frac{n!}{2\times4\times6\times\ldots\times2n}\right\}$ **صحیح است؟**

۱) صعودی و واگرا ۲) صعودی و همگرا ۳) نزولی و همگرا ۴) نزولی و واگرا

۸ـ هرگاه $\lim_{n\to+\infty}(a_n+3)=5$ و برای هر $n\in N$ داشته باشیم: $a_n\leq b_n\leq\sqrt[n]{n}+1$، کدام عبارت زیر صحیح است؟

۱) $\{b_n\}$ واگراست ۲) $\{\frac{1}{b_n}\}$ واگراست ۳) $\{1+3b_n\}$ همگراست ۴) $\{\frac{1}{b_n-2}\}$ همگراست

۹ـ چند تا از دنباله‌ی زیر کراندار و نزولی‌اند؟

الف) $\{\cos\frac{n\pi}{2}\}$ ب) $\{\frac{n^2}{n+1}\}$ ج) $\{\frac{n}{n+1}\}$ د) $\{\text{Arccot}n\}$ هـ) $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$ و) $\{\frac{n+3}{n+5}\}$

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

۱۰ـ دنباله‌ی $\{(\log5)^n\}$ دنباله‌ایست:

۱) واگرا و نزولی ۲) همگرا و نزولی ۳) صعودی و بی‌کران ۴) نزولی و بی‌کران

۱ـ (۳) $l=\sqrt{6+l} \Rightarrow l^2-l-6=0 \quad \begin{cases} l=-2 \\ l=3 \quad \text{قابل قبول} \end{cases}$

چون جملات دنباله همگی مثبت‌اند، لذا حدشان مثبت یا صفر است، و منفی نیست.

۲ـ (۲) چون دنباله همگراست پس کراندار است ضمناً مشتق دنباله مثبت و لذا دنباله صعودی و بنابراین یکنواست.

۳ـ (۳) $\left| \frac{n^2+(-1)^n}{n^2}-1 \right| < \frac{1}{10000} \quad \Rightarrow \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| < \frac{1}{10000}$

$\Rightarrow n^2 > 10000 \Rightarrow n > 100 \Rightarrow n \geq 101$

۴ـ (۳) $n=5=2k+1 \Rightarrow k=2 \quad \Rightarrow a_5=2+2=4$

$n=10=2k \Rightarrow k=5 \quad \Rightarrow a_{10}=\frac{1}{5+3}=\frac{1}{8}$

$a_5+a_{10}=\frac{33}{8}$

۵ـ (۱) دنباله $a_n=(-1)^n$ واگراست ولی کراندار است.

۶ـ (۲) ***یادآوری:*** $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \quad \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_{n+1}=l$

$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} 4(1-\frac{1}{a_n}) \quad \Rightarrow l=4(1-\frac{1}{l}) \Rightarrow l=2$

۷ـ (۳) $a_n=\frac{n!}{(2\times1)(2\times2)(2\times3)\dots(2\times n)}=\frac{n!}{2^n\times n!}=\frac{1}{2^n}$ نزولی و همگرا،

۸ـ (۳) $\lim_{n\to+\infty}(a_n+3)=5 \quad \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n=2 \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}(\sqrt[n]{n}+1)=1+1=2$

$a_n \leq b_n \leq \sqrt[n]{n}+1 \Rightarrow$ قضیه‌ی فشار $\lim_{n\to+\infty} b_n=2$

۹ـ (۴) دنباله‌های (ج) و (د) کراندار و نزولی‌اند.

۱۰ـ (۲) نزولی است $\log 1 < \log 5 < \log 10 \quad \Rightarrow 0 < \log 5 < 1 \quad \Rightarrow a_n=(\log 5)^n$

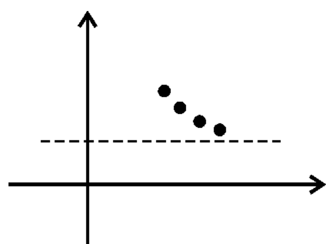
زیرا عدد بین ۰ و ۱ را هر چه به توان برسانیم، کوچکتر می‌شود و به صفر میل می‌کند بنابراین:

$\lim_{n\to+\infty}(\log 5)^n=0$

اتلاف وقت، گرانترین خرجهاست. (بالزاک)

تست ۵:

۱ـ اگر نمودار دنباله‌ی $\{\frac{n+b}{n+1}\}$ به صورت مقابل باشد، b کدام است؟



۱) $b > 2$ ۲) $b > 1$
۳) $b < 2$ ۴) $b < 1$

۲ـ کدام دنباله‌ی زیر، همگراست؟

۱) $\{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor (\cos n + \sin n)\}$ ۲) $\{\sin n - \cos n\}$
۳) $\{\lfloor \frac{-3}{n} \rfloor (\cos n + \sin n)\}$ ۴) $\{\lfloor \frac{3}{n} \rfloor (\cos n + \sin n)\}$

۳ـ حد دنباله‌ی $\left\{\sqrt{3+\sqrt{3^2+\sqrt{3^4+\dots}}}\right\}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ ۲) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ۳) 3 ۴) $3+\sqrt{3}$

۴ـ هرگاه $x_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^n}}$ جمله‌ی عمومی یک دنباله باشد، آنگاه $\lim_{n \to +\infty} x_n$ برابر است با:

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۵ـ دنباله‌ی $\{\cos n + 2n\}$، چگونه است؟

۱) صعودی است.   ۲) نزولی است.
۳) هم صعودی و هم نزولی است.   ۴) نه صعودی و نه نزولی است.

۶ـ چندمین جمله‌ی دنباله‌ی $\left\{\sqrt{n}+\frac{5\sqrt{10}}{n}\right\}$، کمترین مقدار را دارد؟

۱) دهم   ۲) بیست و پنجم   ۳) پانزدهم   ۴) پنجم

۷ـ دنباله‌ی $\{a_n\}$ که به صورت $a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} & (\text{زوج } n) \\ \frac{2n-1}{2n} & (\text{فرد } n) \end{cases}$ تعریف شده است، کدام عنوان زیر را دارد؟

۱) یکنوا و بی‌کران   ۲) یکنوا و کراندار   ۳) غیریکنوا و همگرا   ۴) غیریکنوا و بی‌کران

۸ـ دنباله‌ی $\{\sin\frac{\pi}{2n}\}$ کدام وضع زیر را دارد؟

۱) صعودی و همگرا   ۲) نزولی و همگرا   ۳) نزولی و واگرا   ۴) صعودی و واگرا

۹ـ دنباله‌ی $\left\{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$ چگونه است؟

۱) همگرا به ۲ است.   ۲) همگرا به $\frac{1}{2}$ است.   ۳) همگرا به ۰ است.   ۴) واگرا است.

۱۰ـ کدام دنباله‌ی زیر، واگراست؟

۱) $\{n\sin n\pi\}$ ۲) $\left\{\frac{2^{2n+1}}{4^{n-1}}\right\}$ ۳) $\left\{\cos\frac{n\pi}{2}\right\}$ ۴) $\left\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\right\}$

۱ـ (۲) چون نمودار رسم شده نزولی است، لذا دنباله نزولی است پس مشتق دنباله منفی است، بنابراین:

$ad - bc = ۱ - b < ۰ \Rightarrow b > ۱$

۲ـ (۴) $\lim_{n \to +\infty} \left\lfloor \frac{۳}{n} \right\rfloor (\cos n + \sin n) = ۰ \times \text{کراندار} = ۰$

۳ـ (۱) $a_n = \sqrt{۳ + \sqrt{۳^۲ + \sqrt{۳^۴ + \dots}}} = \sqrt{۳}(\sqrt{۱ + \sqrt{۱ + \sqrt{۱ + \dots}}})$

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{۱ + \sqrt{۱ + \sqrt{۱ + \dots}}} = l \Rightarrow l = ۱ + \sqrt{l} \Rightarrow l^۲ - l - ۱ = ۰ \quad \Rightarrow l = \frac{۱ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲}$ (قابل قبول) $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \sqrt{۳}(\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲})$

۴ـ (۳)

$\lim_{n \to +\infty} x_n = \frac{\frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۳}}} = \frac{۲}{\frac{۳}{۲}} = \frac{۴}{۳}$

از فرمول حد مجموع استفاده کرده‌ایم.

۵ـ (۱) واضح است که: $a_n \leq a_{n+۱}$ زیرا $۲n + \cos n \leq ۲n + ۲ + \cos(n + ۱)$

$\cos n - \cos(n + ۱) \leq ۲$ همواره برقرار است

۶ـ (۱) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{۵\sqrt{۱۰}}{x} \quad (x \geq ۱)$

$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} - \frac{۵\sqrt{۱۰}}{x^۲} = \frac{x\sqrt{x} - ۱۰\sqrt{۱۰}}{۲x^۲} = ۰ \Rightarrow x = ۱۰$

x	$-\infty$	۱۰	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	۰	$+$
$f(x)$	↘	Min	↗

۷ـ (۳)

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \begin{cases} ۱ & (\text{زوج } n) \\ ۱ & (\text{فرد } n) \end{cases}$ همگراست $\{a_n\} \Rightarrow a_۱ = \frac{۱}{۲}, a_۲ = \frac{۱}{۲}, a_۳ = \frac{۵}{۶}, a_۴ = \frac{۳}{۴}$

چون $a_۲ < a_۳ > a_۴$ لذا دنباله غیریکنواست.

۸ـ (۲) $\lim_{n \to +\infty} \sin\frac{\pi}{۲n} = ۰ \Rightarrow$ همگراست

چون $\frac{\pi}{۲n}$ نزولی است و $\frac{\pi}{۲} > \frac{\pi}{۲n} > ۰$ لذا در ربع اول است و هر چه $\frac{\pi}{۲n}$ کوچکتر شود sinاش نیز کوچکتر شده پس $\sin\frac{\pi}{۲n}$ نزولی است.

۹ـ (۳) $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n + ۲ - n}{\sqrt{n + ۲} + \sqrt{n}} \quad \sin\frac{n\pi}{۲} = ۰ \times \text{کراندار} = ۰$

۱۰ـ (۳) این دنباله یک دنباله‌ی نوسانی واگراست در واقع مقادیر برد دنباله عبارتند از:

... و ۱ و ۰ و ۱- و ۰ و ۱ و ۰ و ۱- و ۰

تست ۶:

۱ـ دنباله‌ی $\left\{\sqrt[n+1]{2^{2n+2}+3^{n+1}}\right\}$ **چگونه، است؟**

۱) همگرا به ۳ ۲) همگرا به ۸ ۳) همگرا به ۴ ۴) واگرا

۲ـ اگر عدد همگرائی دنباله‌ی $\left\{\dfrac{(n+1)^8-(n-1)^8}{an^b}\right\}$ **برابر با ۱ باشد، a+b کدام است؟**

۱) ۰ ۲) ۱۶ ۳) ۲۳ ۴) ۳۲

۳ـ در مقدار جملات دنباله‌ی $\{n^2+n\}$**، کدام عدد وجود ندارد؟**

۱) ۳۰ ۲) ۵۶ ۳) ۸۰ ۴) ۱۳۲

۴ـ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^{19}}\sum\limits_{i=1}^{n} i^{18}$ **برابر است با:**

۱) ۰ ۲) ۱۹ ۳) $\frac{1}{18}$ ۴) $\frac{1}{19}$

۵ـ در یک دنباله داریم: $a_{3n+1}=n^2$**، جملهٔ پنجم برابر است با:**

۱) ۲۵۶ ۲) ۲۵ ۳) $\frac{16}{9}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۶ـ دنباله‌ی $a_n=\dfrac{1^n+2^n+3^n+4^n+5^n}{6^n+7^n+8^n+9^n+10^n}$

۱) همگرا به ۰ است. ۲) همگرا به $\frac{1}{2}$ است. ۳) همگرا به $\frac{1}{6}$ است. ۴) واگراست.

۷ـ بزرگترین کران پائین مجموعه‌ی $\left\{\dfrac{6n+4}{7n+2} : n\in N\right\}$ **کدام است؟**

۱) ۲ ۲) $\frac{6}{7}$ ۳) $\frac{10}{9}$ ۴) وجود ندارد

۸ـ $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^{4-n}+3^{4-n}}{2^{1-n}+3^{1-n}}$ **برابر است با:**

۱) ۲۷ ۲) ۸ ۳) ۱ ۴) $+\infty$

۹ـ کدام گزینه در مورد دنباله‌ی $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2n} & ,(n<20)\\[2mm] \dfrac{2n+1}{n^2} & ,(n\geq 20)\end{cases}$ **صحیح است؟**

۱) صعودی و همگراست ۲) نزولی و همگراست ۳) واگرا است ۴) همگراست ولی یکنوانیست

۱۰ـ هرگاه $a_n=\begin{cases}\dfrac{n}{n+1} & (\text{زوج } n)\\[2mm] \dfrac{n+4}{n} & (\text{فرد } n)\end{cases}$**، کوچکترین مقدار n، که به ازاء آن نامساوی** $|a_n-1|<\frac{1}{100}$ **به ازاء هر مقدار بیشتر از آن برقرار باشد، کدام است؟**

۱) $n>99$ ۲) $n>100$ ۳) $n>400$ ۴) $n>401$

۱ـ (۳) $a_n = \sqrt[n+1]{۴^{n+1} + ۳^{n+1}} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = ۴$

۲ـ (۳) $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n^۸ + ۸n^۷ + ...) - (n^۸ - ۸n^۷ + ... + ۱)}{an^b} = ۱$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{۱۶n^۷}{an^b} = ۱ \Rightarrow \begin{cases} a = ۱۶ \\ b = ۷ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۲۳$

۳ـ (۳) $a_n = n(n+۱)$ حاصلضرب دو عدد صحیح متوالی

تنها عدد ۸۰ است که حاصلضرب دو عدد صحیح متوالی نیست.

۴ـ (۴) $\lim_{n \to +\infty} \frac{۱^{۱۸} + ۲^{۱۸} + ... + n^{۱۸}}{n^{۱۹}} \sim \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{۱}{۱۹} n^{۱۹}}{n^{۱۹}} = \frac{۱}{۱۹}$

۵ـ (۳) $a_{۳n+۱} = n^۲ \quad , ۳n + ۱ = t \Rightarrow n = \frac{t-۱}{۳} \Rightarrow a_t = (\frac{t-۱}{۳})^۲ \Rightarrow a_۵ = (\frac{۴}{۳})^۲ = \frac{۱۶}{۹}$

۶ـ (۱) $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{۵^n}{۱۰^n} = \lim_{n \to +\infty} (\frac{۱}{۲})^n = ۰$

۷ـ (۲) چون دنباله نزولی و همگراست، لذا اینفیمم دنباله، همان حد دنباله یعنی $\frac{۶}{۷}$ است.

۸ـ (۲) $\lim_{n \to +\infty} a_n \sim \lim_{n \to +\infty} \frac{۲^{۴-n}}{۲^{۱-n}} = ۸$

توجه داشته باشید که: $۳^{-n} < ۲^{-n} \quad (n \to +\infty)$

۹ـ (۴) چون $n \to +\infty$ است لذا: $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{۲n+۱}{n^۲} = ۰$

پس دنباله همگراست اما یکنوانیست زیرا: $a_{۱۸} > a_{۱۹} < a_{۲۰}$

۱۰ـ (۳)

$$\left. \begin{array}{l} \left| \frac{n}{n+۱} - ۱ \right| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۱}{n+۱} < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow n > ۹۹ \\ \left| \frac{n+۴}{n} - ۱ \right| < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۴}{n} < \frac{۱}{۱۰۰} \Rightarrow n > ۴۰۰ \end{array} \right\} \Rightarrow$$ اشتراک $n > ۴۰۰$

خوشا به حال زحمت کشان برای عدالت، زیرا ملکوت آسمانها از ایشان است.

«حضرت مسیح»

از طمع بپرهیز که فقر نقد است. (حضرت محمد (ص))

تست ۷:

۱ـ اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ با شرط ۱ = $a_1 = a_2$ و $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ تعریف شده و $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = k$ است $(k \neq 0)$ در این صورت k برابر است با:

۱) ۲ ۲) $\sqrt{2} + 1$ ۳) $\sqrt{2} - 1$ ۴) $\frac{1}{2}$

۲ـ کدام حکم زیر، درست است؟

۱) هر دنباله‌ی نزولی و کراندار از پائین همگراست.
۲) هر دنباله‌ی غیریکنوا، دنباله‌ای واگراست.
۳) هر دنباله‌ی صعودی و کراندار از پائین همگراست.
۴) هر دنباله‌ی نزولی و کراندار از بالا، واگراست.

۳ـ کدام دنباله‌ی زیر همگراست؟

۱) $\left\{\frac{(-1)^{n+1} n}{n^3 + 1}\right\}$ ۲) $\left\{(-1)^n \frac{5n^3}{2n^3 + 1}\right\}$ ۳) $\left\{(-1)^n \frac{2n^2}{3n + 1}\right\}$ ۴) هر سه مورد

۴ـ هرگاه برای دنباله‌ی $\{a_n\}$ رابطه‌ی $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5}$ برقرار باشد، جمله‌ی عمومی دنباله با شرط ۲ = a_1 کدام است؟

۱) $a_n = \frac{n+5}{3}$ ۲) $a_n = 4n-2$ ۳) $a_n = 3n-1$ ۴) $a_n = \frac{n+9}{5}$

۵ـ دنباله‌ی $\{\frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2}{n+7}\}$ چگونه است؟

۱) به ۸ همگراست. ۲) به صفر همگراست ۳) واگراست ۴) به ۶ همگراست.

۶ـ حد دنباله‌ی $\left\{\frac{n! + (n+1)!}{(n+2)!}\right\}$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۰

۷ـ دنباله‌ی $\{n \cos n\pi\}$

۱) کراندار است. ۲) بی‌کران است. ۳) همگراست ۴) یکنواست.

۸ـ هر دنباله‌ی واگرا

۱) اگر یکنوا باشد، کراندار است.
۲) اگر کراندار نباشد یکنواست.
۳) اگر یکنوا باشد کراندار نیست.
۴) اگر یکنوا نباشد، کراندار هم نیست.

۹ـ از کدام جمله به بعد، فاصله‌ی جملات دنباله‌ی $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$ از حدش کمتر از ۰/۰۰۲ می‌باشد؟

۱) ۴۵۰ ۲) ۵۰۱ ۳) ۵۰۰ ۴) ۴۵۱

۱۰ـ دنباله‌ی $\{\text{Arctan}(1 + \frac{1}{2n})\}$ دنباله‌ایست:

۱) صعودی و کراندار ۲) نزولی و کراندار ۳) همگرا ولی غیریکنوا ۴) واگراست ولی غیریکنوا

۱ـ (۲) $\frac{a_{n+۲}}{a_{n+۱}} = ۲ + \frac{a_n}{a_{n+۱}} \quad \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+۲}}{a_{n+۱}} = \lim_{n \to +\infty}(۲ + \frac{a_n}{a_{n+۱}})$

$\Rightarrow \frac{۱}{k} = ۲ + k \quad \Rightarrow k^۲ + ۲k - ۱ = ۰ \quad \Rightarrow k = ۱ \pm \sqrt{۲}$

چون جملات دنباله همگی مثبت‌اند پس حدشان نیز مثبت یا صفر است و بنابراین جواب $(\sqrt{۲} + ۱)$ قابل قبول است.

۲ـ (۱)

۳ـ (۱) چون درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج کمتر است. $\lim_{n \to +\infty} \frac{(-۱)^{n+۱} n}{n^۳ + ۱} = ۰$

توضیح اینکه دنباله‌ی دوم به دو عدد $\pm\frac{۵}{۲}$ و دنباله‌ی سوم به $\pm\infty$ میل می‌کنند و لذا واگرایند.

۴ـ (۴) $a_{n+۱} = a_n + \frac{۱}{۵} \Rightarrow a_۲ = ۲ + \frac{۱}{۵} = \frac{۱۱}{۵}$

تنها گزینه‌ای که جمله‌ی دومش $\frac{۱۱}{۵}$ می‌شود گزینه‌ی (۴) است.

۵ـ (۱) $\lim_{n \to +\infty} a_n = \infty - \infty \quad \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^۲(n+۷) - n^۲(n-۱)}{(n-۱)(n+۷)} \sim \lim_{n \to +\infty} \frac{۸n^۲}{n^۲} = ۸$

۶ـ (۴) $\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+۱)!}{(n+۲)!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{۱}{n+۲} = ۰$

۷ـ (۲) $a_n = n(-۱)^n = \begin{cases} n & (\text{زوج } n) \\ -n & (\text{فرد } n) \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \pm\infty$

۸ـ (۳) گزینه‌ی (۱) نادرست است. مثال نقض: $a_n = ۲^n$، گزینه‌ی (۲) نیز نادرست است. مثال نقض: $a_n = (-۲)^n$

گزینه‌ی (۴) نیز نادرست است. مثال نقض: $a_n = (-۱)^n$

گزینه‌ی (۳) درست است. زیرا اگر دنباله‌ای یکنوا، کراندار باشد، آنگاه همگرا می‌شود.

۹ـ (۳) $\left| \frac{(-۱)^n}{n} - ۰ \right| < \frac{۲}{۱۰۰۰} \quad \Rightarrow \frac{۱}{n} < \frac{۱}{۵۰۰} \quad \Rightarrow n > ۵۰۰$

۱۰ـ (۲) اولاً: $-\frac{\pi}{۲} < \operatorname{Arctan}(۱ + \frac{۱}{۲n}) < \frac{\pi}{۲}$ و لذا کراندار است ثانیاً

$f(x) = \operatorname{Arctan}(۱ + \frac{۱}{۲x}), f'(x) = \frac{\frac{-۱}{۲x^۲}}{۱ + (۱ + \frac{۱}{۲x})^۲} < ۰ \quad \Rightarrow$ لذا نزولی است.

روش دوم برای نزولی بودن:

یادآوری: هرگاه f صعودی باشد، x زیاد شود y هم زیاد می‌شود، x کم شود y هم کم می‌شود چون $f(x) = \operatorname{Arctan}x$ صعودی است و $a_n = ۱ + \frac{۱}{۲n}$ نزولی است پس $f(a_n)$ یعنی $\operatorname{Arctan}(۱ + \frac{۱}{۲n})$ نیز نزولی است.

فصل سیزدهم

سری

زیگما (سیگما):

ویژگیهای زیگما

۱) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$

۲) $\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

۳) $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$

۴) $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \neq \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i$

۵) $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \neq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$

۶) $\sum_{i=1}^{n} c = nc$

۷) $\sum_{i=m}^{n} c = (n - m + 1)c$

۸) $\sum_{i=1}^{n} 1 = n \quad , \sum_{i=0}^{n-1} 1 = n$

۹) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{n} a_i \quad , (1 < p < n)$

۱۰) $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i$

۱۱) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n$

۱۲) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k} = \sum_{i=m-k}^{n-k} a_{i+k}$

این قاعده را قاعده‌ی لغزاندان می‌گویند.

تست: با فرض $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ **، حاصل** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!}$ **برابر است با:**

۱) e ۲) $e - 1$ ۳) $e - 2$ ۴) $e + 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \Rightarrow \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = e$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = e - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}\right) = e - 2$$

۱۳) قاعدهٔ تلسکوپی (ادغام):

$$\sum_{k=m}^{n} \left(f(k+1) - f(k)\right) = f(n+1) - f(n)$$

یا

$$\sum_{i=m}^{n} (a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_m$$

تذکر مهم: در قاعده‌ی تلسکوپی، اختلاف دو جمله از لحاظ اندیس، همیشه بایستی ۱ واحد باشد (یعنی هر جمله باید با قرار دادن $n-1$ یا $n+1$ به جای n، در جمله‌ی دیگر، به دست آید به این نکته بایستی حتماً توجه کنید) نه اینکه دو جمله یا مخرج دو جمله، یک واحد اختلاف داشته باشند، ضمناً مهم نیست که جمله‌ی با اندیس بزرگتر، اول باشد یا دوم امّا بین دو جمله، باید علامت منها وجود داشته باشد.

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \neq \frac{1}{1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+2)^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{1}{(1+1)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{1(1+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2+1}\right) \neq \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2+1}$$

تست: حاصل $\frac{1}{19\times 20} + \ldots + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{1\times 2}$ **برابر است با:**

۱) $\frac{20}{21}$ ۲) $\frac{19}{20}$ ۳) $\frac{21}{20}$ ۴) ۱

$$\sum_{k=1}^{19} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{19} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

تست: حاصل $\frac{1}{\sqrt{100} + \sqrt{99}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$ **برابر است با:**

۱) ۱۰ ۲) $\frac{1}{10}$ ۳) ۹ ۴) $\frac{1}{9}$

$$\sum_{n=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{99} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{99+1} - \sqrt{1} = 9$$

۱۴) $s_1 = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$s_2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$s_3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$\vdots$

فرمول کلی $s_p = \sum_{i=1}^{n} i^p = 1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p = \binom{p+1}{1} s_1 + \binom{p+1}{2} s_2 + \dots + \binom{p+1}{p-1} s_{p-1}$

مثال: S_4 را محاسبه کنید؟

$s_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \binom{4+1}{1} s_1 + \binom{4+1}{2} s_2 + \binom{4+1}{3} s_3$

$= 5 \times \frac{n(n+1)}{2} + 10 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 10 \times \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

پس از خلاصه کردن $= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{6}$

تست: حاصل $(21 \times 20) + \dots + (4 \times 3) + (3 \times 2) + (2 \times 1)$ کدام است؟

۱) ۳۱۸۰ ۲) ۳۰۸۰ ۳) ۳۳۸۰ ۴) ۲۸۸۰

$\sum_{i=1}^{20} i(i+1) = \sum_{i=1}^{20} i^2 + \sum_{i=1}^{20} i = \frac{20 \times 21 \times 41}{6} + \frac{20 \times 21}{2} = 3080$

تعریف سری: یک سری نامتناهی و یا به اختصار یک سری، مجموعی نامتناهی به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ است، که از جمع کردن جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ ساخته شده است، برای درک بهتر مطلب به تعریف دقیق سری، که در ذیل می‌آید، توجه کنید.

دنباله‌ی $\{a_n\}$ را در نظر بگیرید، از روی این دنباله، دنباله‌ی جدید $\{s_n\}$ را به صورت زیر می‌سازیم.

$$\begin{array}{ccccc} a_1, & a_1 + a_2, & a_1 + a_2 + a_3, & \dots, & a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ s_1 & s_2 & s_3 & & s_n, \dots \end{array}$$

دنباله‌ی $\{s_n\}$ را که به صورت فوق ساختیم یک سری نامتناهی می‌گویند، a_n را جمله‌ی عمومی سری (یا جمله‌ی nام سری) و s_n را (که مجموع n جمله‌ی اول سری است) مجموع جزئی nام سری می‌گویند.

گاهی سری $\{s_n\}$ را با $\lim_{n \to +\infty} s_n$ و یا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و یا $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ نیز نمایش می‌دهند.

سری همگرا و سری واگرا: در سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، هرگاه دنباله‌ی $\{s_n\}$ به عددی حقیقی مانند s، همگرا باشد، سری را همگرا می‌گویند و می‌نویسند: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$، در این حالت s را مقدار سری می‌گویند، در غیر این صورت، یعنی اگر دنباله‌ی $\{s_n\}$ واگرا باشد سری را واگرا گویند.

تعریف ساده‌ی سری همگرا و سری واگرا: هرگاه مجموع جملات یک سری برابر یک عدد حقیقی منحصر به فرد شود

سری را همگرا می‌گویند و هرگاه مجموع جملات سری برابر $+\infty$ یا $-\infty$ و یا دو عدد، سه عدد و... شود سری را واگرا می‌گویند.

مثال: کدامیک از سریهای زیر، همگرا و کدامیک واگرایند؟

$$1)\ 1+2+4+8+\ \dots$$

این سری واگرا است، زیرا مجموع جملاتش برابر $+\infty$ می‌شود.

$$2)\ -5-5-5-5\ \dots$$

این سری نیز واگرا است، زیرا مجموع جملاتش برابر $-\infty$ می‌شود.

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n = -1+1-1+1\dots$$

این سری نیز واگراست زیرا:

$$(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\dots = 0+0+0+\dots = 0$$

اما از طرف دیگر:

$$-1+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = -1+0+0+0+\dots = -1$$

لذا بسته به اینکه تعداد جملات سری فوق زوج یا فرد باشد حاصل سری برابر ۰ یا ۱- خواهد شد بنابراین این سری نیز واگراست، از طرفی:

$$s_n = \begin{cases} 0 & (n \text{ زوج}) \\ -1 & (n \text{ فرد}) \end{cases}$$

واضح است که $\{s_n\}$ واگرا بوده و بنابراین سری نیز واگراست.

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \sqrt{n+1}-\sqrt{1}$$

بنابراین این سری واگراست. $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$

$$5)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}$$

این سری همگراست. $\lim_{n\to+\infty} s_n = 1-0 = 1$

توجه کنید که در سری فوق دنباله s_n به صورت زیر است: $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$ و ...

$\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۳}{۴}$ و ... که می‌بینیم به عدد ۱ همگراست.

۶) $۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+...$

$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{۲^n}$

$s_n = ۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+...+\frac{۱}{۲^{n-۱}} = \frac{۱(۱-(\frac{۱}{۲})^n)}{۱-\frac{۱}{۲}}$

این سری همگراست و مقدارش برابر ۲ است. $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=\frac{۱-۰}{\frac{۱}{۲}}=۲$

یعنی جمع همه‌ی جملات سری، تقریباً برابر ۲ است. $۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}...=۲$

به مقدار چند جمله‌ی اول سری و مجموعشان که محاسبه شده است توجه کنید: $۱+۰/۵+۰/۲۵+۰/۱۲۵+...=۲$

$۱/۸۷۵+...=۲$

قضیه (شرط لازم همگرائی یک سری): هرگاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$ همگرا باشد و یا بخواهد همگرا باشد، حتماً حتمنی، حد جمله‌ی عمومیش صفر است، به عبارت دیگر، شرط لازم برای همگرائی سری $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$، آنستکه $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=۰$ شود (یعنی یک سری هنگامی همگرا می‌شود که جمله‌ی عمومیش از حیث قدر مطلق کوچک شود و به صفر میل کند)

تست: کدام سری زیر، شرط لازم همگرائی را ندارد؟

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$ ۲) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n(n+۱)}$ ۳) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۳^{n-۱}}$ ۴) $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲n+۱}{n}$

پاسخ صحیح، گزینه‌ی (۴) می‌باشد. زیرا در این سری: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=۲\neq۰$ (شرط لازم همگرائی را ندارد)

تذکر مهم: توجه داشته باشید که شرط $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=۰$، شرط لازم همگرائی است ولی، کافی نیست یعنی در سری $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$، هرگاه $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$، صفر شود، لزومی ندارد که حتماً سری همگرا باشد، در این حالت سری ممکن است همگرا باشد ممکن است واگرا.

مثال: در سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$، $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=۰$ است ولی با این وجود این سری واگراست و مقدارش $+\infty$ است.

این سری را، سری هارمونیک یا توافقی یا همساز یا موزون می‌گویند.

توجه کنید که در سری $\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n}$، جمله‌ی عمومی همگرا به صفر است نه اینکه سری همگرا به صفر است، در واقع بدیهی است که: $۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+...\neq۰$

علت واگرائی این سری را در قسمتهای بعدی خواهید دید.

نکته‌ی بسیار مهم: (عکس نقیض قضیه‌ی فوق): در سری $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$، هرگاه حد جمله‌ی عمومی سری، مخالف صفر شود، یعنی: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq۰$، سری فوق حتماً حتمنی واگراست.

بنابراین مخالف صفر شدن حد جمله‌ی عمومی هر سری، شرطی کافی برای واگرائی آن است.

ضمناً این شرط، لازم نیست، یعنی یک سری می‌تواند واگرا باشد با وجود اینکه حد جمله‌ی عمومیش صفر باشد.

تست: چند تا از سریهای زیر واگرایند؟

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+5}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{5}{3})^{n-1}$ ج) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ هـ) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

و) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{1-n^2}$ ز) $\sum_{n=1}^{\infty} Ln\frac{2n+1}{n}$

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۵

پاسخ صحیح، گزینه‌ی (۳) می‌باشد زیرا:

الف) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+5} = 2 \neq 0$ واگرا

ب) $\lim_{n\to+\infty} (\frac{5}{3})^{n-1} = +\infty \neq 0$ واگرا

ج) $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \neq 0$ واگرا

هـ) $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n =$ نامنحصر به فرد = موجود نیست $\neq 0$ واگرا

و) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{1-n^2} = -\infty \neq 0$ واگرا

ز) $\lim_{n\to+\infty} Ln\frac{2n+1}{n} = Ln 2 \neq 0$ واگرا

تذکر مهم: در هر سری، منظور از جمله‌ی عمومی، یعنی عبارتی که جلوی زیگما قرار دارد.

مثال: جمله‌ی عمومی سری‌های زیر را مشخص کنید؟

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ جمله‌ی عمومی $= a_n$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n}$ جمله‌ی عمومی $= \frac{2n+1}{n}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ جمله‌ی عمومی $= \frac{1}{a_n}$

د) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n-2}{a_n^2+1}$ جمله‌ی عمومی $= \frac{a_n-2}{a_n^2+1}$

تست: هرگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n-2}{a_n^2+1}$ همگرا به ۳ باشد، حاصل $\lim_{n\to+\infty} a_n$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ صحیح گزینه‌ی (۴) است. چون سری فوق همگراست لذا: $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n-2}{a_n^2+1} = 0$

و از آنجا $\lim_{n\to+\infty} (a_n-2) = 0$ و بنابراین $\lim_{n\to+\infty} a_n = 2$

تست: هرگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، همگرا به s باشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ چگونه است؟

۱) همگرا به ۰ ۲) واگرا ۳) همگرا به s ۴) همگرا به $\frac{1}{s}$

پاسخ صحیح گزینه‌ی (۲) است. چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست لذا $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ و بنابراین

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \neq$ موجود نیست و بنابراین سری واگراست.

سری هندسی (سری تصاعد هندسی): هر سری به شکل زیر را یک سری هندسی می‌گویند.

$$a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

در این سری، هر جمله از ضرب جمله‌ی قبلی در یک عدد ثابت به نام قدر نسبت (r) به دست می‌آید. a را جمله‌ی اول سری و r را قدر نسبت سری می‌گویند.

مثال:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \qquad ,(a = 1, r = \frac{1}{2})$$

$$10 - 10 + 10 - 10 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 10 \qquad ,(a = 10, r = -1)$$

$$16 - 4 + 1 - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 16(-\frac{1}{4})^{n-1} \qquad ,(a = 16, r = -\frac{1}{4})$$

$$\frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1000} \qquad ,(a = \frac{1}{1000}, r = 1)$$

قضیه (شرط همگرائی سریهای هندسی): در سری هندسی $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$

الف) اگر قدر نسبت عددی حقیقی بین ۱ و ۱- باشد یعنی $-1 < r < 1$ ($|r| < 1$) سری همگرا بوده و مقدار سری (جواب سری) در این حالت برابر حد مجموع سری یعنی $s = \frac{a}{1-r}$ ($s = \frac{\text{جمله‌ی اول}}{1 - \text{قدرنسبت}}$) می‌باشد.

ب) اگر قدر نسبت، بزرگتر یا مساوی (۱) یا کوچکتر یا مساوی (۱-) باشد یعنی $r \geq 1$ یا $r \leq -1$ ($|r| \geq 1$) سری واگرا می‌باشد.

مثال: کدامیک از سریهای زیر همگرایند، مقدار آنها را بیابید؟

الف) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ ، همگراست $(-1 < r = \frac{1}{2} < 1)$

ب) $10 - 10 + 10 - 10 + \dots = 0$ یا 10 نامنحصر به فرد ($r = -1$) واگراست

ج) $100 - 50 + 25 - 12/5 + \dots = \frac{a}{1-r} = \frac{100}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{200}{3}$ ، همگراست $(-1 < r = \frac{-1}{2} < 1)$

د) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots = +\infty$ ، واگراست ($r = 1$)

تست: کدام سری زیر همگراست؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^{1-n}$ ۲) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\pi}{4})^n$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^2+1}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n}$

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۲ می‌باشد زیرا سری گزینه‌ی (۲) یک سری هندسی است که در آن $-1 < r = \frac{\pi}{4} < 1$ ضمناً سریهای (۳) و (۴) شرط لازم همگرائی را ندارند و در سری (۱)، $r = (\frac{2}{3})^{-1} = \frac{3}{2}$ می‌باشد.

تذکر مهم: همگرائی یا واگرائی سریهای هندسی بستگی به قدرنسبتشان یعنی r دارد. بنابراین تشخیص صحیح r در این سریها، بسیار مهم است در مثالهای متنوع زیر، قدر نسبت را به دست آورده‌ایم، توجه کنید که قدر نسبت هر عددی است که

به توان n رسیده باشد.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \quad , r=\frac{1}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^{n-1}} \quad , r=\frac{1}{5}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n+1}} \quad , r=\frac{2}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2^{2n-1}} \quad , r=\frac{-3}{2^2}=\frac{-3}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} \times 3^{1-n} \quad , r=2\times 3^{-1}=\frac{2}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{n+b}}{q^{n-d}} \quad , r=\frac{p}{q}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{an+b}}{q^{cn-d}} \quad , r=\frac{p^a}{q^c}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^{1-n} \quad , r=\left(\frac{p}{q}\right)^{-1}=\frac{q}{p}$

تست: هرگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n$ همگرا باشد، حدود xکدام است؟

۱) $-1 < x < 1$ ۲) $1 < x < 2$ ۳) $0 < x < 1$ ۴) $0 < x < 2$

$r=x-1 \Rightarrow |r|<1 \Rightarrow |x-1|<1 \Rightarrow -1<x-1<1 \Rightarrow 0<x<2$

تذکر مهم: در هر سری، جمله‌ی اول، با قرار دادن حد پائین سری به جای اندیس، در جمله‌ی عمومی به دست می‌آید و لذا مقدار جمله‌ی اول همیشه به ازاء ۱ = n به دست نمی‌آید.

مثال: جمله‌ی اول سریهای زیر را بیابید؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \quad a=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

۲) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \quad , a=\frac{2^{0+1}}{3^{0+2}}=\frac{2}{9}$

۳) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \quad , a=\frac{1}{2(2-1)}=\frac{1}{2}$

قضیه‌ی بسیار مهم:

الف) مجموع دو سری همگرا، همگراست و مقدارش برابر مجموع مقادیر دو سری خواهد بود.

ب) تفاضل دو سری همگرا، همگراست و مقدارش برابر تفاضل مقادیر دو سری خواهد بود.

ج) چند برابر یک سری همگرا، همگراست.

د) چند برابر یک سری واگرا، واگراست.

ه) مجموع و تفاضل یک سری همگرا با یک سری واگرا، واگراست.

و) هرگاه اختلاف دو سری، در یک تعداد متناهی جمله باشد، دو سری هم رفتارند، یعنی اگر هر یک از آنها همگرا باشد، دیگری نیز همگراست و اگر واگرا باشد، دیگری نیز واگراست.

مثال: کدامیک از سریهای زیر همگرایند، مقدار سریهای همگرا را بیابید؟

۱) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ = همگرا + همگرا = همگرا

$= \frac{1}{1-\frac{2}{5}} + \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{3} + \frac{5}{2} = \frac{25}{6}$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{2n+1}} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}}$ = ۳ × همگرا = همگرا

$= 3 \times \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}} = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2^n}{n(2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(2^n)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

= همگرا + واگرا = واگرا

۴) $1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{1}{8} + \frac{2}{27} + \dots$

$(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots) + (\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots)$

= همگرا + همگرا = همگرا = $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 3$

۵) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} + 5^{n-1}}{4^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{n+2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{4^{n+2}}$

= همگرا + واگرا = واگرا

۶) $\sum_{n=2}^{\infty} (7^{-n} - 8^{-n}) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{7^n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{8^n}$

= همگرا − همگرا = همگرا

$= \frac{\frac{1}{49}}{1-\frac{1}{7}} - \frac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{168}$

۷) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$

اختلاف این سری با سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ در پنج جمله‌ی اول می‌باشد، چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست، لذا سری فوق نیز واگراست.

تجزیه‌ی کسرها: تساوی $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ را در نظر بگیرید، برای رسیدن از سمت چپ به سمت راست، کافی است مخرج مشترک گرفت، توجه کنید:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

حال سؤال این است که با داشتن کسر $\frac{1}{n(n+1)}$، چگونه می‌توان به $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ رسید، عمل رسیدن از کسر $\frac{1}{n(n+1)}$ به $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ را تجزیه‌ی کسر می‌گویند.

از تجزیه‌ی کسرها، در محاسبه‌ی مقدار سریها (سریهای تلسکوپی) استفاده می‌کنند.

ما شما را در اینجا با ۳ روش تجزیه‌ی کسرهای ساده آشنا می‌کنیم و ادامه‌ی این مطلب را در فصل انتگرالها پی می‌گیریم.

روش اول:

مثال:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} = \frac{an+a+bn}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(a+b)n+a}{n(n+1)} \Rightarrow (a+b)n + a = 1$$

$$(a+b)n + a = 0n + 1 \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

و بنابراین:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{-1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

مثال:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$$

به طریق مشابه به دست می‌آید.

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

روش دوم: در این روش از رابطه‌ی $\frac{1}{x} \pm \frac{1}{y} = \frac{y}{xy} \pm \frac{x}{xy} = \frac{x \pm y}{xy}$ استفاده می‌کنیم.

مثال:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

مثال:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \times \frac{(n+2)-n}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+2}{n(n+2)} - \frac{n}{n(n+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

مثال:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n(n+2)}\right)=\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

روش سوم: در این روش فرض می‌کنیم:

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}$$

برای پیدا کردن a، ریشه‌ی $k=0$ را در $\frac{1}{k+1}$ می‌گذاریم، به این ترتیب a به دست می‌آید.

$$a=\frac{1}{0+1}=\frac{1}{1}=1$$

و برای پیدا کردن b، ریشه‌ی $k+1=0$ یعنی $k=-1$ را در $\frac{1}{k}$ می‌گذاریم، داریم:

$$b=\frac{1}{-1}=-1$$

مثال:

$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+2}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{0+2}=\frac{1}{2}\\ b=\frac{1}{-2}\end{cases}$$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2}$$

$$\begin{cases}a=\frac{1}{(0+1)(0+2)}=\frac{1}{2}\\ b=\frac{1}{-1(-1+2)}=-1\\ c=\frac{1}{-2(-2+1)}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

مثال:

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{a}{2k-1}+\frac{b}{2k+1}$$

$$\begin{cases}a=\frac{1}{2(\frac{1}{2})+1}=\frac{1}{2}\\ b=\frac{1}{2(-\frac{1}{2})-1}=\frac{-1}{2}\end{cases}$$

مثال:

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+5)}=\frac{a}{2k+1}+\frac{b}{2k+5}$$

$$\begin{cases}a=\frac{1}{2(-\frac{1}{2})+5}=\frac{1}{4}\\ b=\frac{1}{2(-\frac{5}{2})+1}=\frac{-1}{4}\end{cases}$$

سریهای تلسکوپی: هر سری به صورت $\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}-a_k)$ را یک سری تلسکوپی می‌گویند. برای تشخیص همگرائی یا واگرائی این گونه سری‌ها و یافتن مقدار آنها از قاعده‌ی تلسکوپی استفاده می‌کنیم به مثالهای زیر توجه کنید.

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{1}-\frac{1}{\infty+1}=1-0=1$

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3k+5)(3k+8)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\frac{1}{3}}{3k+5}+\frac{-\frac{1}{3}}{3k+8})=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3k+5}-\frac{1}{3k+8})$

$=\frac{1}{3}(\frac{1}{3(1)+5}-\frac{1}{3(\infty)+8})=\frac{1}{3}(\frac{1}{8}-0)=\frac{1}{24}$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{\infty+1}-\sqrt{1}=\infty$ واگرا

۴) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2})$

چون دو جمله، از لحاظ اندیس، ۲ واحد اختلاف دارند، لذا جمله‌ی $\frac{1}{k+1}$ را اضافه و کم می‌کنیم.

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2})$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-0)+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-0)=\frac{3}{4}$

۵) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)})=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-0)=\frac{1}{4}$

۶) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1})$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k})+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{1}-0)+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-0)=\frac{3}{4}$

۷) $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=5}^{\infty}\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\sum_{n=5}^{\infty}(\frac{n+1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+1)!})$

$\sum_{5}^{\infty}(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!})=\frac{1}{5!}-0=\frac{1}{120}$

۸) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - 0 = 1$$

۹) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-(k+1)}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2^k} - \frac{k+1}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

۱۰) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{k^2+k}}{\cos\frac{1}{k}\cdot\cos\frac{1}{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)}{\cos\frac{1}{k}\ \cos\frac{1}{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{k}\cos\frac{1}{k+1} - \cos\frac{1}{k}\sin\frac{1}{k+1}}{\cos\frac{1}{k}\cos\frac{1}{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tan\frac{1}{k} - \tan\frac{1}{k+1}\right) = \tan 1 - \tan 0 = \tan 1$$

نکته: برای محاسبه‌ی مقدار سری‌های به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)}$ می‌توان از فرمول زیر استفاده کرد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+a)(n+b)} = \frac{1}{|b-a|}\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \dots + \frac{1}{b}\right)$$

بالاخص:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+b)} = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{b}\right)$$

مثال:

۱) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+6)} = \frac{1}{|6-3|}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = \frac{37}{180}$$

۲) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

نکته: برای محاسبه‌ی مقدار سری‌های به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)}$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\dots(n+m)} = \frac{1}{m\,m!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2(2!)} = \frac{1}{4}$$

نکته: سری $\sum_{n=1}^{\infty} nr^n = r + 2r^2 + 3r^3 + \dots$ با شرط $|r| < 1$ همگراست و مقدار این سری برابر $\frac{r}{(1-r)^2}$ می‌باشد.

در واقع می‌دانیم که:
$$۱+r+r^{۲}+r^{۳}+r^{۴}+...=\frac{۱}{۱-r}$$

مشتق می‌گیریم $\Rightarrow ۱+۲r+۳r^{۲}+۴r^{۳}+...=\frac{۱}{(r-۱)^{۲}}$

طرفین را در r ضرب می‌کنیم $\Rightarrow r+۲r^{۲}+۳r^{۳}+...=\frac{r}{(r-۱)^{۲}}$

تست: حاصل سری ... $+۴(\frac{۱}{۳})^{۴}+۳(\frac{۱}{۳})^{۳}+۲(\frac{۱}{۳})^{۲}+۱$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۴}$

$$S=\frac{r}{(۱-r)^{۲}}=\frac{\frac{۱}{۳}}{(۱-\frac{۱}{۳})^{۲}}=\frac{۳}{۴}$$

چند سری خاص:

$$۱)\ \sin x=x-\frac{x^{۳}}{۳!}+\frac{x^{۵}}{۵!}-\frac{x^{۷}}{۷!}+...\quad ,(x\in R)$$

$$۲)\ \cos x=۱-\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۴}}{۴!}-\frac{x^{۶}}{۶!}+...\quad ,(x\in R)$$

$$۳)\ \tan x=x+\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{۲}{۱۵}x^{۵}+\frac{۱۷}{۳۱۵}x^{۷}+...\quad ,(|x|<\frac{\pi}{۲})$$

$$۴)\ \cot x=\frac{۱}{x}-\frac{x}{۳}-\frac{x^{۳}}{۴۵}-\frac{۲x^{۵}}{۹۴۵}-....\quad ,(۰<|x|<\pi)$$

$$۵)\ \text{Arcsin}x=x+\frac{۱}{۲}.\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{۱\times۳}{۲\times۴}.\frac{x^{۵}}{۵}+\frac{۱\times۳\times۵}{۲\times۴\times۶}.\frac{x^{۷}}{۷}+....\quad ,(|x|<۱)$$

$$۶)\ \text{Arccos}x=\frac{\pi}{۲}-\text{Arcsin}x=\frac{\pi}{۲}-(...)\quad ,(|x|<۱)$$

$$۷)\ \text{Arctan}x=\begin{cases}x-\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{x^{۵}}{۵}-\frac{x^{۷}}{۷}+... & ,(|x|<۱)\\ \pm\frac{\pi}{۲}-\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۳x^{۳}}-\frac{۱}{۵x^{۵}}+.... & (\text{+اگر } x\geq ۱ \text{ و – اگر } x\leq -۱)\end{cases}$$

$$۸)\ \text{Arccot}\,x=\frac{\pi}{۲}-\text{Arctan}x=\begin{cases}\frac{\pi}{۲}-(x-\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{x^{۵}}{۵}-...) & ,(|x|<۱)\\ p\pi+\frac{۱}{x}-\frac{۱}{۳x^{۳}}+\frac{۱}{۵x^{۵}}-.... & (p=۰ \text{ اگر } x>۱ \text{ و } p=۱ \text{ اگر } x<-۱)\end{cases}$$

$$۹)\ e^{x}=۱+x+\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۳}}{۳!}+...=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}\quad (x\in R)$$

نکته: در این سری، هرگاه به جای x، عدد ۱ را قرار دهیم، مقدار تقریبی عدد نپر $(e\simeq ۲/۷۱۸)$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$x=۱\ \Rightarrow e=۱+۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۶}+...=۱+۱+۰/۵+۰/۱\overline{۶}+...\simeq ۲/۷۱۸$$

نکته: به کمک سریهای فوق می‌توان در رفع ابهام برخی از حدود، استفاده کرده و مقدار آنها را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{3!}x^3}{x^3} = \frac{1}{6}$$

ب) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Arcsin}x - \text{Arctan}x}{x^3} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \dots\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots\right)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{3}}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = \frac{1}{2}$$

ج) $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x - \frac{1}{6}x^3}{x^5} = \frac{0}{0}$

در اینجا استفاده از هم ارزی $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$ مجاز نیست، زیرا صورت صفر می‌شود.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) - \frac{1}{6}x^3}{x^5} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{5!}x^5}{x^5} = \frac{-1}{120}$$

جمع بندی: طریقه‌ی تشخیص همگرائی یا واگرائی یک سری در حالت کلی: برای تشخیص همگرائی یا واگرائی یک سری مانند $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به صورت زیر عمل می‌کنیم. شما هم سعی کنید از همین روش استفاده کنید تا هیچگاه دچار اشتباه نشوید.

۱ـ ابتدا حد جمله‌ی عمومی سری را حساب کنید.

الف) اگر مخالف صفر شد، سری واگراست.

ب) اما اگر صفر شد، عجله نکنید، و به سری خوب نگاه کنید.

I) اگر سری هندسی بود و $|r| < 1$، سری همگراست و $|r| \geq 1$، سری واگراست.

II) اگر سری تلسکوپی بود، از قاعده‌ی تلسکوپی استفاده کرده و به کمک آن تشخیص دهید سری همگراست یا واگراست.

III) اگر سری به صورت مجموع یا تفاضل دو سری بود، سری را تفکیک کرده و طبق آنچه قبلاً بیان کردیم، عمل کنید.

IV) اگر سری داده شده نه هندسی بود نه تلسکوپی و نه تفکیکی، از آزمونهای تشخیص همگرائی و واگرائی سری‌ها (آزمون ریمان، آزمون مقایسه، آزمون نسبت (دالامبر)، آزمون ریشه‌ی nام کوشی، آزمون انتگرال، آزمون همگرائی سریهای با جملات مثبت، آزمون مقایسه‌ی حدی، آزمون لایب‌نیتس (آزمون همگرائی سریهای متناوب)، آزمون چند جمله‌ای و ...) استفاده کنید. ما در اینجا فقط به ذکر آزمون ریمان می‌پردازیم. (برای مطالعه‌ی بیشتر در این مورد می‌توانید به کتب دانشگاهی

و یا کتاب مبحثی دنباله و سری (کانون فرهنگی آموزش) تألیف مؤلف مراجعه نمائید)

سری ریمان یا سری P یا P سری: هر سری به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ...$ $(p \in R)$ را سری ریمان یا p سری می‌گویند.

آزمون ریمان (آزمون ریمن): در سری ریمان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

۱ـ اگر $p > 1$ باشد، سری همگراست.

۲ـ اگر $p \leq 1$ باشد، سری واگراست.

تذکر: در سری ریمان $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$، اگر $p = 1$ باشد، سری ریمان به سری‌هارمونیک $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ تبدیل شده و لذا واگراست. (البته به روشهای مختلفی، می‌توان ثابت کرد که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگراست)

تست: کدام سری زیر همگراست؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

پاسخ صحیح، گزینه‌ی (۲) می‌باشد زیرا فقط در این سری، $p = 2 > 1$ است.

کسی که قرض خود را ادا می‌کند بر ثروت خود می‌افزاید. **«انگلیسی»**

علم تو را حفظ می‌کند اما ثروت را تو باید حفظ کنی. **«حضرت محمد»**

دوست آن باشد که گیرد دست دوست

در پریشان حالی و درماندگی

«سعدی»

تست (۱)

۱ـ سری $\sum_{n=3}^{\infty}(1+3^{-n})$

۱) به ۳ همگراست ۲) به ۱ همگراست ۳) به ۴ همگراست ۴) واگراست

۲ـ حاصل $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots$ **برابر است با:**

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) ∞ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۳ـ هرگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-5}{a_n+1}$ **همگرا باشد، آنگاه** $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{a_n+11}$ **برابر است با:**

۱) $\sqrt{11}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) ۴ ۴) ۵

۴ـ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left\lfloor\frac{9}{n}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{8}{n}\right\rfloor\right)$ **کدام است؟**

۱) ۴۵ ۲) ۴۴ ۳) ۴۳ ۴) ۵۱

۵ـ حاصل کسر $S=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots}{\frac{1}{5}+\frac{4}{25}+\frac{16}{125}+\dots}$ **برابر است با:**

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) ۲ ۳) ۸ ۴) $\frac{3}{2}$

۶ـ مقدار $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ **برابر است با:**

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $+\infty$

۷ـ حاصل $\sum_{n=0}^{98}\log\frac{n+2}{n+1}$ **برابر است با:**

۱) ۱ ۲) -2 ۳) ۱۰۰ ۴) ۲

۸ـ هرگاه داشته باشیم: $\log_8^x+(\log_8^x)^2+(\log_8^x)^3+\dots=\frac{1}{2}$**، آنگاه x برابر است با:**

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۹ـ مجموع n جمله‌ی اول سری $2^2+4^2+6^2+\dots$ **برابر است با:**

۱) $\frac{2}{3}n(n+1)(n+2)$ ۲) $\frac{3}{2}n(n+1)(n+2)$ ۳) $\frac{2}{3}n(n+1)(2n+3)$ ۴) $\frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$

۱۰ـ سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5n}+\frac{1}{5^n}\right)$

۱) به ۱ همگراست ۲) واگراست ۳) به $\frac{1}{5}$ همگراست ۴) به $\frac{1}{4}$ همگراست.

۱ـ (۴) $\sum_{n=3}^{\infty} 1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{3^n} =$ واگرا = همگرا + واگرا

۲ـ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{\infty} = 1$ (قاعده‌ی تلسکوپی)

۳ـ (۳) چون سری همگراست پس حد جمله‌ی عمومی سری یعنی $U_n = \frac{a_n - 5}{a_n + 1}$، صفر است.

$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n - 5}{a_n + 1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 5 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sqrt{a_n + 11} = \sqrt{16} = 4$

۴ـ (۳) $(8+9) + (4+4) + (2+3) + (2+2) + (1+1)$

$+ (1+1) + (1+1) + (1+1) + (0+1) + (0+0) + (0+0) + \ldots = 43$

۵ـ (۲) از فرمول حد مجموع استفاده کرده‌ایم.

$S = \dfrac{\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}}{\dfrac{\frac{1}{5}}{1-\frac{4}{5}}} = \frac{2}{1} = 2$

۶ـ (۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{\infty} = 1$

۷ـ (۴) $\sum_{n=0}^{98} (\log(n+2) - \log(n+1)) = \log 100 - \log 1 = 2 - 0 = 2$

۸ـ (۱) $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\log_8^x}{1 - \log_8^x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_8^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 8^{\frac{1}{3}} = 2$

۹ـ (۴) $\sum_{k=1}^{n} (2k)^2 = 4 \sum_{k=1}^{n} k^2 = 4\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1)$

۱۰ـ (۲) $\frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n =$ واگرا = همگرا + واگرا

اگر کتاب و مطالعه نبود من هیچ بودم. **«نیوتن»**

زندگانی یک نبرد دائمی با ناملایمات است. **(بتهوون)**

تست (۲)

۱ـ اگر $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$، حاصل $S = \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \dots$ کدام است؟

۱) $\cot^2 x$ ۲) $\tan^2 x$ ۳) $\cos^2 x$ ۴) $\frac{1}{2 + 2\sin^2 x}$

۲ـ کدام سری زیر واگرا نیست؟

۱) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots$ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

۳) $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ ۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + n^2}$

۳ـ حاصل سری $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{7}{4}$ ۴) این سری واگراست

۴ـ حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \times 8^{n+1}$، کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) واگراست

۵ـ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (3^{-n} + 4^{-n})$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{25}$ ۲) $\frac{1}{48}$ ۳) $\frac{14}{48}$ ۴) $\frac{12}{35}$

۶ـ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \pi^{1-n} a_n$ همگراست، دنباله‌ی a_n، کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) $\{7^n\}$ ۲) $\{3^n\}$ ۳) $\{(0/3)^{-n}\}$ ۴) $\{2^n\}$

۷ـ حاصل سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+2}{(n+3)!}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{120}$ ۴) ۱

۸ـ توپی را از ارتفاع ۲۰ متری به طرف زمین رها کردیم، توپ هر بار پس از برخورد به زمین، به اندازه‌ی $\frac{3}{5}$ ارتفاع قبلی خود، بالا می‌رود، این توپ پس از طی چه مسافتی، به حالت سکون در می‌آید؟

۱) ۵۰ متر ۲) ۱۰۰ متر ۳) ۸۰ متر ۴) ۹۰ متر

۹ـ سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{x^{n+2}}$ همگراست، x کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۶

۱۰ـ حاصل سری $1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[4]{4} + \dots$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $2 + \sqrt{2}$ ۳) $4 + \sqrt{2}$ ۴) این سری واگراست.

۱ـ (۲) $x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \sin x \neq \pm ۱ \Rightarrow -۱ < \sin x < ۱$

$\Rightarrow |\sin^۲ x| < ۱ \Rightarrow S = \frac{a}{۱-r} = \frac{\sin^۲ x}{۱-\sin^۲ x} = \tan^۲ x$

۲ـ (۴) سری گزینه‌ی (۱) سری $\frac{۱}{۲}\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n}$ است که واگراست.

سری گزینه‌ی (۲) یعنی: $\infty = \sqrt{\infty} - \sqrt{۱} = \sum_{n=۱}^{\infty}(\sqrt{n+۱} - \sqrt{n})$ نیز واگراست.

سری گزینه‌ی (۳) نیز واگراست زیرا: $\lim_{n \to +\infty} s_n = ۰, ۱$

سری گزینه‌ی (۴) هم ارز با سری ریمان همگرای $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^۲}$ بوده و لذا خود همگراست از طرفی

$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{n^۲(n+۱)} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n(n+۱)} = \sum_{n=۱}^{\infty} (\frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+۱}) = ۱$

۳ـ (۲) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{۱+۲+۳+\dots+n} = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\frac{n(n+۱)}{۲}} = ۲\sum_{n=۱}^{\infty} (\frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+۱}) = ۲(۱-۰) = ۲$

۴ـ (۴) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۸^{n+۱}}{۳^n} \quad r = \frac{۸}{۳} > ۱ \Rightarrow$ سری واگراست.

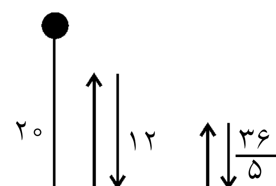
۵ـ (۴) $\sum_{n=۱}^{\infty} \left[(\frac{۱}{۶})^n + (\frac{۱}{۸})^n\right] = \frac{\frac{۱}{۶}}{۱-\frac{۱}{۶}} + \frac{\frac{۱}{۸}}{۱-\frac{۱}{۸}} = \frac{۱۲}{۳۵}$

۶ـ (۱) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۷^n}{\pi^{n-۱}}$ ، $r = \frac{۷}{\pi} > ۱ \Rightarrow$ سری واگرا می‌شود

۷ـ (۲) $\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{(n+۳)-۱}{(n+۳)!} = \sum_{n=۲}^{\infty} (\frac{۱}{(n+۲)!} - \frac{۱}{(n+۳)!}) = \frac{۱}{۴!} - \frac{۱}{\infty} = \frac{۱}{۲۴}$

۸ـ (۳) $۲۰ + ۲(۲۰(\frac{۳}{۵}) + ۲۰(\frac{۳}{۵})^۲ + \dots) = ۲۰ + ۲(\frac{a}{۱-r})$

$= ۲۰ + ۲(\frac{۱۲}{۱-\frac{۳}{۵}}) = ۸۰$



۹ـ (۱) $r = \frac{۲}{x} \Rightarrow |r| < ۱ \Rightarrow |\frac{۲}{x}| < ۱ \Rightarrow |x| > ۲$

۱۰ـ (۴) $\sum_{n=۱}^{\infty} \sqrt[n]{n} \quad \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = ۱ \neq ۰ \Rightarrow$ سری واگراست.

سخن گفتن به موقع و سکوت نمودن به موقع، نشانه‌ی عقل است. (سقراط)

تست (۳)

۱ـ حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3} - 3\sqrt{n+2}}{3^{n+2}}$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ ۴) $-\frac{\sqrt{3}}{9}$

۲ـ سریهای $\sum_{k=1}^{\infty} \log\frac{k+1}{k}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ به ترتیب کدام وضع زیر را دارند؟

۱) همگرا ـ همگرا ۲) واگرا ـ واگرا ۳) واگرا ـ همگرا ۴) همگرا ـ واگرا

۳ـ هرگاه $m = \sum_{i=10}^{109} (\frac{1}{2} i + 1)$، حاصل $\sum_{i=10}^{109} i$ برابر است با:

۱) $2m - 198$ ۲) $2m + 198$ ۳) $2m - 200$ ۴) $2m + 200$

۴ـ کدام یک از تساویهای زیر نادرست است؟

۱) $\sum_{i=1}^{10} a_i + \sum_{i=11}^{20} a_i = \sum_{i=1}^{20} a_i$ ۲) $\sum_{i=1}^{10} a_i = \sum_{i=3}^{12} a_{i-2}$

۳) $\sum_{i=n-1}^{n+9} c = 10c$ ۴) $\sum_{k=m}^{n} (f(k+1) - f(k)) = f(n+1) - f(m)$

۵ـ سری $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{n} - \frac{1}{n+1})$

۱) همگرا به ۰ است ۲) همگرا به ۱ است ۳) همگرا به $\frac{1}{2}$ است ۴) واگراست.

۶ـ سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2k}} (x-4)^k$ به ازاء چه مقادیری از x، همگراست؟

۱) $-13 < x < 5$ ۲) $-5 < x < 13$ ۳) $5 < x < 13$ ۴) $3 < x < 5$

۷ـ مقدار سری $\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^3} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2}$ برابر است با:

۱) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ۳) $2\sqrt{2}+2$ ۴) $2\sqrt{2}-2$

۸ـ به ازاء چه مقدار a، سری $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{an+2}{n+3} - 1)$ همگراست؟

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) ۰ ۴) هیچ مقدار

۹ـ اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا به s باشد، $(a_n \neq 0)$ آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{a_n}$

۱) همگرا به $\frac{1}{S}$ است ۲) همگرا به $3S$ است ۳) همگرا به $\frac{3}{S}$ است ۴) واگراست.

۱۰ـ حاصل سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۱ـ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n+3}}{3^{n+2}}-\frac{\sqrt{n+2}}{3^{n+1}}\right)=\frac{\sqrt{\infty}}{3^{\infty}}-\frac{\sqrt{3}}{9}=0-\frac{\sqrt{3}}{9}=-\frac{\sqrt{3}}{9}$

۲ـ (۳) $\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{k+1}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}(\log(k+1)-\log k)=\log\infty-\log 1=\infty$ واگرا

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3}}=$ همگرا (سری ریمان با $p=3>1$)

۳ـ (۳) $\frac{1}{2}\sum_{i=10}^{109} i+\sum_{i=10}^{109} 1=m\Rightarrow\frac{1}{2}\sum_{i=10}^{109} i=m-(109-10+1)\Rightarrow\sum_{i=10}^{109} i=2m-200$

۴ـ (۳) $\sum_{i=n-1}^{n+9} c=(n+9-n+1+1)c=11c$

۵ـ (۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$ واگرا $=$ همگرا $+$ واگرا

۶ـ (۲) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x-4}{9}\right)^{k}\Rightarrow r=\frac{x-4}{9}\Rightarrow\left|\frac{x-4}{9}\right|<1\Rightarrow -9<x-4<9\Rightarrow -5<x<13$

۷ـ (۱) $\frac{1}{2}+(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}-1)^{2}+(\sqrt{2}-1)^{3}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{a}{1-r}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}+1}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

نکته: $\sqrt{2}-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

۸ـ (۴) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-a)n+1}{n+3}$

اگر $a=1$ باشد سری داده شده به صورت سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+3}$ در می‌آید که واگراست.

اگر $a\neq 1$ باشد آنگاه حد جمله‌ی عمومی سری، $1-a$، که عددی مخالف صفر است، می‌شود و لذا در اینحالت نیز سری واگراست.

۹ـ (۴) چون سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگراست پس $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$ و لذا حد جمله‌ی عمومی سری دوم، یعنی $\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{a_n}$ موجود نبوده و در نتیجه مخالف صفر است و سری دوم واگراست.

۱۰ـ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{\infty}\right)=\frac{1}{2}$

مرگ حقیقی برای انسان، مرگ امید است. (ناپلئون)

تست (۴)

۱ـ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\log 2}{\log 5}\right)^n$ برابر است با:

۱) $-\log 2$ ۲) $-\log 5$ ۳) $\log_5^2$ ۴) $\log_2^5$

۲ـ با توجه به اینکه $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$، حاصل $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$ برابر است با:

۱) $2e$ ۲) $2e-1$ ۳) $2e+1$ ۴) $2e-3$

۳ـ مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^4+2n^3+n^2}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۱

۴ـ در سری $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ ، هرگاه $S_n=2n^2-3n$، حاصل $\frac{a_{10}}{a_5}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{2}{7}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{7}{3}$

۵ـ حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{(n+2)(n+5)}$ برابر است با:

۱) $\frac{13}{4}$ ۲) $\frac{47}{20}$ ۳) $\frac{77}{20}$ ۴) $\frac{7}{4}$

۶ـ مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n^2+n}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

۷ـ مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+2^n}{3^n}$ کدام است؟

۱) $\frac{11}{20}$ ۲) $\frac{7}{20}$ ۳) $\frac{13}{20}$ ۴) $\frac{-11}{20}$

۸ـ با فرض $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ ، حاصل $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-4n+1}$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi^2}{6}$ ۲) $\frac{\pi^2}{8}$ ۳) $\frac{\pi^2}{24}$ ۴) $\frac{\pi^2}{12}$

۹ـ عدد همگرایی سری $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\dots+\frac{n}{2^n}+\dots$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{4}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{16}{15}$ ۴) ۲

۱۰ـ مقدار سری $\sum_{n=100}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{10}$ ۳) ۱ ۴) ۱۰

۱ـ (۱) $r=-\frac{\log ۲}{\log ۵}=-\log_۵^۲ \Rightarrow -۱<r<۱$ سری همگراست

$$S=\frac{a}{۱-r}=\frac{-\log_۵^۲}{۱+\log_۵^۲}=\frac{-\log_۵^۲}{\log_۵^۵+\log_۵^۲}=\frac{-\log_۵^۲}{\log_۵^{۱۰}}=-\log_۵^۲\times\log_{۱۰}^۵=-\log_{۱۰}^۲=-\log ۲$$

یادآوری: $\log_b^a=\frac{\log a}{\log b}$

۲ـ (۴) $$\sum_{n=۳}^{\infty}\frac{n}{(n-۱)!}=\sum_{n=۳}^{\infty}\frac{n-۱+۱}{(n-۱)!}=\sum_{n=۳}^{\infty}\frac{۱}{(n-۲)!}+\sum_{n=۳}^{\infty}\frac{۱}{(n-۱)!}=(e-۱)+(e-۲)=۲e-۳$$

یادآوری: $$e=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{۱}{n!}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(n-۱)!}=\sum_{n=۲}^{\infty}\frac{۱}{(n-۲)!}=\sum_{n=-۱}^{\infty}\frac{۱}{(n+۱)!}$$

۳ـ (۴) $$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(n+۱)^۲-n^۲}{n^۲(n+۱)^۲}=\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱}{n^۲}-\frac{۱}{(n+۱)^۲}\right)=۱-\frac{۱}{\infty}=۱$$

نکته: $\frac{x-y}{xy}=\frac{۱}{y}-\frac{۱}{x}$

۴ـ (۴) $$\frac{a_{۱۰}}{a_۵}=\frac{s_{۱۰}-s_۹}{s_۵-s_۴}=\frac{۱۷۰-۱۳۵}{۳۵-۲۰}=\frac{۷}{۳}$$

۵ـ (۲) $$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۹}{(n+۲)(n+۵)}=\frac{۹}{|۵-۲|}\left(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}\right)=\frac{۴۷}{۲۰}$$

یادآوری: $$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{m}{(n+a)(n+b)}=\frac{m}{|b-a|}\left(\frac{۱}{a+۱}+\frac{۱}{a+۲}+\dots+\frac{۱}{b}\right)$$

۶ـ (۳) $$\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\frac{n+(n+۱)}{n(n+۱)}=\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{n+۱}\left(\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n}\right)$$

$$=\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{(-۱)^{n+۱}}{n+۱}-\frac{(-۱)^n}{n}\right)=\frac{(-۱)^{\infty}}{\infty}-\frac{(-۱)^۱}{۱}=۱$$

۷ـ (۳) $$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}}{۳^n}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}۲^n}{۳^n}$$

$$=\frac{a}{۱-r}+\frac{a}{۱-r}=\frac{\frac{۱}{۳}}{۱+\frac{۱}{۳}}+\frac{\frac{۲}{۳}}{۱+\frac{۲}{۳}}=\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۵}=\frac{۱۳}{۲۰}$$

۸ـ (۲) $$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^۲}=\frac{\pi^۲}{۶}\Rightarrow\left(\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۴^۲}+\dots\right)=\frac{\pi^۲}{۶}$$

$$\left(\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۵^۲}+\dots\right)+\left(\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۴^۲}+\frac{۱}{۶^۲}+\dots\right)=\frac{\pi^۲}{۶}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-4n+1}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}$$

۹ـ (۴) ***یادآوری:*** $1+x+x^2+x^3+\dots=\frac{1}{1-x} \quad ,(|x|<1)$

مشتق می‌گیریم $1+2x+3x^2+4x^3+\dots=\frac{1}{(1-x)^2}$

در x ضرب می‌کنیم. $x+2x^2+3x^3+\dots=\frac{x}{(1-x)^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=2$$

۱۰ـ (۲)

$$\sum_{n=100}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\sum_{n=100}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}\sqrt{n}}$$

$$=\sum_{n=100}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{100}}-\frac{1}{\sqrt{\infty}}=\frac{1}{10}$$

مرتبه‌ی ایمان هر کس، به اندازه‌ی عمل اوست. (حضرت علی (ع))

تست (۵)

۱ـ کدام جمله نادرست است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{\pi}$ واگراست

۲) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10}$ نیز همگراست.

۳) مجموع یک سری همگرا با یک سری واگرا، واگراست.

۴) اگر $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

۲ـ مقدار سری $4 - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \dots$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) $\frac{16}{5}$ ۴) ۲

۳ـ سری $\sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{k^2+4k+3}{k^2+4k+4}$ مفروض است، این سری

۱) همگرا به ۰ است ۲) همگرا به $\log^2 3$ است ۳) همگرا به $\log\frac{2}{3}$ است. ۴) واگراست.

۴ـ سری $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+5}\right)$ مفروض است، این سری

۱) همگرا به صفر است ۲) همگرا به $\frac{1}{12}$ است ۳) همگرا به $\frac{9}{20}$ است ۴) واگراست

۵ـ حاصل سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+5)}$ چگونه است؟

۱) واگراست ۲) همگرا به $\frac{1}{12}$ است ۳) همگرا به $\frac{1}{20}+\frac{1}{12}$ است ۴) همگرا به $\frac{1}{20}$ است

۶ـ حاصل سری $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^{2n+1}}$ کدام است؟

۱) $\frac{10}{23}$ ۲) $\frac{4}{115}$ ۳) $\frac{2}{115}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۷ـ به ازاء چه مقدار x، سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)$ همگراست؟

۱) $-1 < x < 1$ ۲) $x = \frac{1}{2}$ ۳) $|x| \leq 1$ ۴) هیچ مقدار

۸ـ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n + n(5^n)}{n(10^n)}$

۱) همگرا به ۰ است ۲) همگرا به $\frac{1}{10}$ است ۳) واگراست ۴) همگرا به ۱۰ است

۹ـ اگر $x > y > 0$ باشد، حد مجموع سر $x + y + \frac{y^2}{x} + \frac{y^3}{x^2} + \dots$ کدام است؟

۱) $\frac{x}{x-y}$ ۲) $\frac{x^2}{x-y}$ ۳) $\frac{y}{x-y}$ ۴) $\frac{y^2}{x-y}$

۱۰ـ هرگاه سری $10^n + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \dots$ به عدد $\frac{1000}{9}$ همگرا باشد، n برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱ـ (۴) هرگاه در یک سری حد جمله‌ی عمومی صفر شود، ممکن است سری همگرا باشد، ممکن است واگرا (یادتان نرود)

۲ـ (۳)
$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{4}{1-(-\frac{1}{4})}=\frac{16}{5}$$

۳ـ (۳)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{\frac{k+1}{k+2}}{\frac{k+2}{k+3}}=\sum_{k=1}^{\infty}(\log\frac{k+1}{k+2}-\log\frac{k+2}{k+3})=\log\frac{2}{3}-\log\frac{\infty}{\infty}$$ مبهم

$$=\log\frac{2}{3}-\log 1=\log\frac{2}{3}$$ رفع ابهام

۴ـ (۳)
$$\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4})+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+5})=(\frac{1}{4}-\frac{1}{\infty})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{\infty})=\frac{9}{20}$$

۵ـ (۳)
$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3})+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2k+3}-\frac{1}{2k+5})=\frac{1}{4}(\frac{1}{3}-\frac{1}{\infty})+\frac{1}{4}(\frac{1}{5}-\frac{1}{\infty})=\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$$

۶ـ (۱)
$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{25}}=\frac{10}{23}$$

۷ـ (۴) هرگاه $|x|>1$ باشد، آنگاه $\lim_{n\to+\infty}a_n=\infty\neq 0$ و سری واگراست.

و هرگاه $|x|\leq 1$ باشد، آنگاه $\lim_{n\to+\infty}a_n\neq 0$ و سری واگراست.

۸ـ (۳)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n(10^n)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(5^n)}{n(10^n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n=$$ واگرا = همگرا + واگرا

۹ـ (۲)
$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{x}{1-\frac{y}{x}}=\frac{x^2}{x-y}$$

$(x>y>0 \Rightarrow r=\frac{y}{x}<1 \Rightarrow 0<r<1$ سری همگرا است$)$

۱۰ـ (۲)
$$S=\frac{a}{1-r}\Rightarrow\frac{1000}{9}=\frac{10^n}{1-\frac{1}{10}}\Rightarrow\frac{1000}{9}=\frac{10^{n+1}}{9}\Rightarrow n=2$$

دانستن، توانستن است. (فردوسی)

تست (۶)

۱ـ حاصل سری $\dots + \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} - ۱$ برابر است با:

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۷}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۲ـ مجموع n جمله‌ی اول سری $\dots + ۹۹۹ + ۹۹ + ۹$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۰^n - ۱}{۹} - n$ ۲) $\frac{n(۱۰^n - ۱)}{۹} - n$ ۳) $\frac{۱۰(۱۰^n - ۱)}{۹} - n$ ۴) $\frac{۱۰(۱۰^n + ۱)}{۹} + n$

۳ـ کدام سری شرط لازم همگرائی را ندارد؟

۱) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\sqrt{n+۱} + \sqrt{n}}$ ۲) $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ ۳) $\sum_{n=۱}^{\infty} \operatorname{Ln}\frac{n}{n+۱}$ ۴) $\sum_{n=۱}^{\infty} \left(\frac{n}{n+۱}\right)^n$

۴ـ در مورد سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \left(\sin\frac{۱}{n} + \cos\frac{۱}{n}\right)^n$ کدام گزینه‌ی زیر صحیح است؟

۱) همگرا به e است ۲) همگرا به $\frac{۱}{e}$ است ۳) همگرا به $\sqrt{e}$ است ۴) واگراست

۵ـ سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\sqrt{n^۲ + ۲n} - (n+۱)}{\sqrt{n^۲ + ۳n + ۲}}$ چگونه است؟

۱) واگراست ۲) همگرا به $۱ - \sqrt{۲}$ است ۳) همگرا به $\frac{\sqrt{۲} - ۲}{۲}$ است ۴) همگرا به $۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

۶ـ سری $\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۳k^۲ + ۳k + ۱}{k^۳ (k+۱)^۳}$ چگونه است؟

۱) همگرا به ۱ است ۲) واگراست ۳) همگرا به $\frac{۱}{۸}$ است ۴) همگرا به $-\frac{۱}{۸}$ است

۷ـ حاصل سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{۳^n}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۳}{۴}$

۸ـ مقدار سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۵^{n-۲}}{۶^{n+۱}}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۳۰}$ ۳) $\frac{۱}{۳۰۰}$ ۴) $\frac{۱}{۱۸۰}$

۹ـ جواب معادله‌ی $\sum_{n=۱}^{\infty} x^{n-۱} = \frac{۱}{x}$ کدام است؟ $(۰ < x < ۱)$

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۱۰ـ سری $\dots + \frac{۴}{۱۲۵} + \frac{۴}{۲۷} + \frac{۱}{۸} + \frac{۴}{۲۵} + \frac{۲}{۹} + \frac{۱}{۴} + \frac{۴}{۵} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} + ۱۰۰$ به کدام عدد زیر همگراست؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۰۱ ۳) $\frac{۲۰۳}{۲}$ ۴) ۱۰۳

۱ـ (۳) $(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...)-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

۲ـ (۳) $(10-1)+(10^2-1)+...+(10^n-1)=(10+10^2+...+10^n)-n$

$=\frac{a(1-r^n)}{1-r}-n=\frac{10(1-10^n)}{-9}-n=\frac{10(10^n-1)}{9}-n$

در حالت کلی: $\overline{a}+\overline{aa}+\overline{aaa}+...=\frac{a}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{9}-n\right]$

۳ـ (۴) $\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}(\frac{n}{n+1})^n=\lim_{n\to+\infty}(\frac{n+1}{n})^{-n}=\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n}=e^{-1}=\frac{1}{e}\neq0\Rightarrow$ واگرا است.

۴ـ (۴) $\lim_{n\to+\infty}a_n\simeq\lim_{n\to+\infty}(\cos\frac{1}{n}+\sin\frac{1}{n})^n\sim\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e\neq0$ واگرا

۵ـ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\sqrt{n+2}-(\sqrt{n+1})^2}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}}=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{\frac{n}{n+1}}-\sqrt{\frac{n+1}{n+2}})$

$=\sqrt{\frac{1}{2}}-\underbrace{\sqrt{\frac{\infty}{\infty}}}_{\text{مبهم}}=\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{1}=\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\frac{\sqrt{2}-2}{2}$ (حد می‌گیریم) رفع ابهام

۶ـ (۱) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)^3-k^3}{k^3(k+1)^3}=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k^3}-\frac{1}{(k+1)^3})=\frac{1}{1}-\frac{1}{\infty}=1$

نکته: $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{x-y}{xy}$

۷ـ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{a}{1-r}=\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{-1}{4}$ $\quad,\cos n\pi=(-1)^n$

۸ـ (۲) $S=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{5\times6^2}}{1-\frac{5}{6}}=\frac{1}{30}$

۹ـ (۳) $\frac{a}{1-r}=\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x}\quad\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

۱۰ـ (۴) $100+(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...)+(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+...)+(\frac{4}{5}+\frac{4}{25}+\frac{4}{125}+...)$

$=100+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}+\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{5}}=103$

تست (۷)

۱ـ هرگاه $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a}{k(k-1)} = 2$، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

۲ـ مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arctan}\frac{1}{n^2+n+1}$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

۳ـ اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$، مجموع سری $\sum_{n=1}^{\infty} \sin x (\cos x)^{n-1}$ کدام است؟

۱) $\tan x$ ۲) $\tan\frac{x}{2}$ ۳) $\cot\frac{x}{2}$ ۴) $\cot x$

۴ـ حاصل سری $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{2n} \times 10^{1-n}$ برابر است با:

۱) ۱۰ ۲) $\frac{1}{100}$ ۳) ۱۰۰ ۴) $\frac{1}{10}$

۵ـ شرط همگرائی سری $\frac{1}{1+x} - \frac{1-x}{(1+x)^2} + \frac{(1-x)^2}{(1+x)^3} + \dots$ کدام است؟

۱) $x > 0$ ۲) $x < 0$ ۳) $x = 0$ ۴) $x < \frac{1}{2}$

۶ـ حاصل $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} 10$ کدام است؟

۱) $10n$ ۲) $10n^2(n+1)$ ۳) n^3 ۴) $10n^3$

۷ـ سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}$ به کدام عدد زیر همگراست؟

۱) ۱ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۸ـ عدد اعشاری ... ۰/۵۱۸۱۸۱۸ را به صورت کسر متعارفی ساده شده‌ی $\frac{p}{q}$ نوشته‌ایم، $p + 43 + q$ برابر است با:

۱) ۱۴۱ ۲) ۲۰۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۱۵۹

۹ـ مقدار سری $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ کدام است؟

۱) $1+\sqrt{2}$ ۲) $1-\sqrt{2}$ ۳) $\sqrt{2}-1$ ۴) ۱

۱۰ـ هرگاه $\frac{1}{n^3+3n^2+2n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$، مقدار b کدام است؟

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) ۱

۱ـ (۴) $a\sum_{k=2}^{\infty}(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k})=2 \quad \Rightarrow a(\frac{1}{1}-\frac{1}{\infty})=2\Rightarrow a=2$

۲ـ (۳) $\sum_{n=1}^{\infty}\text{Arctan}\frac{1}{1+n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\text{Arctan}\frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(\text{Arctan}(n+1)-\text{Arctan}\,n)=\text{Arctan}\,\infty-\text{Arctan}\,1=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

نکته: $\text{Arctan}\,x-\text{Arctan}\,y=\text{Arctan}\frac{x-y}{1+xy}$

۳ـ (۳) $S=\frac{a}{1-r}=\frac{\sin x}{1-\cos x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\cot\frac{x}{2}$

۴ـ (۳) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n}}{10^{n-1}}=\frac{a}{1-r}=\frac{10}{1-\frac{9}{10}}=100$

۵ـ (۱) $r=-\frac{1-x}{1+x} \Rightarrow |r|<1 \Rightarrow \left|\frac{x-1}{x+1}\right|<1\Rightarrow |x-1|<|x+1|\Rightarrow x^2-2x+1<x^2+2x+1\Rightarrow x>0$

۶ـ (۴) $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}10n=\sum_{k=1}^{n}n(10n)=\sum_{k=1}^{n}10n^2=n(10n^2)=10n^3$

۷ـ (۳) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+2}{k!(1+(k+1)+(k+1)(k+2))}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+2}{k!(k+2)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!(k+2)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{(k+2)!}$

$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+2-1}{(k+2)!}=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!})=\frac{1}{2!}-0=\frac{1}{2}$

۸ـ (۳) $0/5\overline{18}=\frac{518-5}{990}=\frac{513}{990}=\frac{57}{110}=\frac{p}{q} \Rightarrow \begin{cases}p=57\\q=110\end{cases} \Rightarrow p+43+q=210$

۹ـ (۲) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})\right]=(\sqrt{1}-\sqrt{2})-(\infty-\infty)$ مبهم

$=1-\sqrt{2}+\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}=1-\sqrt{2}$

۱۰ـ (۱) $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+2} \qquad n+1=0\Rightarrow n=-1$

$b=\frac{1}{-1(-1+2)}=-1$

فصل چهاردهم

حد

قبل از بیان حد و مفهوم آن، توجه به نکات زیر که برخی از آنها ممکن است از لحاظ نوشتاری صحیح و دقیق نباشند، در محاسبات حد، از اهمیت بسیاری برخوردارند.

۱)

∞,∞	
$\infty+\infty$	∞
$\infty-\infty$	مبهم
$\infty.\infty$	∞
$\frac{\infty}{\infty}$	مبهم

→ مبهم = یک عدد بسیار بزرگ − یک عدد بسیار بزرگ

→ مبهم = $\frac{\text{یک عدد بسیار بزرگ}}{\text{یک عدد بسیار بزرگ}}$

مثال: $\lim_{x \to +\infty}(x^{۲} - ۲^{x}) = \infty - \infty =$ مبهم

البته پس از رفع ابهام، جواب حد فوق برابر $-\infty$ می‌شود.

۲)

$-\infty,\infty$	
$-\infty+\infty$	مبهم
$-\infty-\infty$	$-\infty$
$(-\infty)(\infty)$	$-\infty$
$\frac{-\infty}{\infty}$	مبهم

مثال: $\lim_{x \to +\infty}\frac{۱ - x^{۲}}{x^{۳}} = \frac{-\infty}{\infty} =$ مبهم

البته پس از رفع ابهام، جواب حد فوق برابر ۰ می‌شود.

۳)

$\infty,-\infty$	
$\infty+(-\infty)$	مبهم
$\infty-(-\infty)$	∞
$(\infty)(-\infty)$	$-\infty$
$\frac{\infty}{-\infty}$	مبهم

نکته: $-(-\infty) = \infty$

۴)

$-\infty,-\infty$	
$-\infty+(-\infty)$	$-\infty$
$-\infty-(-\infty)$	مبهم
$(-\infty)(-\infty)$	$+\infty$
$\frac{-\infty}{-\infty}$	مبهم

تذکر مهم: توجه داشته باشید که هر دو مثبت بینهایتی با هم یکی نیستند (همانطور که هر دو ثروتمندی یکسان نیستند) و

بنابراین نمی‌توان گفت که تفریق آنها صفر می‌شود و تقسیم آنها، یک می‌شود.

۵) $\begin{cases} |\pm\infty| = \infty \\ \lfloor \pm\infty \rfloor = \pm\infty \end{cases}$

۶) $\begin{cases} (\pm\infty)^{2n} = +\infty \\ (+\infty)^{2n+1} = +\infty \\ (-\infty)^{2n+1} = -\infty \end{cases}$

۷) $\begin{cases} \sqrt[2n]{+\infty} = +\infty \\ \sqrt[2n]{-\infty} = \text{تعریف نشده} \\ \sqrt[2n+1]{\pm\infty} = \pm\infty \end{cases}$

۸) $\begin{cases} 0^+ > 0 \\ 0^- < 0 \end{cases}$

۹) $\begin{cases} a > 0 \Rightarrow \begin{cases} a^+ > 0 \\ a^- > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^+ > 0 \\ 2^- > 0 \end{cases} \\ a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^+ < 0 \\ a^- < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (-2)^+ < 0 \\ (-2)^- < 0 \end{cases} \end{cases}$

تذکر مهم: توجه داشته باشید که a^- به معنای عددی است که از a، یک مقدار ناچیزی کمتر است و با $-a$ فرق دارد یعنی $a^- \neq -a$

۱۰) $\dfrac{\text{صفر مطلق}}{\text{هر عدد غیر صفر مطلق}} = \text{صفر مطلق}$

مثال $\rightarrow \dfrac{0}{8} = \dfrac{0}{-7} = \dfrac{0}{0^+} = \dfrac{0}{0^-} = \dfrac{0}{+\infty} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$

۱۱) $\dfrac{\text{هر عدد}}{\text{صفر مطلق}} = \text{تعریف نشده}$

$\dfrac{5}{0} = \dfrac{-11}{0} = \dfrac{0^+}{0} = \dfrac{0^-}{0} = \dfrac{0}{0} = \dfrac{+\infty}{0} = \dfrac{-\infty}{0} = \text{تعریف نشده}$

تذکر مهم: $\dfrac{0^+}{0}, \dfrac{0^-}{0}, \dfrac{0}{0^+}, \dfrac{0}{0^-}, \dfrac{0}{0}$ مبهم نیستند.

مثال: $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-1}{\lfloor x \rfloor - 1} = \dfrac{0^+}{0} = \text{تعریف نشده}$

۱۲) $\begin{cases} 0^+ - 0^+ = \text{مبهم} \\ 0^- - 0^- = \text{مبهم} \end{cases}$

$0^+ - 0^+$ = مبهم ← یک عدد مثبت بسیار کوچک − یک عدد مثبت بسیار کوچک = مبهم

مثال: $\lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}) = 0^+ - 0^+ = \text{مبهم}$

البته پس از رفع ابهام، جواب حد فوق برابر صفر می‌شود.

تذکر مهم: توجه داشته باشید که هر دو صفر مثبتی با هم برابر نیست (همانطور که ثروت هر دو انسان فقیری یکسان نیست) و لذا نمی‌توان گفت که تفریق آنها صفر می‌شود و تقسیم آنها یک می‌شود.

مثال: $\lim_{x \to ۱} \frac{x^۲-۱}{x-۱} = \frac{\text{۰ نسبی}}{\text{۰ نسبی}}$ مبهم

البته پس از رفع ابهام جواب حد فوق برابر ۲ می‌شود.

۱۳) $\frac{\text{۰ نسبی}}{\text{۰ نسبی}} =$ مبهم

۱۴) $\frac{\text{عدد}}{\text{بینهایت}} =$ ۰ نسبی

$\begin{cases} \frac{\text{عدد مثبت}}{+\infty} = ۰^+ \\ \frac{\text{عدد مثبت}}{-\infty} = ۰^- \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{\text{عدد منفی}}{+\infty} = ۰^- \\ \frac{\text{عدد منفی}}{-\infty} = ۰^+ \end{cases}$

توجه داشته باشید که هر چه مخرج کسری بزرگ شود، کسر کوچک می‌شود.

مثال: $\frac{۱}{+\infty} = ۰^+$ (مثل این است که بخواهیم یک عدد نان را مثلاً بین جمعیت دنیا تقسیم کنیم، بالاخره به هر فرد، مقدار بسیار بسیار ناچیزی (۰^+) نان می‌رسد)

۱۵) $\frac{\text{عدد}}{\text{۰ نسبی}} =$ بی‌نهایت

$\begin{cases} \frac{\text{عدد مثبت}}{۰^+} = +\infty \\ \frac{\text{عدد مثبت}}{۰^-} = -\infty \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{\text{عدد منفی}}{۰^+} = -\infty \\ \frac{\text{عدد منفی}}{۰^-} = +\infty \end{cases}$

$$۱۶)\ a > ۱ \Rightarrow \begin{cases} a^{+\infty} = +\infty \\ a^{-\infty} = \frac{۱}{a^\infty} = \frac{۱}{\infty} = ۰^+ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ۲^{+\infty} = +\infty \\ (۳^{-\infty}) = ۰^+ \end{cases}$$

$$۱۷)\ ۰ < a < ۱ \Rightarrow \begin{cases} a^{+\infty} = ۰^+ \\ a^{-\infty} = \frac{۱}{a^\infty} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (\frac{۱}{۲})^{+\infty} = ۰^+ \\ (\frac{۳}{۴})^{-\infty} = +\infty \end{cases}$$

$$۱۸) \begin{cases} |۰^\pm| = ۰^+ \\ \lfloor ۰^+ \rfloor = ۰ \\ \lfloor ۰^- \rfloor = -۱ \end{cases}$$

$$۱۹) \begin{cases} (۰^+)^n < ۰^+ \\ \sqrt[n]{۰^+} > ۰^+ \end{cases}$$

عدد بین ۰ و ۱ هر چه به توان برسد، کوچکتر می‌شود.

اگر از عدد بین ۰ و ۱، ریشه بگیریم، بزرگتر می‌شود.

۲۰) $\begin{cases} \text{۰ نسبی} \times \text{عدد} = \text{۰ نسبی} \\ \text{۰ مطلق} \times \text{عدد} = \text{۰ مطلق} \end{cases}$ مثال $\Rightarrow ۷ \times ۰^+ = ۰^+$

۲۱) ۰ مطلق $\times \pm\infty =$ ۰ مطلق (بی‌نهایت هیچی می‌شود هیچی)

۲۲) ۰ نسبی $\times \pm\infty =$ مبهم

مبهم = یک عدد مثبت بسیار بزرگ × یک عدد مثبت بسیار کوچک ← مبهم $= (+\infty) \times (۰^+)$

مثال: $\lim_{x \to ۱} (x-۱) \tan \frac{\pi x}{۲} =$ ۰ نسبی $\times \pm\infty =$ مبهم

البته پس از رفع ابهام، جواب حد فوق $\frac{-۲}{\pi}$ می‌شود.

۲۳) $(\text{۰ مطلق})^{\text{۰ مطلق}} =$ تعریف نشده

۲۴) $(\text{هر عدد غیرصفر مطلق})^{\text{۰ مطلق}} = ۱$

مثال: $۸^{۰} = ۱ \Rightarrow$, $(۰^{+})^{۰} = ۱$

تذکر مهم: $(۰^{+})^{۰}$ و $(۰^{-})^{۰}$ مبهم نیستند و هر دو برابر ۱ می‌باشند.

۲۵) $(\text{صفر نسبی})^{\text{صفر نسبی}} =$ مبهم

مثال: $\lim_{x \to ۰^{+}} x^{x} = (۰^{+})^{۰^{+}} =$ مبهم

۲۶) $(\text{۱ مطلق})^{\infty} =$ ۱ مطلق

البته پس از رفع ابهام، جواب حد فوق برابر ۱ می‌شود.

۲۷) $(\text{۱ نسبی})^{+\infty} =$ مبهم

مثال: $\lim_{n \to +\infty} (۱ + \frac{۱}{n})^{n} = (۱^{+})^{+\infty} =$ مبهم

البته پس از رفع ابهام، جواب حد فوق برابر e (عدد نپر) می‌شود.

۲۸) $(\text{۰ نسبی})^{\infty} =$ ۰ نسبی

توجه داشته باشید که ۰ نسبی، عددی بسیار کوچک است و لذا هر چه به توان برسد، کوچک و کوچکتر می‌شود.

۲۹) $(\infty)^{\text{۰ نسبی}} =$ مبهم

مثال: $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \to +\infty} n^{\frac{۱}{n}} = (\infty)^{۰^{+}} =$ مبهم

البته پس از رفع ابهام، جواب حد فوق برابر ۱ می‌شود.

۳۰) $(a > ۱)$,

- ۱) $\log_{a}^{(+\infty)} = +\infty$ ، (x بزرگ شود، لگاریتمش هم بزرگ می‌شود)
- ۲) $\log_{a}^{(-\infty)} =$ تعریف نشده
- ۳) $\log_{a}^{۰^{+}} = -\infty$ ، (x کوچک شود، لگاریتمش هم کوچک می‌شود)
- ۴) $\log_{a}^{۰^{-}} =$ تعریف نشده
- ۵) $\log_{a}^{۰} =$ تعریف نشده

مثال: $\lim_{x \to +\infty} \log_{۲}^{\frac{۱}{x}} = -\infty$

۳۱) $(۰ < a < ۱)$

- ۱) $\log_{a}^{(+\infty)} = -\infty$ ، (x بزرگ شود، لگاریتمش کوچک می‌شود)
- ۲) $\log_{a}^{(-\infty)} =$ تعریف نشده
- ۳) $\log_{a}^{۰^{+}} = +\infty$ ، (x کوچک شود، لگاریتمش بزرگ می‌شود)
- ۴) $\log_{a}^{۰^{-}} =$ تعریف نشده
- ۵) $\log_{a}^{۰} =$ تعریف نشده

مثال: $\lim_{x \to ۵^{+}} (\log_{۰/۰۱}^{(x-۵)}) = +\infty$

۳۲) $۱ < a < b \quad , n \in N \Rightarrow \begin{cases} a^{n} < b^{n} \\ a^{+\infty} < b^{+\infty} \end{cases}$

مثال: $\begin{cases} ۳^{n} < ۴^{n} \\ n \to +\infty \end{cases}$ یا $۳^{+\infty} < ۴^{+\infty} \Leftarrow$

۳۳) $۰ < a < b < ۱ \quad , n \in N \Rightarrow \begin{cases} a^n > b^n \\ a^{+\infty} > b^{+\infty} \end{cases}$

سعی کنید نکات زیر را با توجه به دایره‌ی مثلثاتی، به دقت درک کنید.

۳۴)
$$\begin{cases} \sin(\pm\frac{\pi}{۲}\text{ خود خود}) = \pm ۱ \text{ خودخود} \\ \sin(\frac{\pi}{۲})^+ = ۱^- , \sin(\frac{\pi}{۲})^- = ۱^- \quad , (-۱ \le \sin x \le ۱ :\text{همواره}) \\ \sin(-\frac{\pi}{۲})^+ = (-۱)^+ , \sin(-\frac{\pi}{۲})^- = (-۱^+) \\ \tan(\pm\frac{\pi}{۲}\text{ خودخود}) = \text{تعریف نشده} \\ \tan(\frac{\pi}{۲})^+ = -\infty , \tan(\frac{\pi}{۲})^- = +\infty \\ \tan(-\frac{\pi}{۲})^+ = -\infty , \tan(-\frac{\pi}{۲})^- = +\infty \end{cases}$$

توجه کنید که $(\frac{\pi}{۲})^-$ در ربع اول است و کمی از $\frac{\pi}{۲}$ کمتر است.
و $(\frac{\pi}{۲})^+$ در ربع دوم است و کمی از $\frac{\pi}{۲}$ بیشتر است.

۳۵)
$$\begin{cases} \text{Arcsin}(\pm ۱ \text{ خودخود}) = \pm\frac{\pi}{۲}\text{ خود خود} \\ \text{Arcsin}۱^- = (\frac{\pi}{۲})^- , \text{Arcsin}(-۱)^+ = (-\frac{\pi}{۲})^+ \\ \text{Arcsin}۱^+ = \text{تعریف نشده} , \text{Arcsin}(-۱)^- = \text{تعریف نشده} \\ \text{Arctan}(+\infty) = \frac{\pi}{۲} = (\frac{\pi}{۲})^- \\ \text{Arctan}(-\infty) = -\frac{\pi}{۲} = (-\frac{\pi}{۲})^+ \end{cases} \quad (-\infty < \text{Arctan}x < +\infty)$$

توجه داشته باشید که:

دامنه: $D_{\text{Arcsinx}} = [-۱,۱]$

برد: $R_{\text{Arcsinx}} = [-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$

۳۶)
$$\begin{cases} \cos(۰ \text{ خود خود}) = ۱ \text{ خود خود} \\ \cos ۰^+ = ۱^- \quad , \cos ۰^- = ۱^- \\ \cos(\pi \text{ خود خود}) = -۱ \text{ خود خود} \\ \cos\pi^+ = (-۱)^+ \quad , \cos\pi^- = (-۱)^+ \\ \cot(\pi \text{ یا } ۰ \text{ خود خود}) = \text{تعریف نشده} \\ \cot(۰^+) = +\infty \quad , \cot ۰^- = -\infty \\ \cot(\pi^+) = +\infty \quad , \cot\pi^- = -\infty \end{cases}$$

(همواره: $-۱ \le \cos x \le ۱$)

۳۷)
$$\begin{cases} \text{Arccos}(۱ \text{ خود خود}) = ۰ \text{ خود خود} \\ \text{Arccos}(-۱ \text{ خود خود}) = \pi \text{ خود خود} \\ \text{Arccos}۱^- = ۰^+ , \text{Arccos}(-۱)^+ = \pi^- \\ \text{Arccos}۱^+ = \text{تعریف نشده} , \text{Arccos}(-۱)^- = \text{تعریف نشده} \\ \text{Arccot}(+\infty) = ۰^+ \\ \text{Arccot}(-\infty) = \pi^- \end{cases} \quad ,(۰ < \text{Arccot}x < \pi)$$

توجه داشته باشید که:

دامنه: $D_{\text{Arccosx}} = [-۱,۱]$

برد: $R_{\text{Arccosx}} = [۰,\pi]$

۳۸) $\begin{cases} \tan(\frac{\pi}{۴} \text{ خود خود}) = ۱ \text{ خود خود} \\ \tan(\frac{\pi}{۴})^{+} = ۱^{+} \\ \tan(\frac{\pi}{۴})^{-} = ۱^{-} \end{cases}$

توجه داشته باشید که تابع $y = \tan x$ در فاصله‌ی $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ تابعی اکیداً صعودی است.

۳۹) $\begin{cases} \cot(\frac{\pi}{۴} \text{ خود خود}) = ۱ \text{ خود خود} \\ \cot(\frac{\pi}{۴})^{+} = ۱^{-} \\ \cot(\frac{\pi}{۴})^{-} = ۱^{+} \end{cases}$

توجه داشته باشید که تابع $y = \cot x$ در فاصله‌ی $(۰,\pi)$ تابعی اکیداً نزولی است.

مثال: $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{۴})^{-}} \lfloor -\cot x \rfloor = \lfloor -(۱^{+}) \rfloor = -۲$

۴۰) $\begin{cases} ۰ < x < \frac{\pi}{۴} \\ \frac{\pi}{۴} < x < \frac{\pi}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x < \cos x \quad , \tan x < \cot x \\ \sin x > \cos x \quad , \tan x > \cot x \end{cases}$

صور مبهم (صورتهای مبهم):

با توجه به مطالب بیان شده، صور مبهم عبارتند از:

۱) $\frac{\text{۰ نسبی}}{\text{۰ نسبی}}$

۲) $\frac{\infty}{\infty}$

۳) $\infty - \infty$

۴) $\text{۰ نسبی} \times \infty$

۵) $(\text{۰ نسبی})^{\text{۰ نسبی}}$

۶) $(\text{۱ نسبی})^{\infty}$

۷) $(\infty)^{\text{۰ نسبی}}$

۸) $\begin{cases} ۰^{+} - ۰^{+} \\ ۰^{-} - ۰^{-} \end{cases}$

ما رفع ابهام صور مبهم هشت گانه‌ی فوق را به بعد از مبحث هم ارزی و قاعده‌ی هوپیتال موکول می‌کنیم و در آن جا، مفصلاً چگونگی رفع ابهام هر یک از صور فوق را با ذکر مثالهای بسیار جالب، دیدنی و متنوع بیان می‌کنیم.

چند نکته‌ی مهم:

۱) اعداد مثبت بسیار کوچک را معمولاً با α، β، δ، ε نمایش می‌دهند. مانند: $\varepsilon = ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱$

۲) اعداد مثبت بسیار بزرگ را معمولاً با M یا N نمایش می‌دهند. مانند: $M = ۱۰۰۰۰۰۰^{۱۰۰۰۰۰}$

۳) اعداد منفی بسیار کوچک را با $-M$ یا $-N$ نمایش می‌دهند (در واقع M و N اعداد مثبت بسیار بزرگی هستند) مانند:

$-M = -(۱۰۰۰۰۰)^{۹۸۷۶۵}$

۴) مفهوم میل کردن یک متغیر مانند x به سمت یک عدد حقیقی مانند a: هنگامیکه می‌گوییم x به سمت عدد حقیقی a میل می‌کند و می‌نویسیم $(x \to a)$، مفهومش این است که هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم x را با مقادیر کمتر یا بیشتر از a، به a

نزدیک کنیم ولی هیچوقت به a نمی‌رسیم این مفهوم را به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad \forall\delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta$

یا

$a - \delta < x < a + \delta \quad , x \neq a$

به زبان همسایگی می‌توان گفت که x در تمام همسایگی‌های محذوف متقارن a مانند $(a-\delta, a+\delta)-\{a\}$ با هر شعاع دلخواهی مانند δ، وجود دارد.

مثال:

$x \to 2 \Leftrightarrow \forall \delta > 0 : 0 < |x - 2| < \delta$

$x \to 0 \Leftrightarrow \forall \delta > 0 : 0 < |x| < \delta$

$x \to (-3) \Leftrightarrow \forall \delta > 0 : 0 < |x + 3| < \delta$

$u \to n \Leftrightarrow \forall \delta > 0 : 0 < |u - n| < \delta$

$f(x) \to l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : 0 < |f(x) - l| < \varepsilon$

۵) مفهوم میل کردن یک متغیر، مانند x به سمت یک عدد حقیقی مانند a از راست:

هنگامیکه می‌گوئیم x از طرف راست به a میل می‌کند و می‌نویسیم $x \to a^+$، مفهومش این است که هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم x را با مقادیر بیشتر از a، به a نزدیک می‌کنیم، ولی هیچوقت به a نمی‌رسیم (واضح است که در این حالت $x > a$ است و لذا $x - a > 0$ بوده و در نتیجه $|x-a| = x-a$)، این مفهوم را به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$x \to a^+ \quad \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \quad : 0 < x - a < \delta$

یا

$a < x < a + \delta$

به زبان همسایگی می‌توان گفت که x در تمام همسایگی‌های راست a مانند $(a , a + \delta)$ با هر شعاع دلخواهی مانند δ وجود دارد.

۶) مفهوم میل کردن یک متغیر مانند x به سمت یک عدد حقیقی مانند a از چپ: هنگامیکه می‌گوئیم x از طرف چپ به a میل می‌کند و می‌نویسیم $x \to a^-$، مفهومش این است که هر اندازه بخواهیم می‌توانیم x را با مقادیر کمتر از a، به a نزدیک کنیم، ولی هیچوقت به a نمی‌رسیم (واضح است که در این حالت $x < a$ است و لذا $x - a < 0$ بوده و در نتیجه $|x - a| = -(x - a)$)، این مفهوم را به صورت زیر نمایش می‌دهند.

$x \to a^- \Leftrightarrow \forall \delta > 0 : 0 < a - x < \delta$

یا

$-\delta < x - a < 0$

یا

$a - \delta < x < a$

به زبان همسایگی می‌توان گفت که x در تمام همسایگی‌های چپ a مانند $(a-\delta, a)$ با هر شعاع دلخواهی مانند δ، وجود دارد.

۷) مفهوم میل کردن یک متغیر مانند x به سمت $+\infty$:

هنگامیکه می‌گوئیم x به سمت $+\infty$ میل می‌کند و می‌نویسیم $x \to +\infty$، مفهومش این است که هر اندازه بخواهیم می‌توانیم x را بزرگ اختیار کنیم، به طوریکه x از هر عدد بزرگی، بزرگتر باشد این مفهوم را به صورت زیر نمایش می‌دهند.

$x \to +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \ : \ x > M$

مثال: $f(x) \to +\infty \Leftrightarrow \forall N > 0 : f(x) > N$

۸) مفهوم میل کردن یک متغیر مانند x به سمت $-\infty$:

هنگامیکه می‌گوئیم x به سمت $-\infty$ میل می‌کند و می‌نویسیم $x \to -\infty$، مفهومش این است که هر اندازه بخواهیم می‌توانیم x را کوچک اختیار کنیم، به طوریکه x از هر عدد منفی کوچکی، کوچکتر باشد. این مفهوم را به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$x \to -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \ : \ x < -M$

مثال: $f(x) \to -\infty \Leftrightarrow \forall N > 0 : f(x) < -N$

مفهوم حد چپ و حد راست و حد یک تابع: باذکر مثال، مفهوم حد چپ و راست و حد تابع را بیان می‌کنیم.

مثال : تابع $f(x) = 3x + 2$ را در نظر بگیرید، هنگامیکه x را با مقادیر کمتر و بیشتر از ۱ به ۱ نزدیک کنیم (به جدول زیر توجه کنید)

x	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\ldots \to 1^-$	$1^+ \leftarrow \ldots$	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
f(x)	۳/۵	۴/۷	۴/۹۷	۴/۹۹۷	$\ldots \to 5^-$	$5^+ \leftarrow \ldots$	۵/۰۰۳	۵/۰۳	۵/۳

می‌بینیم که مقادیر f(x) در هر دو حالت به عدد ۵ (پنج نسبی) نزدیک می‌شوند (البته هیچوقت به خود خود ۵ نمی‌رسند، زیرا x، هیچوقت به خود خود ۱ نمی‌رسد.

در این حالت می‌گویند تابع f در نقطه‌ی ۲، هم حد چپ دارد و هم حد راست و ضمناً چون مقدار این دو حد با هم برابر است اصطلاحاً می‌گویند تابع f در نقطه‌ی $x = 1$ حد دارد و ضمناً حدش در این نقطه برابر ۵ است و می‌نویسند: $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$

از بررسی اعداد جدول، مشاهده می‌شود که هر چه x را از دو طرف، به عدد ۱ نزدیک و نزدیکتر کنیم، f(x) به عدد ۵ نزدیک و نزدیکتر خواهد شد و هر چه x به ۱ نزدیک‌تر باشد، f(x) به ۵ نزدیکتر خواهد بود مثلاً وقتی $x = 0/999$ اختیار شود، x به اندازه‌ی ۰/۰۰۱ از ۱ کوچکتر است و در این حالت $f(x) = 4/997$ و f(x) به اندازه‌ی ۰/۰۰۳ از ۵ کوچکتر است و یا وقتی $x = 1/001$ اختیار شود، x به اندازه‌ی ۰/۰۰۱ از ۱ بزرگتر است و در این حالت $f(x) = 5/003$ و f(x) به اندازه‌ی ۰/۰۰۳ از ۵ بیشتر است، در مجموع می‌توان گفت که اگر x به اندازه‌ی $\pm 0/001$ با ۱ فاصله داشته باشد، f(x) به اندازه‌ی $\pm 0/003$ با ۵ فاصله دارد، یعنی اگر $x \in (1-0/001\ ,\ 1+0/001)$ آنگاه $f(x) \in (5-0/003\ ,\ 5+0/003)$، به عبارت دیگر اگر $-0/001 < x-1 < 0/001$ باشد آنگاه $-0/003 < f(x) - 5 < 0/003$، این دو نامساوی معادل آنند که اگر

$0/001 > |x-1| > 0$ آنگاه $|f(x) - 5| < 0/003$، حال اگر از دید دیگری به موضوع بپردازیم، یعنی اول f(x) را در نظر بگیریم، می‌توانیم مقادیر f(x) را به عدد ۵، هرچه قدر که بخواهیم نزدیک کنیم به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به ۱ نزدیک کرده باشیم یعنی اگر بخواهیم $|f(x) - 5|$ را به هر اندازه‌ی دلخواه کوچک کنیم لازم است که $|x-1|$ را به اندازه‌ی کافی کوچک کنیم، مفاهیم به اندازه‌ی دلخواه کوچک و به اندازهٔ کافی کوچک را با دو نماد ε و δ بیان می‌کنیم، بنابراین به جای اینکه بگوئیم $|f(x) - 5|$ به اندازه‌ی دلخواه کوچک باشد می‌نویسیم: $\forall \varepsilon > 0 : |f(x)-5| < \varepsilon$ و به جای آنکه بگوئیم به شرط آنکه $|x-1|$ به اندازه‌ی کافی، کوچک باشد می‌نویسیم: $\exists \delta > 0 : 0 < |x - 1| < \delta$، بنابراین مفاهیم فوق را می‌توان چنین بیان کرد.

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x(0 < |x-1| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - 5| < \varepsilon)$$

مثلاً در مورد جدول فوق داریم:

$$\varepsilon = 0/3 \ , \delta = 0/1 : (0 < |x-1| < 0/1 \Rightarrow |f(x) - 5| < 0/3)$$

$$\varepsilon = 0/03 \ , \delta = 0/01 : (0 < |x-1| < 0/01 \Rightarrow |f(x) - 5| < 0/03)$$

$$\varepsilon = 0/003 \ , \delta = 0/001 : (0 < |x-1| < 0/001 \Rightarrow |f(x) - 5| < 0/003)$$

و این عمل را می‌توان همین طور ادامه داده و به جای ε، هر عدد مثبت دلخواه کوچک را قرار داده و به ازاء آن مقدار ε، عدد مثبت دلخواه δ را طوری پیدا کرد که نامساوی $0 < |x-1| < \delta$، نامساوی $|f(x) - 5| < \varepsilon$ را نتیجه دهد.

تعریف حد: فرض می‌کنیم تابع f در یک همسایگی عدد حقیقی a تعریف شده باشد (مگر احتمالاً در خود a تعریف نشده باشد)

گوئیم حد f(x) وقتی x به سمت عدد حقیقی a میل می‌کند، برابر عدد حقیقی l است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ هرگاه: به ازاء هر عدد دلخواه $\varepsilon > 0$، عدد $\delta > 0$ (که معمولاً به ε بستگی دارد) یافت شود به طوریکه: اگر $0 < |x-a| < \delta$ آنگاه $|f(x) - l| < \varepsilon$، تعریف فوق را به زبان ریاضی به صورت زیر می‌نویسند:

$$(*) \ \lim_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \ \varepsilon > 0 \ \exists s > 0 : \forall \ x \in D_f : (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

باید دقت داشته باشید که نوشته‌ایم: $|x-a| > 0$ و این بدان معناست که $x \neq a$ است لذا حد یک تابع در نقطه‌ی a به مقادیر نزدیک a بستگی دارد نه به خود a، بنابراین شرط اولیه‌ی وجود حد یک تابع در یک نقطه، آن است که آن تابع در یک همسایگی محذوف (بدون مرکز) آن نقطه تعریف شده باشد.

مثال: $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}$ موجود نیست، زیرا $f(x) = \sqrt{x}$، در هیچ همسایگی محذوف a تعریف نشده است. در واقع x نمی‌تواند از سمت چپ به ۰ میل کند.

اکنون برای درک بهتر مفهوم حد به مثال زیر توجه کنید.

مثال: فرض کنید راننده‌ای بخواهد سرعت یک اتومبیل را به ۱۰۰km/h برساند، تنظیم سرعت اتومبیل، مستقیماً در

دسترس او نیست و در واقع تابع فشاری است که وی برروی پدال گاز وارد می‌کند و پدال گاز نیز در زیـر پـای اوست، بنابراین او می‌تواند میزان فشار روی پدال گاز را طوری تنظیم کند که سرعت اتومبیل تقریباً ۱۰۰km/h شود.

تذکر: اینکه مقدار یک حد مانند $\lim_{x \to 1} (3x+2)$، برابر ۵ است یک مقوله است و اینکه چرا مقدار حد برابر ۵ است، مقوله‌ای دیگر، بحث اول، یک بحث محاسباتی و بحث دوم یک بحث اثباتی است. و در واقع در مقوله‌ی دوم، ثابت می‌شود که چرا $\lim_{x \to 1} (3x+2)$، برابر ۵ است.

برای اثبات اینکه تابعی در یک نقطه مانند a حدی برابر l دارد، از تعریف حد (فرمول *) استفاده مـی‌کنیم، بـا اسـتفاده از تعریف حد، چون $\varepsilon > 0$ دلخواه است ابتدا $\varepsilon > 0$ را دلخواه و آنرا از این به بعد در تمام مراحل اثبات ثابت فرض نموده، سپس ثابت می‌کنیم که حداقل یک $\delta > 0$ (که معمولاً به ε بستگی دارد)، وجود دارد به طوریکه از نامساوی $0 < |x-a| < \delta$، نامساوی $|f(x)-l| < \varepsilon$ نتیجه می‌شود، به عبارت دیگر، گزاره‌ی شرطی $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$، به ازاء آن درست می‌باشد. برای یافتن $\delta > 0$ فرض می‌کنیم گزاره‌ی شرطی فوق درست باشد (مسأله را حل شده فرض مـی‌کنیم)، سپس از نامساوی $|f(x)-l| < \varepsilon$، عبارت $|x-a|$ را بیرون کشیده و با توجه به نامساوی $0 < |x-a| < \delta$، δ را به دست می‌آوریم.

مثال: با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{x \to 1} (3x+2) = 5$$

$$\varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x (0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |3x+2-5| < \varepsilon)$$

$$|3x-3| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

حال برای اینکه $\delta > 0$ را اختیار کنیم کافی است آنرا طوری اختیار کنیم که بتوان از نامساوی $0 < |x-1| < \delta$، نامساوی $|x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$ و در نتیجه طبق اینکه روابط فوق برگشپذیرند، نامساوی $|f(x)-5| < \varepsilon$ را نتیجه بگیریم، لذا برای اینکه گزاره‌ی شرطی

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |3x+2-5| < \varepsilon$$

درست باشد، لازم است گزاره‌ی شرطی

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$$

درست باشد، که در این حالت کافی است $0 < \delta \le \frac{\varepsilon}{3}$ اختیار کنیم.

نکته: هرگاه بخواهیم از نامساوی $x < a$ نامساوی $x < b$ را نتیجه بگیریم، کافی است a را کوچکتر یا مساوی b اختیار کنیم. در این صورت است که هر عددی که کوچکتر از a، باشد از b نیز کوچکتر است.

$$x < a \overset{a \le b}{\Rightarrow} x < b$$

در واقع در انتخاب δ، از نکته‌ی فوق استفاده کرده‌ایم.

تست: در تابع $f(x) = \frac{x^2+2x-8}{3x-6}$، وقتی که $0 < |x-2| < \delta$ است، مقادیر f(x) در فاصله‌ی (۲/۱۲ و ۱/۸۸) قرار می‌گیرند، بزرگترین مقدار δ کدام است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۰/۳۶ ۴) ۰/۴

$\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x\ (0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^2 + 2x - 8}{3x - 6} - 2\right| < \varepsilon)$

$\left|\frac{(x-2)(x+4)}{3(x-2)} - 2\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x+4}{3} - 2\right| < 0/12 \Rightarrow 0 < |x - 2| < 0/36$

لذا کافی است $0 < \delta \le 0/36$ و $Max(\delta) = 0/36$

تست: هرگاه به ازاء هر x داشته باشیم: $0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{x^2 - \lfloor x + \frac{1}{2}\rfloor}{x - 1} - 2\right| < \frac{1}{10}$ **مقدار δ کدام است؟**

۱) $\frac{1}{5}$　۲) $\frac{1}{8}$　۳) $\frac{1}{10}$　۴) $\frac{9}{20}$

$x \to 1 \Rightarrow \left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow |x + 1 - 2| < \frac{1}{10} \Rightarrow |x - 1| < \frac{1}{10}$

$\Rightarrow |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 1| < \frac{1}{10} \Rightarrow \delta \le \frac{1}{10}$　بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

نکته: هرگاه تابع دو ضابطه‌ای باشد، تعریف حد را برای تابع نوشته، به جای f(x)، یک بار ضابطه‌ی اول و بار دیگر ضابطه‌ی دوم را قرار داده و سپس δ را برابر Min مقادیر به دست آمده و یا حتی کوچکتر از آن اختیار می‌کنیم.

تست: در تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2-1}{2x-1} & ,(x > 1) \\ 5x - 2 & ,(x \le 1) \end{cases}$، **اگر** $0 < |x - 1| < \delta$ **آنگاه فاصله‌ی f(x) از ۳، کمتر از ۰/۰۱ است، یعنی** $|f(x) - 3| < 0/01$، **بزرگترین مقدار δ کدام است؟**

۱) ۰/۰۰۲　۲) ۰/۰۰۵　۳) ۰/۰۲　۴) ۰/۰۵

$\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x\ (0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < 0/01)$

$$\begin{cases} \left|\frac{4x^2-1}{2x-1} - 3\right| < 0/01 \Rightarrow |2x + 1 - 3| < 0/01 \Rightarrow |x - 1| < 0/005 \Rightarrow \delta \le 0/005 \\ |5x - 2 - 3| < 0/01 \Rightarrow |x - 1| < 0/002 \Rightarrow \delta \le 0/002 \end{cases}$$

$0 < \delta \le Min\{0/002 , 0/005\} \Rightarrow 0 \le \delta \le 0/002 \Rightarrow Max(\delta) = 0/002$

تذکر: در برخی از موارد، ممکن است هنگامیکه می‌خواهیم عامل مراحم $|x-a|$ را از نامساوی $|f(x)-l| < \varepsilon$ بیرون بکشیم، علاوه بر $|x-a|$، عامل مزاحمی همچون g(x) نیز به دست آید، در این گونه موارد با توجه به اینکه $x \to a$ میل می‌کند، یک همسایگی به مرکز a و به شعاع r اختیار کرده، با توجه به این همسایگی، یک کران بالا مانند M و یک کران پائین مانند N برای g(x) به دست می‌آوریم، در این حالت داریم: $|g(x)| < Max\{|M| , |N|\}$

$|f(x) - l| < |x - a|\ |g(x)|$

اکنون برای اینکه نامساوی $|f(x)-l| < \varepsilon$ برقرار باشد، کافی است نامساوی $|x-a|\ |g(x)| < \varepsilon$ برقرار باشد و از آنجا δ را به صورت زیر اختیار می‌کنیم.

$0 < \delta \le Min\ \{r, \frac{\varepsilon}{Max\{|M|, |N|\}}\}$

مثال: وقتی که $|x-۳| < ۱$، کرانهای بالا و پائین عبارت $\frac{x}{x^۲+x+۲}$ را بیابید؟

$|x-۳| < ۱$

$۲ < x < ۴ \qquad (۱)$

$$۲ < x < ۴ \Rightarrow \begin{cases} ۴ < x^۲ < ۱۶ \\ ۲ < x < ۴ \end{cases} \Rightarrow ۶ < x^۲ + x < ۲۰ \Rightarrow ۸ < x^۲ + x + ۲ < ۲۲$$

$$\Rightarrow ۸ < |x^۲+x+۲| < ۲۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲۲} < \frac{۱}{x^۲+x+۲} < \frac{۱}{۸} \qquad (۲)$$

حال طرفین روابط (۱) و (۲) را در هم ضرب می‌کنیم:

$$\underset{\text{کران پائین}}{\frac{۱}{۱۱}} < \frac{x}{x^۲+x+۲} < \underset{\text{کران بالا}}{\frac{۱}{۲}}$$

نکته‌ی بسیار مهم: برای یافتن سریع کران بالا برای عبارت کسری داده شده، به جای x در صورت بیشترین مقدار و در مخرج کمترین مقدار موجود در فاصله‌ی $۲ < x < ۴$ را قرار دهید.

$$\left|\frac{x}{x^۲+x+۲}\right| < \frac{۴}{۴+۲+۲} = \frac{۱}{۲}$$

(برای کران پائین برعکس عمل کنید.)

مثال: با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{x \to ۲} x^۳ = ۸$$

$$\varepsilon > ۰ \ \exists \delta > ۰ : \forall x \ (۰ < |x-۲| < \delta \Rightarrow |x^۳-۸| < \varepsilon) \Rightarrow |x-۲|\ |x^۲+۲x+۴| < \varepsilon$$

$|x-۲| < ۱$

$۱ < x < ۳ \Rightarrow |x^۲+۲x+۴| < ۱۹$ (به جای x، بیشترین مقدار، یعنی ۳ را قرار داده‌ایم)

$$|x-۲|\ |x^۲+۲x+۴| < ۱۹|x-۲| < \varepsilon \Rightarrow |x-۲| < \frac{\varepsilon}{۱۹}$$

حال برای اینکه حکم برقرار باشد، کافی است $۰ < \delta \leq \text{Min}\{۱, \frac{\varepsilon}{۱۹}\}$

امتحان مسأله: فرض می‌کنیم $۰ < |x-۲| < \delta$ برقرار باشد باید ثابت کنیم $|x^۳-۸| < \varepsilon$

$$۰ < |x-۲| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |x-۲| < ۱ \\ |x-۲| < \frac{\varepsilon}{۱۹} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x^۲+۲x+۴| < ۱۹ \\ |x-۲| < \frac{۴}{۱۹} \end{cases}$$

این دو نامساوی را در هم ضرب می‌کنیم. $|x^۳-۸| < \varepsilon$

نکته‌ی مهم: هنگامیکه $x \to a$ میل می‌کند، مقدار x آن قدر به a نزدیک است که می‌توان x و a را تقریباً مساوی یکدیگر در نظر گرفت، بنابراین اگر تابع به صورتی باشد که به ازاء xهای نزدیک a، مقدار آن فرقی نکند، آنگاه کافی است برای محاسبه‌ی $\lim_{x \to a} f(x)$ مقدار a را به جای متغیر x در تابع قرار دهیم، البته توجه کنید که در حالت کلی $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ است.

در فصول بعدی، خواهید دید که در توابعی که پیوسته باشند، تساوی $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ برقرار است در این گونه توابع، می‌توان برای محاسبه‌ی $\lim_{x \to a} f(x)$، $f(a)$ را حساب کنید.

در واقع هرگاه $y = f(x)$ و $a \in D_f$ و تابع f در نقاط اطراف a (یا در همسایگی a) دو ضابطه‌ای نباشد، آنگاه برای محاسبه‌ی حد چپ و راست و حد تابع f در نقطه‌ی a، کافی است مقدار a را در تابع قرار داده تا حد به دست آید، زیرا در این حالت تفاوت بین a و a^+ و a^- آنقدر ناچیز است که می‌توان آنها را یکی گرفت، در واقع برای محاسبه‌ی $\lim_{x \to ۱} (۳x + ۲)$، چون $f(x) = ۳x + ۲$ و $D_f = R$ و $۱ \in D_f$ لذا $\lim_{x \to ۱} f(x) = f(۱) = ۵$، اما اگر a در دامنه‌ی تابع نباشد، آنگاه برای محاسبه‌ی حد چپ و راست و حد تابع، کافی است نقاط حوالی a (نزدیک به a) را که در دامنه‌ی تابع قرار دارند، در ضابطه‌ی تابع قرار دهیم تا حد چپ و راست و در نتیجه حد تابع در صورت وجود به دست آیند.

مثال: $\lim_{x \to ۱} \frac{x^۲ - x}{x^۳ - x}$ **را حساب کنید؟**

حل: چون $۱ \notin D_f$، لذا حد چپ و راست را حساب می‌کنیم.

حد راست $\lim_{x \to ۱^+} \frac{x(x-۱)}{x(x-۱)(x+۱)} = \lim_{x \to ۱^+} \frac{۱}{x+۱} = \frac{۱}{۲}$

حد چپ $\lim_{x \to ۱^+} \frac{x(x-۱)}{x(x-۱)(x+۱)} = \lim_{x \to ۱^-} \frac{۱}{x+۱} = \frac{۱}{۲}$

چون تابع، هم حد چپ و هم حد راست دارد و این دو حد، با هم برابرند، لذا تابع در نقطه‌ی $x = ۱$ حد دارد و $\lim_{x \to ۱} f(x) = \frac{۱}{۲}$

جهت محاسبه‌ی حد توابع مختلف از قضایای زیر (قضایای حد) استفاده می‌کنند. در کلیه‌ی قضایای زیر l و a دو عدد حقیقی‌اند.

۱: حد هر تابع در هر نقطه، در صورت وجود یکتاست.

۲: تابع f در نقطه‌ی a حد دارد اگر و فقط اگر که در این نقطه هم حد چپ داشته باشد و هم حد راست و این دو حد با یکدیگر برابر باشند.

۳: حد تابع ثابت $f(x) = c$ در هر نقطه مانند a، برابر خودش یعنی c می‌باشد. $\lim_{x \to a} c = c$

۴) هرگاه $\lim_{x \to a} f(x) = l_۱$, $\lim_{x \to a} g(x) = l_۲$ آنگاه:

الف) $\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = l_۱ \pm l_۲$

ب) $\lim_{x \to a} f(x) g(x) = l_۱ l_۲$

ج) $\lim_{x \to a} cf(x) = cl_۱$

د) $\lim_{x \to a} \frac{۱}{g(x)} = \frac{۱}{l_۲} \quad , (l_۲ \neq ۰)$

ه) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \quad ,(l_2 \neq 0)$

۵) هرگاه $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ و $n \in N$ آنگاه $\lim\limits_{n \to a} (f(x))^n = (\lim\limits_{n \to \infty} f(x))^n = l^n$ بالاخص $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$

۶) هرگاه $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ و $n \in N$ آنگاه:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{l}$$

اگر n زوج باشد، باید $\sqrt[n]{f(x)}$ در همسایگی a تعریف شده باشد به عبارت دیگر $f(x) > 0$ باشد.

۷) هرگاه $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ آنگاه:

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = \left| \lim_{x \to a} f(x) \right| = |l|$$

عکس قضیه‌ی فوق در حالت کلی برقرار نیست به عنوان مثال تابع $f(x) = \begin{cases} 2 & ,(x \geq 1) \\ -2 & ,(x < 1) \end{cases}$ در $x = 1$ حد ندارد ولی قدر مطلقش یعنی $|f(x)| = 2$ در $x = 1$ حد دارد و حدش برابر ۲ است.

۹) **تبصره:** عکس قضیه‌ی فوق در حالتی که $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = 0$ باشد برقرار است، در این حالت نتیجه می‌شود $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

۱۰) $\lim\limits_{x \to a} (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) = b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \dots + b_1 a + b_0$

۱۱) هرگاه $y = f(x)$ در هر نقطه حد داشته باشد و این حد متناهی باشد، $f(x)$ محدود است.

تعریف: تابع $y = f(x)$ را محدود یا کراندار گویند، هرگاه عددی حقیقی و مثبت مانند M یافت شود به طوریکه به ازاء هر x، $|f(x)| \leq M$، به عنوان مثال $y = \sin x$ محدود (کراندار) است زیرا $|\sin x| \leq 1$.

تذکر: عکس قضیه‌ی فوق در حالت کلی برقرار نیست، یعنی اگر تابعی محدود باشد نمی‌توان نتیجه گرفت که حد دارد به عنوان مثال تابع $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ محدود است ولی در نقطه‌ی $x = 0$ حد ندارد)

۱۲) اگر در یک همسایگی محذوف a , $f(x) \leq g(x)$ و $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l_1$ و $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l_2$، آنگاه $l_1 \leq l_2$

۱۳) هرگاه $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ و تابع g در یک همسایگی محذوف a، کراندار باشد، آنگاه $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = 0$

مثال: $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0 \times$ کراندار $= 0$

۱۴) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a \\ \lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a \end{cases}$

۱۵) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} \tan x = \tan a & ,(a \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in z) \\ \lim\limits_{x \to a} \cot x = \cot a & ,(a \neq k\pi, k \in z) \end{cases}$

تذکر:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{+}}\tan x=-\infty & \text{(ربع دوم)}\\ \lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{-}}\tan x=+\infty & \text{(ربع اول)}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\cot x=+\infty & \text{(ربع اول)}\\ \lim\limits_{x\to\pi^{-}}\cot x=-\infty & \text{(ربع دوم)}\end{cases}$$

تذکر: هرگاه دامنه‌ی تابع f به صورت [a,b] باشد، تابع f در نقاط a و b حد ندارد در واقع در نقطه‌ی b، حد راست و در نقطه‌ی a، حد چپ ندارد.

۱۶)

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}\text{Arcsin}x=\text{Arcsin}a\\ \lim\limits_{x\to a}\text{Arccos}x=\text{Arccos}a\end{cases}\quad(-۱<a<۱)$$

تذکر:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^{-}}\text{Arcsin}x=\frac{\pi}{۲} & \text{(در واقع } (\frac{\pi}{۲})^{-})\\ \lim\limits_{x\to ۱^{+}}\text{Arcsin}x= & \text{(تعریف نشده) موجود نیست}\\ \lim\limits_{x\to(-۱)^{+}}\text{Arcsin}x=-\frac{\pi}{۲} & \text{(در واقع } (-\frac{\pi}{۲})^{+})\\ \lim\limits_{x\to(-۱)^{-}}\text{Arcsin}x= & \text{(تعریف نشده) موجود نیست}\end{cases}$$

(یادآوری: $-\frac{\pi}{۲}\le\text{Arcsin}x\le\frac{\pi}{۲}$ **)**

در مورد حد تابع y = Arccosx، در نقاط ۱ و ۱-، خودتان بحث کنید.

۱۷)

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}\text{Arctan}x=\text{Arctan}\,a\\ \lim\limits_{x\to a}\text{Arccot}x=\text{Arccot}a\end{cases}\quad,(a\in R)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\text{Arctan}x=\frac{\pi}{۲} & \text{(در واقع } (\frac{\pi}{۲})^{-})\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\text{Arctan}x=-\frac{\pi}{۲} & \text{(در واقع } (-\frac{\pi}{۲})^{+})\end{cases}$$

یادآوری: $-\frac{\pi}{۲}\le\text{Arctan}x\le\frac{\pi}{۲}$

در مورد حد تابع y = Atccotx، خودتان بحث کنید.

۱۸)

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}\log_b^x=\log_b^a\\ \lim\limits_{x\to a}\text{Ln}\,x=\text{Ln}a\end{cases}\quad(۰<b\neq ۱,a>۰)$$

۱۹) قضیه‌ی ساندویچ (قضیه فشردگی): هرگاه در یک همسایگی مخذوف a، داشته باشیم

$h(x)\le f(x)\le g(x)$, $\lim\limits_{x\to a}h(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=l$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$ است.

تست: هرگاه $x\in(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ **باشد و** $۶-\cos^۲x\le f(x)\le ۵+x^۲$**، حاصل** $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱}{f(x)}$ **کدام است؟**

۱) ۵ ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۰

حل: $\lim\limits_{x\to 0}(5+x^2)=\lim\limits_{x\to 0}(6-\cos^2 x)=5$ طبق ساندویچ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=5 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{5}$

تست: فرض می‌کنیم برای هر x **عضو** R**، داشته باشیم:** $|f(x)-3| \le (x-2)^2$، $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۳ ۴) ۵

$|f(x)-3|<(x-2)^2 \Rightarrow -(x-2)^2 \le f(x)-3 \le (x-2)^2$

طبق قضیه‌ی ساندویچ داریم: $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)-3)=0$ و لذا $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$

۲۰) هرگاه f تابعی فرد باشد و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=l$، آنگاه $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-l$

نتیجه: اگر f تابعی فرد باشد و در $x=0$، حد داشته باشد، آنگاه حدش در این نقطه صفر است. زیرا:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \Rightarrow l=-l \Rightarrow 2l=0 \Rightarrow l=0$

۲۱) هرگاه f تابعی زوج باشد و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=l$ در این صورت $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=l$

نتیجه: اگر f تابعی زوج باشد و در $x=0$، از یک طرف حد داشته باشد، آنگاه در $x=0$ حد دارد.

۲۲) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$ (x برحسب رادیان است)

۲۳) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1$ (x برحسب رادیان است)

۲۴) هرگاه f در a حد داشته باشد و g در a حد نداشته باشد آنگاه $f\pm g$ در a حد نخواهد داشت، در این حالت حد حاصلضرب f و g و تقسیم آنها مشخص نیست.

۲۵) هرگاه f و g هر دو در a حد نداشته باشند، آنگه $f\pm g$، fg، $\frac{f}{g}$ ممکن است در a حد داشته باشند و یا حد نداشته باشند.

حد یک طرفه:

تعریف حد راست: تابع $y=f(x)$ و نقطه‌ی a، مفروض‌اند، فرض می‌کنیم تابع در همسایگی راست a تعریف شده باشد، گوئیم تابع f در نقطه‌ی a، دارای حد راستی برابر عدد حقیقی l است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$ اگر و فقط اگر که داشته باشیم:

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x\ (0<x-a<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon)$

مثال: با استفاده از تعریف حد راست، ثابت کنید:

$\lim\limits_{x\to 5^+}\sqrt{2x-10}=0$

$\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \quad :\forall x\,(0<x-5<\delta \quad \Rightarrow |\sqrt{2x-10}-0|<\varepsilon \Rightarrow \sqrt{2x-10}<\varepsilon \Rightarrow 2x-10<\varepsilon^2$

$0<x-5<\frac{\varepsilon^2}{2}$

لذا کافی است $0<\delta \le \frac{\varepsilon^2}{2}$ اختیار شود.

$0<x-5<\delta \quad \Rightarrow 0<x-5<\frac{\varepsilon^2}{2}$

تعریف حد چپ: تابع $y=f(x)$ و نقطه‌ی a مفروض‌اند، فرض می‌کنیم تابع در یک همسایگی چپ a، تعریف شده باشد، گوئیم تابع f در نقطه‌ی a دارای حد چپی برابر عدد حقیقی l است و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$ اگر و فقط اگر که داشته باشیم:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x\ (-\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

مثال: با استفاده از تعریف حد چپ ثابت کنید:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-1}{|x-1|} = -2$$

$$\varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x\ (-\delta < x - 1 < 0 \Rightarrow |\frac{x^2-1}{x-1} + 2| < \varepsilon)$$

$$\left| \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} + 2 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| -(x+1) + 2 \right| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \varepsilon \Rightarrow -(x-1) < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x-1 < 0$$

$$\Rightarrow -\delta < x-1 < 0 \Rightarrow -\varepsilon < x-1 < 0$$

لذا کافی است $0 < \delta \leq \varepsilon$ اختیار شود.

مفهوم حد در بی‌نهایت $(x \to \pm\infty)$:

یادآوری: $x \to +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : x > M$

۱ـ تعریف: فرض می‌کنیم تابع f در هر نقطه از بازه‌ی $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، گوئیم حد تابع f وقتی که $x \to +\infty$، برابر عدد حقیقی l است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

اگر و فقط اگر که داشته باشیم:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 : \forall x\ (x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

تذکر و یادآوری: تعریف حد دنباله‌ها، حالت خاصی از این تعریف است با این تفاوت که در آنجا $M \in N$ بود.

۲ـ به همین ترتیب:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 : \forall x\ (x < -M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

مثال: با استفاده از تعریف حد، ثابت کنید:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$$

$$\varepsilon > 0\ \exists M > 0 : \forall x\ (x > M \Rightarrow |\frac{2x+1}{x-1} - 2| < \varepsilon)$$

$$\left| \frac{2x+1-2x+2}{x-1} \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{|x-1|} < \varepsilon \Rightarrow \frac{3}{x-1} < \varepsilon$$

$$x - 1 > \frac{3}{\varepsilon} \Rightarrow x > 1 + \frac{3}{\varepsilon}$$

(چون $x \to +\infty$ میل می‌کند، لذا $x > 1$ و بنابراین $x-1$ مثبت است)

$$x > M \Rightarrow x > 1 + \frac{3}{\varepsilon}$$

لذا کافی است $M \geq 1 + \frac{3}{\varepsilon}$ اختیار کنیم.

نکته: هرگاه بخواهیم از نامساوی $x > a$ نامساوی $x > b$ را نتیجه بگیریم، کافی است a را بزرگتر یا مساوی b اختیار کنیم، در این صورت است که هر عددی که بزرگتر از a باشد از b نیز بزرگتر است.

در واقع در انتخاب M، از نکته‌ی فوق استفاده کرده‌ایم. $x > a \overset{a\geq b}{\Rightarrow} x > b$

مفهوم حد بی‌نهایت (حد نامتناهی) (حدی که $+\infty$ یا $-\infty$ می‌شود):

۱) تعریف: فرض می‌کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a، تعریف شده باشد، گوئیم حد تابع f، هنگامیکه $x \to a$ میل می‌کند، برابر $+\infty$ است و می‌نویسیم: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ اگر و فقط اگر که داشته باشیم:

$$\forall N > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x\,(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M)$$

۲) به همین ترتیب:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x\,(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M)$$

تذکر: دو تعریف فوق، برای حدود چپ و راست نیز برقرارند.

مثال: با استفاده از تعریف حد، ثابت کنید: $\lim_{x \to 1} \frac{-2}{(x-1)^2} = -\infty$

$$N > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x\,(0 < |x-1| < \delta \Rightarrow \frac{-2}{(x-1)^2} < -N)$$

$$\frac{2}{(x-1)^2} > N \Rightarrow (x-1)^2 < \frac{2}{N} \Rightarrow |x-1| < \sqrt{\frac{2}{N}}$$

$$0 < |x-1| < \delta \Rightarrow 0 < |x-1| < \sqrt{\frac{2}{N}}$$

لذا کافی است $0 < \delta \leq \sqrt{\frac{2}{N}}$ اختیار شود.

مثال: با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{x \to 0^+} (1 - 2^{\frac{1}{x}}) = -\infty$$

$$N > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x\,(0 < x < \delta \Rightarrow 1 - 2^{\frac{1}{x}} < -N) \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} - 1 > N$$

$$2^{\frac{1}{x}} > 1 + N \Rightarrow \frac{1}{x} > \log_2^{(1+N)} \Rightarrow x < \log_{1+N}^{2}$$

$$\Rightarrow 0 < x < \delta \Rightarrow 0 < x < \log_{1+N}^{2}$$

لذا کافی است $0 < \delta \leq \log_{1+N}^{2}$ اختیار شود.

تلفیق حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت: تعاریف زیر را مستقیماً بیان می‌کنیم:

۱) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists M > 0 : \forall x\,(x > M \Rightarrow f(x) > N)$

۲) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists M > 0 : \forall x\,(x < -M \Rightarrow f(x) > N)$

۳) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists M > 0 : \forall x\,(x > M \Rightarrow f(x) < -N)$

۴) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists M > 0 : \forall x\,(x < -M \Rightarrow f(x) < -N)$

مثال: با استفاده از تعریف حد، ثابت کنید:

$$\lim_{x\to -\infty}(-x^۲-۴x+۷)=-\infty$$

$$N>۰\ \exists M>۰:\ \forall x\,(x<-M \Rightarrow -x^۲-۴x+۷<-N)$$

$$x^۲+۴x-۷>N \Rightarrow (x+۲)^۲-۱۱>N \Rightarrow |x+۲|>\sqrt{N+۱۱}$$

$-x-۲>\sqrt{N+۱۱} \Rightarrow$ (چون $x \to -\infty$ میل می‌کند لذا $x<-۲$ بوده و بنابراین $x+۲<۰$ است)

$$-x>۲+\sqrt{N+۱۱} \Rightarrow x<-(۲+\sqrt{N+۱۱})$$

$$\Rightarrow x<-M \Rightarrow x<-(۲+\sqrt{N+۱۱})$$

لذا کافی است $M\geq ۲+\sqrt{N+۱۱}$ اختیار شود.

تست: برای تابع $f(x)=\frac{۱}{x^n}$ $(n\in N)$، داریم $\lim_{x\to +\infty} f(x)=۰$، با استفاده از تعریف حد، مقدار M، بر حسب ε کدام است؟

۱) $M\geq \varepsilon^n$ ۲) $M\geq\frac{۱}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$ ۳) $M\geq\frac{۱}{n\varepsilon}$ ۴) $M\geq\frac{۱}{\varepsilon^n}$

$$\varepsilon>۰\ \exists M>۰:\forall x\,(x>M \Rightarrow \left|\frac{۱}{x^n}-۰\right|<\varepsilon)$$

$$\frac{۱}{|x|^n}<\varepsilon \Rightarrow |x|^n>\frac{۱}{\varepsilon} \Rightarrow |x|>\frac{۱}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$$

$x>\frac{۱}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$ (چون $x\to +\infty$ میل می‌کند پس $x>۰$ است)

$$\Rightarrow x>M \Rightarrow x>\frac{۱}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$$

لذا کافی است $M\geq\frac{۱}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$ اختیار شود.

تست: عبارت $\forall N>۰\ \exists M>۰:(x>M \Rightarrow f(x)<-N)$ معادل است با:

۱) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$ ۲) $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ ۳) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ ۴) $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۴ است.

تست: هرگاه عبارت $\forall N>۰\ \exists\delta>۰:\forall x\,(۰<x-a<\delta \Rightarrow f(x)<-N)$ همواره برقرار باشد، کدام نتیجه‌ی زیر، از آن گرفته می‌شود؟

۱) $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ ۲) $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ ۳) $\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ۴) $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۴ می‌باشد.

تعاریف حد در حالت مختلف:

در کلیه تعاریف زیر:

۱) a و l اعداد حقیقی می‌باشند.

۲) n عددی طبیعی می‌باشد.

۳) منظور از ∞ ، $+\infty$ یا $-\infty$ می‌باشد.

۴) ε و δ اعداد مثبت بسیار کوچک می‌باشند.

۵) M و N اعداد مثبت بسیار بزرگ می‌باشند.

۶) تعریف حد دنباله‌ها، یعنی تعریف شماره‌ی (۱)، حالت خاصی از تعریف حد در بی‌نهایت (تعریف شماره‌ی ۱۲) می‌باشد.

۱) $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M \in N \quad : \forall n \in N (n > M \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon)$

۲) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad : \forall x\ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

۳) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad : \forall x\ (-\delta < x - a < 0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

۴) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad : \forall x\ (0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

۵) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists \delta > 0 \quad : \forall x\ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > N)$

۶) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists \delta > 0 \quad : \forall x\ (-\delta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) > N)$

۷) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists \delta > 0 \quad : \forall x\ (0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) > N)$

۸) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists \delta > 0 \quad : \forall x\ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -N)$

۹) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists \delta > 0 \quad : \forall x\ (-\delta < x - a < 0 \Rightarrow f(x) < -N)$

۱۰) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists \delta > 0 \quad : \forall x\ (0 < x - a < \delta \Rightarrow f(x) < -N)$

۱۱) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 \quad : \forall x\ (x < -M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

۱۲) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 \quad : \forall x\ (x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

۱۳) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 \quad : \forall x\ (|x| > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

۱۴) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \forall x\ (x < -M \Rightarrow f(x) > N)$

۱۵) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \forall x\ (x > M \Rightarrow f(x) > N)$

۱۶) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \forall x\ (|x| > M \Rightarrow f(x) > N)$

۱۷) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \forall x\ (x < -M \Rightarrow f(x) < -N)$

۱۸) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \forall x\ (x > M \Rightarrow f(x) < -N)$

۱۹) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \forall x\ (|x| > M \Rightarrow f(x) < -N)$

۲۰) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists \delta > 0 \quad : \forall x\ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > N)$

۲۱) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \forall x\ (x < -M \Rightarrow |f(x)| > N)$

۲۲) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \forall x\ (x > M \Rightarrow |f(x)| > N)$

۲۳) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \forall x\ (|x| > M \Rightarrow |f(x)| > N)$

تست: در تابع $f(x) = \frac{2}{x-1}$، برای اینکه $f(x) > 200$ باشد، x باید در کدام فاصله‌ی زیر، قرار داشته باشد؟

۱) $(1, 1/01)$ ۲) $(0/99, 1/01)$ ۳) $(0/99, 1)$ ۴) $(0/99, 1) \cup (1, 1/01)$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2}{x-1} = +\infty$$

$$N > 0 \quad \delta > 0 \quad : \forall x \,(0 < x - 1 < \delta \;\Rightarrow \frac{2}{x-1} > N)$$

در اینجا $N = 200$ است و بنابراین داریم:

$$\frac{2}{x-1} > 200 \;\Rightarrow\; x - 1 < \frac{1}{100} \;\Rightarrow\; 1 < x < 1/01$$

(توجه داشته باشید که چون $x \to 1^+$ لذا $x > 1$ است)

قاعده‌ی هوپیتال (لوپتیال):

قضیه: فرض کنید توابع f و g روی بازه‌ی بازی شامل نقطه‌ی a، مشتق‌پذیر باشند و مشتق تابع g در این بازه (به جز احتمالاً در نقطه‌ی a) مخالف صفر باشد و داشته باشیم: $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ (یعنی مبهم $= \frac{\text{صفر نسبی}}{\text{صفر نسبی}} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$) در این صورت اگر $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ آنگاه $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

توضیح: هرگاه حد یک کسر به صورت مبهم $\frac{\text{صفر نسبی}}{\text{صفر نسبی}}$ در آید برای رفع ابهام آن با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \begin{cases} l & \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l \\ \frac{\text{صفر نسبی}}{\text{صفر نسبی}} \overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} & = \begin{cases} l \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l \\ \frac{\text{صفر نسبی}}{\text{صفر نسبی}} \quad \overset{HOP}{\Rightarrow} \;.... \end{cases} \end{cases}$$

مثال: مطلوبست محاسبه‌ی حدود زیر:

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$$

راه اول:

$$\frac{\text{صفر نسبی}}{\text{صفر نسبی}} \Rightarrow \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(x + 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \to 4} \frac{(x - 4)}{(x - 4)(x + 4)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{(x + 4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{32}$$

راه دوم: (قاعده‌ی هوپیتال)

$$\overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x \to 4} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x} = \frac{\frac{1}{4}}{8} = \frac{1}{32}$$

مثال: $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{x+1}-3}{\sqrt[3]{x}-2}$

راه اول: $\dfrac{0}{0} \lim\limits_{x \to 8} \dfrac{(\sqrt{x+1}-3)(\sqrt{x+1}+3)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)(\sqrt{x+1}+3)}$

$$= \lim_{x \to 8} \frac{(x+1-9)(...)}{(x-8)(...)} = \lim_{x \to 8} \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{x+1}+3} = \frac{4+4+4}{3+3} = 2$$

راه دوم: (قاعده‌ی هوپیتال) $\overset{HOP}{\Rightarrow} \lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{12}} = 2$

تذکر ۱: وقتی که $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ نیز به صورت مبهم $\dfrac{0}{0}$ در آید، می‌توانیم بار دیگر به شرط برقراری شرایط از قاعده‌ی هوپیتال، استفاده کنیم و این عمل را آن قدر ادامه دهیم تا عبارت از صورت مبهم $\dfrac{0}{0}$ در آید.

مثال: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4-2x^3+x^2}{x^3-3x+2} = \dfrac{0}{0} =$ مبهم

$$\overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x \to 1} \frac{4x^3-6x^2+2x}{3x^2-3} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x \to 1} \frac{12x^2-12x+2}{6x} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$$

تذکر ۲: قاعده‌ی هوپیتال برای حد چپ و راست نیز برقرار است.

تذکر ۳: قاعده‌ی هوپیتال را می‌توان برای رفع ابهام صورت مبهم $\dfrac{\infty}{\infty}$ نیز به کار برد.

تذکر ۴: قضیه‌ی هوپیتال برای حد در بی‌نهایت (یعنی هنگامیکه $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ میل می‌کند) نیز برقرار است.

تست: حاصل $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$ **کدام است؟**

۱) 0 ۲) $+\infty$ ۳) ۱ ۴) موجود نیست.

$$\frac{\infty}{\infty} \overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$... \overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{e^x} = \frac{n!}{\infty} = \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$$

تذکر ۵: استفاده از این قاعده، در اکثر موارد، کارآئی لازم را دارد، البته در برخی از موارد هم نمی‌توان از این قاعده استفاده کرد.

مثال: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \dfrac{\text{عدد} \times 0\ \text{نسبی}}{0\ \text{نسبی}} = \dfrac{0\ \text{نسبی}}{0\ \text{نسبی}}$

$\overset{HOP}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\sin\frac{1}{x} + x^2(-\frac{1}{x^2})\sin\frac{1}{x}}{\cos x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}}{\cos x}$

چون حد صورت وجود ندارد (در واقع $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ وجود ندارد) مجاز به استفاده از قاعده‌ی هوپیتال نیستیم.

راه حل صحیح به صورت زیر است:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} \times \lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

$= 1 \times (\text{کراندار} \times 0\ \text{نسبی}) = 1 \times 0\ \text{نسبی} = 0$

تذکر ۶: اگر کسر پس از استفاده از قاعده‌ی هوپیتال، از حالت مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ در آمد، دیگر نه لزومی دارد که از قاعده‌ی HOP استفاده کنیم و نه مجاز به استفاده از آن هستیم.

تذکر ۷: همانطوریکه قبلاً بیان شد، این قاعده فقط برای رفع ابهام صور مبهم $\frac{0\ \text{نسبی}}{0\ \text{نسبی}}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ می‌باشد. جهت رفع ابهام صورت مبهم دیگر، بایستی ابتدا آنها را به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کرده و سپس در صورت برقراری شرایط، از قاعده‌ی هوپیتال استفاده کنیم.

تذکر ۸: از این قاعده برای اثبات برخی از هم ارزیها و حتی پیدا کردن تابع هم ارز یک تابع می‌توان استفاده کرد که بحث در این مورد را به بحث هم ارزی موکول می‌کنیم.

تست: **حاصل** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[5]{x}}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{3}{10}$ ۳) $\frac{10}{3}$ ۴) $\frac{3}{5}$

$\dfrac{0\ \text{نسبی}}{0\ \text{نسبی}} \overset{HOp}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}} = \dfrac{10}{3}$

تست: **حاصل** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - nx + n - 1}{(x-1)^2}$ **کدام است؟** $(n \in N)$

۱) $\frac{n(n-1)}{2}$ ۲) $\frac{n(n+1)}{2}$ ۳) $\frac{(n-1)(n+1)}{2}$ ۴) $n(n+1)$

$\frac{\text{۰ نسبی}}{\text{۰ نسبی}} \overset{HOp}{\Rightarrow} \lim_{x\to ۱} \frac{nx^{n-۱}-n}{۲(x-۱)} = \frac{\text{۰ نسبی}}{\text{۰ نسبی}}$

$\overset{HOp}{\Rightarrow} \lim_{x\to ۱} \frac{n(n-۱)x^{n-۲}}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$

تعریف دو تابع هم ارز: فرض کنید a عددی حقیقی و یا $+\infty$ یا $-\infty$ باشد و توابع f و g در یک همسایگی از a (مگر احیاناً در خود a) تعریف شده باشند و g در این همسایگی (جز احیاناً خود a) مخالف صفر باشد ($g(x) \neq ۰$)، در این صورت دو تابع f و g را هنگامیکه $x \to a$ میل می‌کند، هم ارز یکدیگر گوئیم هرگاه $\lim_{x\to a} f(x) = ۰$ و $\lim_{x\to a} g(x) = ۰$ و $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = ۱$

در این حالت می‌نویسند: $f \underset{x\to a}{\sim} g$

(بخوانید f هم ارز است با g، هنگامیکه x به سمت a میل می‌کند)

ضمناً در این‌جا f و g را دو بی‌نهایت کوچک هم ارز گویند.

همچنین هرگاه $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ و ضمناً داشته باشیم $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = ۱$ باز هم گوئیم f با g هنگامیکه $x \to a$ میل می‌کند، هم ارز است، در این حالت نیز می‌نویسیم: $f \underset{x\to a}{\sim} g$

مثال: چون، ۰ نسبی $\lim_{x\to ۰} x = \lim_{x\to ۰} \sin x = ۰$ و $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$ لذا دو تابع sinx و x هنگامیکه $x \to ۰$ میل می‌کند، با یکدیگر هم ارزند.

تذکر: دو تابع $f(x) = \sqrt{x-۱}$ و $g(x) = x-۱$ هم ارز نیستند زیرا، با وجود اینکه $\lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۰$, $\lim_{x\to ۱^+} g(x) = ۰$ ولی $\lim_{x\to ۱^+} \frac{f(x)}{g(x)} \neq ۱$ در واقع

$\lim_{x\to ۱^+} \frac{\sqrt{x-۱}}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{۱}{\sqrt{x-۱}} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty$

لیست کاملی از هم ارزیها:

۱) $\sin_{x\to ۰} x \sim x$, $\sin_{x\to ۰} mx \sim mx$, $\sin_{x\to ۰} x^n \sim x^n$, $\sin_{x\to x_۰} (x-x_۰) \sim (x-x_۰)$

$\sin_{x\to ۰^+} \sqrt{x} \sim \sqrt{x}$, $\sin_{x\to \pm\infty} \frac{۱}{x} \sim \frac{۱}{x}$, $\sin_{u\to ۰} u \sim u$, $\sin^n_{u\to ۰} u \to u^n$, $\sin^n_{u\to ۰} u \sim \sin u^n \sim u^n$

به طور کلی

sin (هر کمان) ~ خود آن کمان کمان → ۰

۲) $\tan_{x\to ۰} x \sim x$, $\tan_{mx\to ۰} mx \sim mx$,...

$\tan_{u\to ۰} u \sim u$, $\tan_{u\to ۰} u^n \sim u^n$, $\tan^n_{u\to ۰} u \sim \tan u^n \sim u^n$

به طور کلی

خود آن کمان ~ (هر کمان) tan کمان → ۰

۳) $\underset{x\to 0}{\text{Arcsin}}\ x \sim x \quad , \quad ...$

به طور کلی

خود آن کمان ~ (هر کمان) Arcsin کمان → ۰

۴) $\underset{x\to 0}{\text{Arctan}}\ x \sim x \quad , \quad ...$

به طور کلی

خود آن کمان ~ (هر کمان) Arctan کمان → ۰

۵) $1-\underset{x\to 0}{\cos}\ 2x \sim 2x^2 \quad , \quad 1-\underset{x\to 0}{\cos}\ x \sim \frac{x^2}{2} \quad , \quad 1-\underset{x\to 0}{\cos}\ mx \sim \frac{(mx)^2}{2}$

$1-\underset{x\to 0^+}{\cos}\sqrt{x} \sim \frac{(\sqrt{x})^2}{2} = \frac{x}{2} \quad , \quad \sqrt{1-\cos x}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{|x|}{\sqrt{2}}$

$1-\sqrt{\cos x} = \frac{1-\cos x}{1+\sqrt{\cos x}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}}{1+1} = \frac{x^2}{4} \quad , \quad 1-\cos u \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u^2}{2}$

در واقع $1-\cos u = 2\sin^2\frac{u}{2} \underset{u\to 0}{\sim} 2\left(\frac{u}{2}\right)^2 \underset{u\to 0}{=} \frac{u^2}{2}$

$\frac{(\text{خود آن کمان})^2}{2}$ ~ (هر کمان) cos − ۱ کمان → ۰

۶) $1-\underset{u\to 0}{\cos^n u} \sim \frac{n}{2}u^2$

۷) $1+\underset{u\to \pi}{\cos u} \sim \frac{(u-\pi)^2}{2}$

۸) $\sin(\sin(...(\sin x))...) \underset{x\to 0}{\sim} x$

۹) $\tan(\tan(...(\tan x))...) \underset{x\to 0}{\sim} x$

۱۰) $x-\sin x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{6}x^3 \quad , \quad mx-\sin mx \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{6}(mx)^3 \quad , \quad x^n-\sin x^n \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{6}(x^n)^3$

$\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} \underset{x \to \pm\infty}{\sim} \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x}\right)^3 \quad , \quad u - \sin u \underset{u \to 0}{\sim} \frac{1}{6}u^3$

به طور کلی

۳(خود آن کمان) $\frac{1}{6}$ ~ سینوس آن کمان − یک کمان
۰ ← کمان

۱۱) $u^n - \sin^n u \underset{u \to 0}{\sim} \frac{n}{6}u^{n+2}$

به عنوان مثال: $x^2 - \sin^2 x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{3}x^4 \quad , \quad x^3 - \sin^3 x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^5$

در واقع $x^2 - \sin^2 x = (x - \sin x)(x + \sin x) \underset{x \to 0}{\sim} (\frac{1}{6}x^3)(x + x) = \frac{1}{3}x^4$

۱۲) $x - \tan x \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{1}{3}x^3 \quad , \quad ...$

به طور کلی

۳(خود آن کمان) $\frac{1}{3}$− ~ تانژانت یک کمان − یک کمان
۰ ← کمان

تذکر: $\tan x - x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{3}x^3$ و لذا $x - \tan x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{-1}{3}x^3$

۱۳) $u^2 - \tan^2 u \underset{u \to 0}{\sim} \frac{2}{3}u^4$

۱۴) $\tan x - \sin x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^3 \quad , \quad \tan mx - \sin mx \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{2}(mx)^3$

به طور کلی

۳(آن کمان) $\frac{1}{2}$ ~ سینوس همان کمان − تانژانت یک کمان
۰ ← کمان

۱۵) $x - \sin x - \frac{1}{6}x^3 \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{1}{120}x^5$

۱۶) $1 - \cos x - \frac{1}{2}x^2 \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{1}{24}x^4$

۱۷) $x - \tan x + \frac{1}{3}x^3 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{-2}{15}x^5$

۱۸) $x - \text{Arcsin}x \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{1}{6}x^3$

۱۹) $x - \text{Arctan}x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{3}x^3$

۲۰) $\text{Arcsin}x - \text{Arctan}x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^3$

۲۱) $\cos x \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\sim} \cot x$

۲۲) $\cos ax - \cos bx \underset{x\to 0}{\sim} \frac{b^2 - a^2}{2} x^2$

در واقع: $\cos ax - \cos bx = -2\sin\frac{ax+bx}{2} \sin\frac{ax-bx}{2}$

$\underset{x\to 0}{\sim} -2 \frac{ax+bx}{2} \times \frac{ax-bx}{2} \Rightarrow \underset{x\to 0}{\sim} (b+a)x \times \frac{(b-a)x}{2} \Rightarrow \underset{x\to 0}{\sim} \frac{b^2-a^2}{2} x^2$

مثال: $\cos x - \cos 3x \underset{x\to 0}{\sim} 4x^2$

۲۳) $\frac{1-\cos ax \cos bx}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{a^2+b^2}{2}$

۲۴) $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \underset{x\to 0}{\sim} a_0$

۲۵) $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_n x^n$

۲۶)
$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt[n]{a}\, x$ (n عدد طبیعی فرد و $a \neq 0$)

$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt[n]{a}\, |x|$ (n عدد طبیعی زوج و $a > 0$)

۲۷)
$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt[n]{a}\left(x+\frac{b}{na}\right)$ (n عدد طبیعی فرد و $a \neq 0$)

$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + \dots} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right|$ (n عدد طبیعی زوج و $a > 0$)

۲۸) $\sqrt{x^2+a^2} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} |x|$, $\sqrt{x^2+bx+c} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \left|x+\frac{b}{2}\right|$

$\sqrt{ax^2+bx+c} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$, $\sqrt{(x+b)^2+k} \underset{x\to\pm\infty}{\sim} |x+b|$

۲۹) $(1+x)^n \underset{x\to 0}{\sim} 1+nx$, $(1+x)^n - 1 \underset{x\to 0}{\sim} nx$

$\sqrt[n]{1+ax} \underset{x\to 0}{\sim} 1+\frac{ax}{n}$, $\sqrt[n]{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} 1+\frac{x}{n}$, $\sqrt{a^2+x} \underset{x\to 0}{\sim} a+\frac{x}{2a}$ $(a>0)$

۳۰) $\sqrt[n]{x+1} - \sqrt[n]{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $\Rightarrow$ بالاخص:
$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \sim \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

۳۱) $\lfloor x \rfloor \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x$, $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}$

۳۲) $\mathrm{Ln}(1+ax) \underset{x\to 0}{\sim} ax$, $\underset{x\to 0}{\mathrm{Ln}}(1+x) \sim x$, $\mathrm{Ln}x \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)$

۳۳) $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$

۳۴) $\mathrm{Arccos}\,u \underset{u\to 1^-}{\sim} \sqrt{1-u^2}$

۳۵) $e^x - 1 - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$

۳۶) $e^x - e^{-x} \underset{x\to 0}{\sim} 2x$

۳۷) $(f(x))^{g(x)} \sim e^{g(x)\,Ln\,(f(x))}$

نکته: $a^x = e^{x\,Lna}$

$f(x), g(x) \to 0$ یا $f(x)\to\infty, g(x)\to 0$

از این هم ارزی، جهت رفع ابهام دو صورت مبهم $0^{\text{نسبی}}$(۰ نسبی) و $\infty^{0\,\text{نسبی}}$ استفاده می‌شود.

۳۸) $(f(x))^{g(x)} \sim e^{g(x)(f(x)-1)}$

$x \to a$

$f(x) \to 1$

$g(x) \to +\infty$

از این هم ارزی جهت رفع ابهام صورت مبهم 1^∞ استفاده می‌شود.

۳۹) $0 < a < b < c \Rightarrow \begin{cases} a^n + b^n + c^n \underset{x\to\infty}{\sim} c^n \\ a^n + b^n + c^n \underset{n\to-\infty}{\sim} a^n \end{cases}$

۴۰) $\frac{a^n + b^n}{a^{n+k} + b^{n+k}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{a^k}$, $\frac{a^n + b^n}{a^{n+k} + b^{n+k}} \underset{n\to-\infty}{\sim} \frac{1}{b^k}$ $(n, k\in N \quad , a > b)$

۴۱) $1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p = \frac{1}{p+1}n^{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \frac{p}{12}n^{p-1} + ...$ $,(p\in N)$

۱) $1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p+1}n^{p+1}$

۲) $1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p - \frac{1}{p+1}n^{p+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}n^p$

۳) $1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p - \frac{1}{p+1}n^{p+1} - \frac{1}{2}n^p \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{p}{12}n^{p-1}$

بالاخص

۱) $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}n^2$

۲) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3}n^3$

۳) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4}n^4$

۴) $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$

۵) $2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$

مثال:

۱) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{0}{0} \Rightarrow \sim \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} = \frac{1}{6}$

$$۲)\lim_{x\to ۰}\frac{\tan mx}{\sin nx}=\frac{۰}{۰}\quad\to\quad\sim\lim_{x\to ۰}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}$$

$$۳)\lim_{x\to\pm\infty}x\sin\frac{۱}{x}=\infty\times ۰ \text{ نسبی } \sim\ \to\ \lim_{x\to ۰}x\times\frac{۱}{x}=۱$$

$$۴)\lim_{x\to ۰}\frac{\operatorname{Arcsin}۲x-\operatorname{Arctan}۲x}{۲x^{۳}}=\frac{۰}{۰}\quad\to\ \sim\ \lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{۲}(۲x)^{۳}}{۲x^{۳}}=۲$$

$$۵)\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x\tan ۲x\ldots\tan nx}{n(\operatorname{Arctan}x)^{n}}=\frac{۰}{۰}\quad\sim\ \lim_{x\to ۰}\frac{x(۲x)\ldots(nx)}{nx^{n}}=\lim_{x\to ۰}\frac{n!x^{n}}{nx^{n}}=(n-۱)!$$

$$۶)\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱-\cos x^{۲}}}{(\operatorname{Arcsin}x)^{۲}}=\frac{۰}{۰}\quad\sim\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{\frac{۱}{۲}(x^{۲})^{۲}}}{x^{۲}}=\ \lim_{x\to ۰}\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}x^{۲}}{x^{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$۷)\lim_{x\to ۱}\frac{\tan(x^{۳}-۱)-\sin(x^{۳}-۱)}{۲\tan^{۳}(x^{۳}-۱)}=\frac{۰}{۰}\ \sim\ \lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱}{۲}(x^{۳}-۱)^{۳}}{۲(x^{۳}-۱)^{۳}}=\frac{۱}{۴}$$

$$۸)\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^{۲}+x(x-۵)}{۱-۴x^{۲}}=\frac{\infty}{\infty}\quad\sim\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۴x^{۲}}{-۴x^{۲}}=-۱$$

$$۹)\lim_{x\to+\infty}\frac{۱+۲+۳+\ldots+n}{n^{۲}}=\frac{\infty}{\infty}\quad\sim\quad\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{۱}{۲}n^{۲}}{n^{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

$$۱۰)\lim_{x\to ۰}\frac{\cot ۱۰x}{\cot ۲۰x}=\frac{\infty}{\infty}\quad\sim\ \lim_{x\to ۰}\frac{\tan ۲۰x}{\tan ۱۰x}\ \sim\ \lim_{x\to ۰}\frac{۲۰x}{۱۰x}=۲$$

$$۱۱)\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{۲\sqrt[۸]{x}}=\frac{۰}{۰}\ \sim\ \lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}{۲\sqrt[۸]{x}}=\ \lim_{x\to ۰^{+}}\frac{\sqrt[۸]{x}}{۲\sqrt[۸]{x}}=\frac{۱}{۲}$$

$$۱۲)\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{۲}-۴x+۷}-x)=\infty-\infty\quad\sim\ \lim_{x\to+\infty}(|x-۲|-x)=\lim_{x\to+\infty}(x-۲-x)=-۲$$

$$۱۳)\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[۳]{۸x^{۳}+۴۸x^{۲}}-\sqrt[۳]{x^{۳}+۱}}{\sqrt{x^{۲}+۴x}-\sqrt[۴]{۱۶x^{۴}-۶۴x^{۳}}}=\frac{-\infty-(-\infty)}{\infty-\infty}=\text{مبهم}$$

$$\sim\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[۳]{۸}(x+۲)-(x+\frac{۰}{۱})}{|x+۲|-۲|x-۱|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲(x+۲)-x}{-x-۲+۲(x-۱)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+۴}{x-۴}=۱$$

$$۱۴)\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[۴]{۱۶x^{۴}+۴x^{۲}-۵}}{\sqrt[۳]{x^{۳}+x^{۲}+۱۰}}=\frac{\infty}{\infty}\text{مبهم}\sim\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲|x|}{x}=\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x}{x}=۲\\ \lim_{x\to-\infty}\frac{-۲x}{x}=-۲\end{cases}$$

۱۵) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos 2x)}{x^3\tan 2x}=\dfrac{0}{0}$ مبهم $\sim \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x^2}{x^3 . 2x} \Rightarrow\sim \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^4}{2x^4}=1$

۱۶) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+6x}-\sqrt{1+2x}}{1-\sqrt[5]{1+10x}}=\dfrac{0}{0} \sim \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\frac{6x}{3})-(1+\frac{2x}{2})}{1-(1+\frac{10x}{5})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{-2x}=\dfrac{-1}{2}$

۱۷) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2(1-\cos\frac{1}{x})=\infty\times 0 \sim \lim\limits_{x\to +\infty}x^2(\frac{1}{2}(\frac{1}{x})^2)=\frac{1}{2}$

۱۸) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x-\sqrt{2x+1}}{x+\sqrt{x^2+2}}=\dfrac{\infty-\infty}{\infty} \sim \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x}{x+|x|}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x}{2x}=2$

۱۹) $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\frac{1}{x})^x=1^\infty \sim \lim\limits_{x\to +\infty}e^{x(1+\frac{1}{x}-1)}=\lim\limits_{x\to +\infty}e^{\frac{x}{x}}=e^1=e$

۲۰) $\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{4^n+5^n}{4^{n+2}+5^{n+2}}=\dfrac{\infty}{\infty} \sim \lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{5^n}{5^{n+2}}=\dfrac{1}{25}$

تذکر: بسیاری از هم ارزیها را می‌توان به کمک قاعده‌ی HOP ثابت کرد.

تذکر: به کمک قاعده‌ی هوپیتال، می‌توان تابع هم ارز یک تابع را به دست آورد.

مثال: تابع هم ارز تابع $f(x)=x-\sin x$ را هنگامیکه $x\to 0$ میل می‌کند بیابید؟

فرض می‌کنیم: $x-\sin x \underset{x\to 0}{\sim} mx^n$

لذا باید داشته باشیم: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{mx^n}=1$

$\dfrac{0}{0}\overset{HOP}{\rightarrow}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{mnx^{n-1}}=1$

$\dfrac{0}{0}\overset{HOP}{\rightarrow}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{mn(n-1)x^{n-2}}=1$

$\sim \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{mn(n-1)x^{n-2}}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{mn(n-1)x^{n-3}}=1$

این حد زمانی برابر ۱ می‌شود که داشته باشیم: $\begin{cases}n-3=0\\ mn(n-1)=1\end{cases}$ در نتیجه $n=3$, $m=\frac{1}{6}$

و از آنجا $x-\sin x \underset{x\to 0}{\sim} mx^n=\frac{1}{6}x^3$

تذکر: با استفاده از بسط مک لورن یک تابع، نیز می‌توان تابع هم ارز آن را به دست آورد.

مثال: در مبحث دنباله، بسط مک لورن sinx را به صورت زیر بیان کردیم.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad (*)$$

حال چون هر چند جمله‌ای، هنگامیکه $x \to 0$ میل می‌کند، هم ارز با جمله‌ی با کمترین درجه‌اش است لذا داریم.

$$\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$$

اما از بسط sinx فرمول (*) داریم:

$$x - \sin x = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \dots \qquad (**)$$

و مجدداً داریم: $x - \sin x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{3!}x^3 = \frac{1}{6}x^3$

به همین ترتیب از فرمول (**) داریم:

$$x - \sin x - \frac{x^3}{3!} = \frac{-x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \dots$$

لذا داریم:

$$x - \sin x - \frac{1}{6}x^3 \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{1}{120}x^5$$

رفع ابهام صور مبهم

۱) رفع ابهام حالت مبهم $\frac{0}{0}$

برای رفع ابهام این حالت می‌توان از روش تجزیه، هم ارزی، هوپیتال و یا تلفیقی از آنها و یا روشهای خاص دیگر استفاده کرد.

مثال:

$$1)\ \lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^4 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{روش تجزیه}} \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 - 1) + (x - 1)}{x^4 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 2)}{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{4}{4} = 1$$

روش دوم:

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 1}{4x^3} = \frac{4}{4} = 1$$

$$2)\ \lim_{x \to 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{\operatorname{Arctan} x . \sin^3 x} = \frac{0}{0} \sim \lim_{x \to 0} \frac{-2\sin\frac{\sin x + x}{2}\sin\frac{\sin x - x}{2}}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{-2 \times x \times -\frac{1}{12}x^3}{x^4} = \frac{1}{6}$$

$$3)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 5x + x\operatorname{Arcsin} 2x}{\tan^2 3x} = \frac{0}{0} \ \text{هم ارزی}\ \lim_{x \to 0} \frac{25x^2 + 2x^2}{9x^2} = 3$$

$$4)\ \lim_{x \to 0} \frac{\tan 5x - \tan x - \tan 4x}{\sin^3 2x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 5x \tan(-x) \tan(-4x)}{(2x)^3} \Rightarrow \sim \lim_{x \to 0} \frac{(5x)(x)(4x)}{(2x)^3} = \frac{5}{2}$$

نکته: $x + y + z = 0 \Rightarrow \tan x + \tan y + \tan z = \tan x \tan y \tan z$

$$۵)\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\tan x-\tan a}=\frac{۰}{۰}$$

تبدیل به حاصلضرب $\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{۲\cos\frac{x+a}{۲}\sin\frac{x-a}{۲}}{\frac{\sin(x-a)}{\cos x\cos a}}$ هم ارزی $\lim_{x\to a}\frac{۲\cos\frac{x+a}{۲}\times\frac{x-a}{۲}.\cos x\cos a}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{۲}\cos x\cos a=\cos^۳ a$$

$$\overset{HOP}{\Rightarrow}\lim_{x\to a}\frac{\cos x}{۱+\tan^۲ x}=\frac{\cos a}{۱+\tan^۲ a}=\frac{\cos a}{\frac{۱}{\cos^۲ a}}=\cos^۳ a$$

تذکر مهم: توجه کنید که شما بایستی در محاسبه‌ی یک حد، آسانترین، سریعترین و کوتاهترین راه حل را انتخاب نمائید.

$$۵)\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۵]{۱+۲x}-۱}{x}=\frac{۰}{۰}\quad\to\quad\lim_{x\to ۰}\frac{۱+\frac{۲x}{۵}-۱}{x}=\frac{۲}{۵}$$

$$۶)\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۶]{\cos^۳ x}-\sqrt[۶]{\cos^۲ x}}{۱-\cos^۲ x}=\frac{۰}{۰}$$

فرض می‌کنیم $\sqrt[۶]{\cos x}=u$ لذا $\cos x=u^۶$ و چون $x\to ۰$ میل می‌کند بنابراین $u\to ۱$ میل می‌کند در نتیجه داریم:

$$\lim_{u\to ۱}\frac{u^۳-u^۲}{۱-u^{۱۲}}=\frac{۰}{۰}\quad\overset{HOP}{\to}\lim_{u\to ۱}\frac{۳u^۲-۲u}{-۱۲u^{۱۱}}=\frac{-۱}{۱۲}$$

۲) رفع ابهام $\frac{\infty}{\infty}$

برای رفع ابهام این حالت نیز می‌توان از روش تجزیه، هم ارزی، هوپیتال و یا تلفیقی از آنها و یا روشهای خاص دیگر استفاده کرد.

مثال:

$$۱)\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{۱۶x^۲+۵x+۴}}{x}=\frac{\infty}{\infty}$$ هم‌ارزی $$\lim_{x\to -\infty}\frac{۴\lfloor x\rfloor}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-۴x}{x}=-۴$$

$$۲)\lim_{x\to -\infty}\frac{\lfloor ۳x\rfloor+|x|}{\sqrt{x^۲+۱}+|-x|}=\frac{\infty}{\infty}$$ هم ارزی $$\lim_{x\to -\infty}\frac{\lfloor ۳x\rfloor+|x|}{|x|+|x|}\sim\lim_{x\to -\infty}\frac{۳x-x}{-x-x}=-۱$$

$$۳)\lim_{n\to +\infty}\frac{\lfloor x\rfloor+\lfloor ۲x\rfloor+\lfloor ۳x\rfloor+...+\lfloor nx\rfloor}{n^۲}=\frac{+\infty}{\infty}$$

$$\lim_{n\to +\infty}\frac{(x-p_۱)+(۲x-p_۲)+(۳x-p_۳)+...+(nx-p_n)}{n^۲}$$

$$=\lim_{n\to +\infty}\frac{(۱+۲+۳+...+n)x-(p_۱+p_۲+...+p_n)}{n^۲}=\lim_{n\to +\infty}\frac{\frac{n(n+۱)}{۲}x}{n^۲}-\lim_{n\to +\infty}\frac{p_۱+p_۲+...+p_n}{n^۲}$$

$$=\lim_{n\to +\infty}\frac{xn^۲+xn}{۲n^۲}+\frac{\text{عدد}}{\infty}=\frac{x}{۲}+۰=\frac{x}{۲}$$

نکته: $0 \le x - \lfloor x \rfloor < 1 \Rightarrow x - \lfloor x \rfloor = p \Rightarrow \lfloor x \rfloor = x - p$

۳) رفع ابهام $\infty - \infty$

برای رفع ابهام این حالت، می‌توان از مخرج مشترک‌گیری، ضرب عبارت در مزدوج، هم ارزی و ... استفاده کرد.

مثال:

۱) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (x\tan x - \frac{\pi}{2}\sec x) = \infty - \infty$

هوپیتال $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\frac{x\sin x}{\cos x} - \frac{\pi}{2\cos x}) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2x\sin x - \pi}{2\cos x} \overset{HOP}{\rightarrow} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x + 2x\cos x}{-2\sin x} = -1$

۲) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 - 6x} + \sqrt[3]{8x^3 - 9x + 4} - x) = \infty - \infty + \infty$ هم ارزی $\rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} (|x - 3| + 2x - x) = 3$

۳) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x(2\cot 2x - \cot x)}{x^2} = \frac{0(\infty - \infty)}{0}$ مبهم

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 4x(\cot x - \tan x - \cot x)}{x^2} \sim \lim\limits_{x \to 0} \frac{(4x)(-x)}{x^2} = -4$

۴) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1}) = \infty - \infty$

مخرج مشترک $\rightarrow \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^4 + x^3 - 2x^4 + x^2}{(2x^2 - 1)(2x + 1)} \sim \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{4x^3} = \frac{1}{4}$

۵) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\log_2^{(4x+2)} - \log_2^{(32x-5)}) = \infty - \infty$ خاصیت لگاریتم $\rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \log_2^{\frac{4x+2}{32x-5}} = \log_2^{\frac{1}{8}} = -3$

۴) رفع ابهام $0 \times \infty$:

برای رفع ابهام این حالت ابتدا به دو تساوی ساده‌ی زیر توجه کنید:

$$\begin{cases} 2 \times 3 = \frac{2}{\frac{1}{3}} \\ 2 \times 3 = \frac{3}{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$\dfrac{\text{عامل صفر شوند}}{\dfrac{1}{\text{عامل بی‌نهایت شونده}}} = 0 \times \infty \leftarrow$ نسبی $0 \times \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$

$\dfrac{\text{عامل بی‌نهایت شوند}}{\dfrac{1}{\text{عامل صفر شونده}}} = 0 \times \infty \leftarrow$ نسبی $0 \times \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$

و به همین سادگی که دیدیم، حالت مبهم $\infty \times 0$ را به دو صورت مبهم ساده‌تر $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل نموده و سپس مشابه موارد قبل عمل می‌کنیم.

مثال:

$$1)\lim_{x\to 1}(x^2-5x+4)\tan\frac{\pi x}{2}=0\times\infty \quad\rightarrow\quad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{\cot\frac{\pi x}{2}}=\frac{0}{0}$$

$$HOP\Rightarrow\quad \lim_{x\to 1}\frac{2x-5}{-\frac{\pi}{2}(1+\cot^2\frac{\pi x}{2})}=\frac{-3}{-\frac{\pi}{2}}=\frac{6}{\pi}$$

$$2)\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4+x^2}\quad\sin\frac{1}{2x+5}=\infty\times 0$$

هم ارزی $\lim_{x\to-\infty}|x|\times\frac{1}{2x+5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{2x+5}=\frac{-1}{2}$

$$3)\lim_{x\to 0}\text{Arcsinx}.\cot x=0\times\infty\quad\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\text{Arcsinx}}{\tan x}=\frac{0}{0}\quad\sim\quad\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

$$4)\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cot 2x\tan(x+\frac{\pi}{4})=0\times\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cot 2x}{\cot(x+\frac{\pi}{4})}=\frac{0}{0}\quad\overset{HOP}{\rightarrow}\quad\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2(1+\cot^2 2x)}{-(1+\cot^2(x+\frac{\pi}{4}))}=-2$$

$$5)\lim_{x\to+\infty}x(1-\cos\sqrt{\frac{2}{x}})=\infty\times 0\quad\Rightarrow\sim\quad\lim_{x\to 0}x\times\frac{2}{2x}=1$$

۵) رفع ابهام 0^+-0^+ و 0^--0^-:

در این حالت نیز می‌توان از مخرج مشترک، ضرب و تقسیم عبارت در مزدوج، و ... استفاده کرد.

مثال:

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x})=0^+-0^+$$

مخرج مشترک $\rightarrow\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{x^2}\quad\sim\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$

۶) رفع ابهام 0^0 و ∞^0:

برای رفع ابهام دو صورت 0^0 و ∞^0، از هم ارزی $(f(x))^{g(x)}\underset{x\to a}{\sim}e^{g(x)\,Lnf(x)}$ استفاده می‌کنیم.

مثال:

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{\tan x}=(0^+)^{0^+}$$

هم ارزی $\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}e^{x\,Lnx}=e^{0^+\times(-\infty)}$

$$=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{\infty}}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to 0^+}e^{-x}=e^0=1$$

۷) رفع ابهام 1^∞:

برای رفع ابهام این حالت مبهم از هم ارزی $(f(x))^{g(x)}\underset{x\to a}{\sim}e^{g(x)(f(x)-1)}$ استفاده می‌کنیم.

$$f(x)\rightarrow 1$$
$$g(x)\rightarrow+\infty$$

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = 1^\infty \Rightarrow \sim \lim_{x\to+\infty} e^{x\left(\frac{x+a}{x-a}-1\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2ax}{x-a}} = e^{2a}$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = 1^\infty \text{ هم ارزی } \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{1-\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{-1}{1-\cos x}\left(\frac{x-\sin x}{x}\right)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{-1}{\frac{x^2}{2}}\times\frac{\frac{1}{6}x^3}{x}} = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

بررسی حد توابع دو ضابطه‌ی

چنانچه می‌دانیم وجود یا عدم وجود $f(a)$ تأثیری در وجود یا عدم وجود $\lim_{x\to a} f(x)$ ندارد در حالت کلی برای محاسبه‌ی حد توابع دو ضابطه‌ای، بسته به نوع تابع دو ضابطه‌ای به صورت زیر عمل می‌کنیم.

۱) هرگاه ضابطه‌ی تابع به صورت $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & ,(x\geq a)\\ f_2(x) & ,(x<a)\end{cases}$ باشد، برای محاسبهٔ $\lim_{x\to a} f(x)$، حد چپ و راست را جداگانه به صورت زیر حساب می‌کنیم.

$$\begin{cases}\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} f_1(x)\\ \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} f_2(x)\end{cases}$$

اگر دو حد چپ و راست به دست آمده، با یکدیگر مساوی بودند، $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود است و مقدارش برابر با مقدار مشترک دو حد فوق خواهد بود.

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-1}{x^2-1} & ,(x>1)\\ \lfloor -x\rfloor+\frac{5}{2} & ,(x\leq 1)\end{cases}$ **مفروض است** $\lim_{x\to 1} f(x)$ **را در صورت وجود بیابید؟**

$$\begin{cases}\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{0}{0} \overset{HOP}{\rightarrow} \lim_{x\to 1^+}\frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}\\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\left(\lfloor -x\rfloor+\frac{5}{2}\right) = \lfloor -1^-\rfloor+\frac{5}{2} = \lfloor -0/99\rfloor+\frac{5}{2} = -1+\frac{5}{2} = \frac{3}{2}\end{cases}$$

پس $\lim_{x\to 1} f(x)$ وجود دارد و مقدارش برابر $\frac{3}{2}$ است.

۲) حد توابع دو ضابطه‌ای که ضابطه‌ی آنها، روی Z، عوض می‌شود: در توابعی به صورت $f(x)=\begin{cases} f_1(x) & ,(x\in z)\\ f_2(x) & ,(x\notin z)\end{cases}$، برای محاسبه‌ی حد در هر نقطه مانند a (چه صحیح و چه غیرصحیح)، از ضابطه‌ی غیرصحیح استفاده می‌شود.

در واقع در این گونه توابع، هنگامی که $x\to a$ میل می‌کند (چه $a\in z$ و چه $a\notin z$) x نزدیک a است ولی خود a نیست. لذا x هیچگاه صحیح نیست. بنابراین در این توابع داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f_2(x)$$

تذکر مهم: در حالتی که a، بی‌نهایت باشد ($x\to\pm\infty$)، برای محاسبه‌ی حد توابعی به صورت فوق، بایستی حد هر دو ضابطه‌ی f_1 و f_2 را در بی‌نهایت به دست آوریم زیرا در این حالت، هنگامی که $x\to\pm\infty$ میل کند x می‌تواند صحیح یا

غیرصحیح باشد.

در این حالت اگر $\lim_{x\to\pm\infty} f_1(x)=l_1$, $\lim_{x\to\pm\infty} f_2(x)=l_2$، تنها در صورتی f(x) در بی‌نهایت حد دارد که $l_1=l_2$ باشد.

مثال: مطلوبست $\lim_{x\to 2}(\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor)$

$$f(x)=\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=\begin{cases}0 & ,(x\in z)\\ -1 & ,(x\notin z)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(-1)=-1$$

مثال: $\lim_{x\to+\infty}(\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor)$

$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 0=0 & (x\in z)\\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-1)=-1 & (x\notin z)\end{cases}$$

چون $-1\neq 0$ لذا $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ موجود نیست.

زیرا حد تابع در هر نقطه، در صورت وجود یکتاست.

مثال: در تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{6x+\sin x}{3x} & ,(x\notin z)\\ \frac{2x^2+x+1}{x^2+5} & ,(x\in z)\end{cases}$ مطلوبست $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to\pi} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$$1)\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{6x+\sin x}{3x}=\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 0}\frac{6x+x}{3x}=\frac{7}{3}$$

$$2)\lim_{x\to\pi} f(x)=\lim_{x\to\pi}\frac{6x+\sin x}{3x}=\frac{6\pi+0}{3\pi}=2$$

$$3)\begin{cases}\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+\sin x}{3x}\sim\lim_{x\to+\infty}\frac{6x}{3x}=2 & (x\notin z)\\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x+1}{x^2+5}=2\end{cases}$$

بنابراین تابع در این حالت حد دارد و ضمناً $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$ است.

۳) حد توابع دو ضابطه‌ای که ضابطه‌ی آنها روی Q عوض می‌شود.

در توابعی به صورت $f(x)=\begin{cases}f_1(x) & ,(x\in Q)\\ f_2(x) & ,(x\notin Q)\end{cases}$، برای بررسی $\lim_{x\to a} f(x)$ (چه $a\in Q$ چه $a\notin Q$)، لازم است هر دو حد $\lim_{x\to a} f_1(x), \lim_{x\to a} f_2(x)$ را حساب کرده، در این حالت f، در نقطه‌ی a حد دارد اگر و فقط اگر که مقدار دو حد فوق برابر باشند، در این حالت اگر $\lim_{x\to a} f_1(x)=\lim_{x\to a} f_2(x)=l$ آنگاه $\lim_{x\to a} f(x)=l$

در واقع در اینگونه توابع، هنگامیکه $x \to a$ میل می‌کند (چه $a \in Q$ و چه $a \notin Q$) x می‌تواند گویا یا گنگ باشد، چرا که هرچقدر هم که x به a نزدیک شود، بازهم (به دلیل اینکه بین هر دو عدد حقیقی، بی‌نهایت عدد گویا و بی‌نهایت عدد اصم وجود دارد) x می‌تواند گویا یا اصم باشد، لذا به ازاء برخی از مقادیر x که نزدیک به a هستند، $f(x) = f_1(x)$ است و به ازاء برخی دیگر که اصم هستند $f(x) = f_2(x)$ است.

مثال: در تابع $D(x) = \begin{cases} 1 & ,(x \in Q) \\ 0 & ,(x \in R - Q) \end{cases}$ **(تابع دیر یکله) مطلوبست**

$\lim_{x \to -\infty} D(x) \quad , \lim_{x \to \sqrt{5}} D(x) \quad , \lim_{x \to 7} D(x)$

۱) $\begin{cases} \lim_{x \to 7} 1 = 1 \\ \lim_{x \to 7} 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \lim_{x \to 7} D(x) =$ موجود نیست

۲) $\begin{cases} \lim_{x \to \sqrt{5}} 1 = 1 \\ \lim_{x \to \sqrt{5}} 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \lim_{x \to \sqrt{5}} D(x) =$ موجود نیست

۳) $\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \to -\infty} 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} D(x) =$ موجود نیست

تذکر: تابع فوق به تابع دیریکله موسوم است، این تابع در هیچ نقطه‌ای حد ندارد و لذا در هیچ نقطه‌ای پیوسته و مشتق‌پذیر نیست.

نکته: در تابع $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & ,(x \in Q) \\ f_2(x) & ,(x \notin Q) \end{cases}$، هرگاه f_1 و f_2 در تمام نقاط R، حد داشته باشد (مثلاً توابع چند جمله‌ای، sin، cos، Arctan، Arccot و ...)، در این صورت f در a ($a \in R$) حد دارد اگر و فقط اگر که a، ریشه‌ی معادله‌ی $f_1(x) = f_2(x)$ باشد.

تست: تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 + x & ,(x \in Q) \\ 2 & ,(x \notin Q) \end{cases}$ **در چند نقطه حد دارد؟**

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) بی‌شمار

$x^3 + x = 2 \quad \Rightarrow x^3 + x - 2 = 0 \quad \Rightarrow x = 1$

این معادله تنها یک ریشه دارد و لذا تابع فقط در یک نقطه ($x = 1$) حد دارد.

تست: تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 & ,(x \in Q) \\ 2x & ,(x \notin Q) \end{cases}$ **در چند نقطه‌ی اصم حد دارد؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) بی‌شمار

$$x^3 = 2x \Rightarrow x(x^2-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \quad \text{اصم} \end{cases}$$

پس f در دو نقطه‌ی اصم، حد دارد.

تست: تابع $f(x)=\begin{cases} x^3-2x^2-x & ,(x\in Q) \\ -2 & ,(x\notin Q)\end{cases}$ **در چند نقطه‌ی صحیح حد دارد؟**

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

$$x^3-2x^2-x=-2 \Rightarrow x^3-2x^2-x+2=0 \Rightarrow a+b+c+d=0 \Rightarrow x'=1$$

«تقسیم به روش هُرنر»

```
 1    -2    -1    2  | 1
       1    -1   -2
---------------------
 1    -1    -2    0
```

$$x^3-2x^2-x+2=(x-1)(x^2-x-2)=0$$

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow a+c=b \quad \begin{cases} x'=-1 \\ x''=\frac{-c}{a}=2 \end{cases}$$

پس f در سه نقطه‌ی صحیح $x=\pm1$ و $x=2$ حد دارد.

نتیجه: هر تابع به صورت $f(x)=\begin{cases} c_1 & ,(x\in Q) \\ c_2 & ,(x\notin Q)\end{cases}$ $(c_1\neq c_2 , c_1, c_2\in R)$ در هر نقطه مانند $(a\in Q' , a\in Q)$ و در $\pm\infty$ حد ندارد.

تست: هرگاه $f(x)=\begin{cases} 3x^3-3 & ,(x\geq 1) \\ x^2-1 & ,(x<1)\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} 5 & ,(x\in Q) \\ -5 & ,(x\notin Q)\end{cases}$، **حاصل** $\lim_{x\to 1}(fg)(x)$ **کدام است؟**

۱) ۵ ۲) -5 ۳) ۰ ۴) موجود نیست.

حل: چون $\lim_{x\to 1} f(x)=0$ و g کراندار است لذا حد حاصلضربشان صفر است.

بررسی حد توابع به صورت $y=\lfloor f(x)\rfloor$:

برای بررسی حد توابع به صورت فوق، در یک نقطه، ابتدا حد عبارت داخل $\lfloor\ \rfloor$ یعنی $\lim_{x\to a} f(x)$ را حساب می‌کنیم، در این صورت:

الف) اگر حد مزبور، عددی غیرصحیح مانند l شود یعنی $\lim_{x\to a} f(x)=l$ و $l\notin z$ آنگاه: $\lim_{x\to a}\lfloor f(x)\rfloor=\lfloor l\rfloor$

یعنی در این حالت حد از جزء صحیح عبور می‌کند.

تست: $\lim_{x\to\sqrt{2}}\lfloor x^3+1\rfloor$ **کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) $1+2\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\lfloor x^3+1\rfloor=\left\lfloor(\sqrt{2})^3+1\right\rfloor=\lfloor 3/\text{خورده‌ای}\rfloor=3$$

ب) اگر $\lim_{x\to a} f(x)$ عددی صحیح شود، در این حالت بایستی حدود یکطرفه (حد چپ و راست) را در نقطه‌ی a حساب کنیم، در این حالت، ممکن است تابع $y=\lfloor f(x)\rfloor$ در نقطه‌ی a، حد داشته باشد یا حد نداشته باشد.

مثال: $۱)\lim_{x\to ۳^-}\lfloor ۲x\rfloor=\lfloor ۲(۳^-)\rfloor=\lfloor ۶^-\rfloor=۵\ ,\lim_{x\to ۳^+}\lfloor ۲x\rfloor=\lfloor ۲(۳^+)\rfloor=\lfloor ۶^+\rfloor=۶$

بنابراین $\lim_{x\to ۳}\lfloor ۲x\rfloor$ وجود ندارد.

$۲)\ \lim_{x\to(\sqrt[۳]{۷})^+}\lfloor x^۳\rfloor=\lfloor ۷^+\rfloor=۷\quad ,\ \lim_{x\to(\sqrt[۳]{۷})^-}\lfloor x^۳\rfloor=\lfloor ۷^-\rfloor=۶$

بنابراین $\lim_{x\to\sqrt[۳]{۷}}\lfloor x^۳\rfloor$ وجود ندارد.

$۳)\lim_{x\to ۰^+}\lfloor x^۲\rfloor=\lfloor ۰^+\rfloor=۰\quad ,\lim_{x\to ۰^-}\lfloor x^۲\rfloor=\lfloor ۰^+\rfloor=۰$

بنابراین $\lim_{x\to ۰}\lfloor x^۲\rfloor$ وجود دارد و برابر ۰ است.

تست: حاصل $\lim_{x\to ۰/۵}(\lfloor x\rfloor+\lfloor ۲x\rfloor)$ **برابر است با:**

۱) ۱　　۲) ۰　　۳) ۱-　　۴) موجود نیست

اولاً داریم: $\lim_{x\to ۰/۵}\lfloor x\rfloor=\lfloor ۰/۵\rfloor=۰$

ثانیاً:

$$\begin{cases}\lim_{x\to(۰/۵)^-}\lfloor ۲x\rfloor=\lfloor ۱^-\rfloor=۰\\ \lim_{x\to(۰/۵)^+}\lfloor ۲x\rfloor=\lfloor ۱^+\rfloor=۱\end{cases}$$

بنابراین:

$$\begin{cases}\lim_{x\to(۰/۵)^-}(\lfloor x\rfloor+\lfloor ۲x\rfloor)=۰+۰=۰\\ \lim_{x\to(۰/۵)^+}(\lfloor x\rfloor+\lfloor ۲x\rfloor)=۰+۱=۱\end{cases}$$

چون $۱\neq ۰$ لذا حد داده شده موجود نیست.

تذکر: در پاره‌ای موارد (مثلاً در توابع مثلثاتی و...) عددگذاری مشکل است، در این گونه موارد می‌توان از اطلاعات مربوط به تابع و به خصوص برد تابع هم استفاده کرد.

مثال: $۱)\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\lfloor \sin x\rfloor=\lfloor ۱^-\rfloor=۰$

روشی دیگر برای محاسبه‌ی $\lim_{x\to a}\lfloor f(x)\rfloor$، وقتی که $\lim_{x\to a} f(x)$ عددی صحیح است:

این روش برمبنای نکات ساده‌ی زیر استوار می‌باشد.

۱) اگر $\lim_{x\to a} f(x)=n\in z$ آنگاه حد چپ و راست تابع $\lfloor f(x)\rfloor$ در نقطه‌ی a برابر n و n-۱ می‌باشند.

۲) اگر f در نزدیکی a، اکیداً نزولی باشد و $\lim_{x\to a} f(x)=n\in z$، آنگاه حدود چپ و راست در نقطه‌ی a عبارتند از:

$$\begin{cases}\lim_{x\to a^-}\lfloor f(x)\rfloor=n\\ \lim_{x\to a^+}\lfloor f(x)\rfloor=n-۱\end{cases}$$

تست: حاصل $\lim_{x \to 0^-} \lfloor x^2 - x + 2 \rfloor$ **کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۰

روش اول:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - x + 2 \\ f'(x) = 2x - 1 \quad \Rightarrow f'(x) < 0 \quad (\text{در همسایگی } 0) \\ \lim_{x \to 0} f(x) = 2 = n \end{cases}$$

$\Leftarrow$ f در همسایگی ۰ اکیداً نزولی است

پس: $\lim_{x \to 0^-} \lfloor f(x) \rfloor = n = 2$

روش دوم: $\lim_{x \to 0^-} \lfloor x^2 - x + 2 \rfloor = \lim_{x \to 0^-} \left(\lfloor x(x-1) \rfloor + 2 \right)$

$= \lfloor 0^-(0^- - 1) \rfloor + 2 = \lfloor 0^+ \rfloor + 2 = 2$

۳) هرگاه f در نزدیکی a، اکیداً صعودی باشد و $\lim_{x \to a} f(x) = n \in z$، آنگاه حدود چپ و راست در نقطه‌ی a عبارتند از:

$$\begin{cases} \lim_{x \to a^-} \lfloor f(x) \rfloor = n - 1 \\ \lim_{x \to a^+} \lfloor f(x) \rfloor = n \end{cases}$$

تست: حاصل $\lim_{x \to 3^+} \lfloor x^3 - 6x - 9 \rfloor$ **کدام است؟**

۱) ۰ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) موجود نیست.

روش اول:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 6x - 9 \\ f'(x) = 3x^2 - 6 \quad \Rightarrow f'(x) > 0 \quad (\text{در همسایگی } 3) \\ \lim_{x \to 3} f(x) = 0 = n \end{cases}$$

$\Leftarrow$ f در همسایگی ۳ اکیداً صعودی است. $\Leftarrow$

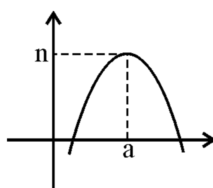
$\lim_{x \to 3^+} \lfloor f(x) \rfloor = n = 0$

روش دوم: $\lim_{x \to 3^+} \lfloor x^3 - 6x - 9 \rfloor = \lim_{x \to 3^+} \left(\lfloor x(x^2 - 6) - 9 \rfloor \right)$

$= \lfloor 3^+(9^+ - 6) \rfloor - 9 = \lfloor (3^+)(3^+) \rfloor - 9 = 9 - 9 = 0$

۴) هرگاه f در نقطه‌ی a، دارای Max یا Min نسبی باشد و $\lim_{x \to a} f(x) = n \in z$، آنگاه داریم:

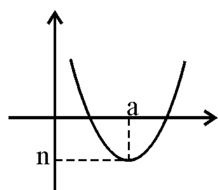
$$\lim_{x \to a} f(x) = \begin{cases} n - 1, & (\text{اگر a نقطه ماکزیمم نسبی f باشد}) \\ n, & (\text{اگر a نقطه‌ی مینیمم نسبی f باشد}) \end{cases}$$



با توجه به شکل، دیده می‌شود که وقتی $x \to a^+$ یا $x \to a^-$ میل می‌کند،

داریم: $f(x) < n$ لذا:

$\lim_{x \to a} \lfloor f(x) \rfloor = \lfloor n^- \rfloor = n - 1$



با توجه به شکل، دیده می‌شود که وقتی $x \to a^+$ یا $x \to a^-$ میل می‌کند، داریم: $f(x) > n$ لذا:

$$\lim_{x \to a} \lfloor f(x) \rfloor = \lfloor n^+ \rfloor = n$$

تست: حاصل $\lim_{x \to ۳} \lfloor -x^۲ + ۶x - ۷ \rfloor$ **کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۲- ۴) ۱-

$$\begin{cases} f(x) = -x^۲ + ۶x - ۷ \\ f'(x) = -۲x + ۶ = ۰ \quad \Rightarrow x = ۳ \\ \lim_{x \to ۳} f(x) = ۲ \end{cases}$$

پس f در $x = ۳$، ماکزیمم نسبی دارد.

$$\Rightarrow \lim_{x \to ۳} \lfloor -x^۲ + ۶x - ۷ \rfloor = n - ۱ = ۱$$

نکته‌ی مهم: هرگاه در محاسبه‌ی حد یک تابع، تابع شامل جملات معمولی و جملات دارای $\lfloor \ \rfloor$ باشد، برای محاسبه‌ی حد می‌توان حد جملاتی که دارای جزء صحیح هستند را محاسبه کرد و جایگزین نموده، سپس از تابع با وضعیت جدید، (یعنی بدون $\lfloor \ \rfloor$ حد بگیریم.

تست: حاصل $\lim_{x \to ۲^+} \frac{x^۳ - \lfloor x^۳ \rfloor}{x^۲ - ۴}$ **کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) موجود نیست.

$$x \to ۲^+ \quad \Rightarrow \lfloor x^۳ \rfloor = \lfloor ۸^+ \rfloor = ۸$$

$$\lim_{x \to ۲^+} \frac{x^۳ - \lfloor x^۳ \rfloor}{x^۲ - ۴} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{x^۳ - ۸}{x^۲ - ۴} = \frac{۰}{۰} \quad \overset{HOP}{\rightarrow} \quad \lim_{x \to ۲^+} \frac{۳x^۲}{۲x} = ۳$$

تست: حاصل $\lim_{x \to ۰} \frac{۱ - \cos x}{x^۲ - \lfloor x^۲ \rfloor}$ **برابر است با:**

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

$$x \to ۰ \quad \Rightarrow \lfloor x^۲ \rfloor = \lfloor ۰^+ \rfloor = ۰$$

$$\lim_{x \to ۰} \frac{۱ - \cos x}{x^۲ - \lfloor x^۲ \rfloor} = \lim_{x \to ۰} \frac{۱ - \cos x}{x^۲} = \frac{۰}{۰} \quad \overset{\text{هم ارزی}}{\rightarrow} \quad \lim_{x \to ۰} \frac{\frac{x^۲}{۲}}{x^۲} = \frac{۱}{۲}$$

دنباله‌ها و حد

همانطور که در تعریف حد توابع دیدیم، شرط لازم برای وجود حد یک تابع مانند f در یک نقطه مانند a، آن است که دامنه‌ی تابع f، شامل یک همسایگی محذوف a باشد، بنابراین اگر تابع در همسایگی محذوف a، تعریف نشده باشد، در آن نقطه حد ندارد، مثلاً $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطه‌ی $x = ۰$ حد ندارد. یکی دیگر از راههای تشخیص عدم وجود حد یک تابع در یک نقطه، عدم وجود حد چپ و راست و یا نابرابر بودن آنها در آن نقطه است، مثلاً تابع $f(x) = \lfloor x \rfloor$ در نقاط $n \in z$

اما روشهای دیگری نیز وجود دارند قبل از بیان یکی از این روشها، توجه شما را به چند دنباله‌ی زیر و حد آنها جلب می‌کنیم.

$a_n = ۱ + \frac{۱}{n}$

$a_n = ۱ - \frac{۱}{n^۲}$

$a_n = ۱ + \frac{۱}{۲n\pi}$

$a_n = ۱ + \frac{۱}{۲n\pi + \frac{\pi}{۲}}$

$a_n = ۱ + \frac{\sqrt{۲}}{n}$

همه‌ی دنباله‌های فوق، دنباله‌هائی همگرا به ۱، هستند برخی از آنها از سمت راست و برخی دیگر از سمت چپ به ۱ میل می‌کنند، برخی از آنها گویا و برخی دیگر اصم هستند. می‌دانیم مجموع دو عدد گویا، همیشه عددی گویا است بنابراین به عنوان مثال دنباله‌ی $a_n = ۱ + \frac{۱}{n}$، دنباله‌ای از اعداد گویاست که همگرا به ۱ می‌باشد.

همچنین می‌دانیم مجموع یک عدد گویا و یک عدد اصم، همیشه عددی اصم است بنابراین به عنوان مثال دنباله‌ی $a_n = ۱ + \frac{\sqrt{۲}}{n}$ دنباله‌ای از اعداد اصم است که همگرا به ۱ می‌باشد.

با این مقدمه،قضیه‌ی مهم زیر را بیان می‌کنیم، این قضیه و در واقع نتیجه‌ی آن، به کمک مفهوم حد دنباله‌ها، روشی دیگر برای اثبات عدم وجود حد توابع می‌باشد.

قضیه: فرض کنید $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ و $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه از اعداد حقیقی باشد به طوریکه، اولاً همگرا به a باشد و ثانیاً به ازاء هر $n \in N$، $a_n \neq a$، باشد در این صورت دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ نیز به عدد حقیقی l همگراست یعنی: $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = l$

مثال: می‌دانیم $\lim\limits_{x \to ۱} x^۲ = ۱$

حال اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$، دنباله‌ای دلخواه و همگرا به ۱ باشد و به ازاء هر $n \in N$، $a_n \neq ۱$، در این صورت: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n^۲ = ۱$

به عنوان مثال:

$$a_n = ۱ + \frac{۱}{n} \quad \Rightarrow f(a_n) = (۱ + \frac{۱}{n})^۲ \quad \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = ۱$$

$$a_n = ۱ + \frac{\sqrt{۲}}{n} \quad \Rightarrow f(a_n) = (۱ + \frac{\sqrt{۲}}{n})^۲ \quad \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(a_n) = ۱$$

نتیجه: اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از اعداد حقیقی باشند به طوری که هر دو به a همگرا بوده و برای هر $n \in N$، $a_n \neq a$ و $b_n \neq a$ ولی دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به ترتیب به $l_۱$ و $l_۲$ همگرا باشند و $l_۱ \neq l_۲$، آنگاه تابع $y = f(x)$ در $x = a$ حد ندارد یعنی $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ وجود ندارد.

مثال: به کمک دنباله‌ها ثابت کنید تابع $f(x) = x\lfloor x \rfloor$ در $x = ۲$ حد ندارد؟

حل: فرض می‌کنیم $\begin{cases} a_n = ۲ + \frac{۱}{n} \\ b_n = ۲ - \frac{۱}{n} \end{cases}$ واضح است که هر دو دنباله، همگرا به ۲ هستند و به ازاء هر $n \in N$، $a_n \neq ۲$ و $b_n \neq ۲$ (توجه داشته باشید که $\{a_n\}$ دنباله‌ایست که از سمت راست به ۲ میل می‌کند و $\{b_n\}$ دنباله‌ایست که از سمت چپ به

۲ میل می‌کند) حال داریم:

$$\begin{cases} f(a_n)=(۲+\frac{۱}{n})\left\lfloor ۲+\frac{۱}{n}\right\rfloor & \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(a_n)=(۲+۰^+)\lfloor ۲+۰^+\rfloor = ۲\times ۲ = ۴ \\ f(b_n)=(۲-\frac{۱}{n})\left\lfloor ۲-\frac{۱}{n}\right\rfloor & \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(b_n)=(۲-۰^+)\lfloor ۲-۰^-\rfloor = ۲\times ۱ = ۲ \end{cases}$$

چون $۲ \neq ۴$ است، پس f در $x = ۲$ حد ندارد.

مثال: به کمک دنباله‌ها ثابت کنید تابع $f(x) = \sin\frac{۱}{x-۱}$ در $x = ۱$ حد ندارد؟

حل: فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_n = ۱+\frac{۱}{۲n\pi} \\ b_n = ۱+\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}} \end{cases}$$

واضح است که هر دو دنباله‌ی فوق همگرا به ۱ هستند و به ازاء هر $n \in N$، $a_n \neq ۱$ و $b_n \neq ۱$، حال داریم:

$$\begin{cases} f(a_n)=\sin\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲n\pi}-۱}=\sin ۲n\pi = ۰ \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(a_n)=۰ \\ f(b_n)=\sin\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}}-۱}=\sin(۲n\pi+\frac{\pi}{۲})=۱ \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n)=۱ \end{cases}$$

چون $۰ \neq ۱$، لذا f در $x = ۱$ حد ندارد.

مثال: اگر تابع f در $x = a$، دارای حد چپ باشد، آنگاه کدام دنباله، همگراست؟

۱) $\{f(a+\frac{۱}{n})\}$　۲) $\{f(\frac{a}{n})\}$　۳) $\{f(a-\frac{۱}{n})\}$　۴) $\{f(a+\frac{(-۱)^n}{n})\}$

حل: چون دنباله‌ی $\{a-\frac{۱}{n}\}$ از چپ به a میل می‌کند، لذا گزینه‌ی ۳ صحیح است.

مثال: به کمک دنباله‌ها، ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases} ۱ & ,(x\in Q) \\ ۰ & ,(x\notin Q)\end{cases}$ در اعداد گویا حد ندارد؟

حل: فرض می‌کنیم $a \in Q$ دلخواه باشد، ثابت می‌کنیم f در a حد ندارد برای این منظور، دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ را به صورت زیر اختیار می‌کنیم.

$$\begin{cases} a_n = a+\frac{۱}{n} \\ b_n = a+\frac{\sqrt{۲}}{n} \end{cases}$$

، واضح است که هر دو دنباله‌ی فوق همگرا به a هستند و به ازاء هر $n \in N$، $a_n \neq a$ و $b_n \neq b$ (توجه داشته باشید که $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد گویا است که همگرا به a است ولی $\{b_n\}$ دنباله‌ای از اعداد اصم است که به a همگراست)، حال داریم:

$$\begin{cases} f(\overset{\text{گویا}}{a_n})=۱ & \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(a_n)=۱ \\ f(\overset{\text{اصم}}{b_n})=۰ & \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(b_n)=۰ \end{cases}$$

چون $۰ \neq ۱$ پس f در $a \in Q$، حد ندارد.

نکته: عکس قضیه‌ی فوق در حالت کلی برقرار است از عکس قضیه بالا برای اثبات وجود حد استفاده می‌شود، همانطوریکه در بخشهای قبل دیدیم، اثبات اینکه چرا $\lim\limits_{x\to ۲} x^۳ = ۸$ است، با استفاده از تعریف حد، (روش ε و δ) بسیار طولانی و خسته

کننده بود، اما این حد با استفاده از عکس قضیه، بسادگی اثبات می‌شود.

عکس قضیه: هرگاه برای هر دنباله‌ی دلخواه $\{a_n\}$ که به a همگراست، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به l همگرا باشد، یعنی $\lim_{n \to +\infty} f(a_n)=l$، آنگاه $\lim_{x \to a} f(x)$ نیز موجود است و برابر lاست.

مثال: به کمک دنباله‌ها، ثابت کنید:

$$\lim_{x \to ۲} x^۳ = ۸$$

اثبات: فرض می‌کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه باشد که همگرا به ۲ باشد یعنی $\lim_{n\to\infty} a_n = ۲$ و ضمناً برای هر $n \in N$، $a_n \neq ۲$ باشد، در این صورت داریم:

$$f(a_n) = a_n^۳ \quad \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim_{n\to +\infty} (a_n)^۳ = ۲^۳ = ۸$$

بنابراین طبق عکس قضیه داریم:

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = ۸ \quad \Rightarrow \lim_{x \to ۲} x^۳ = ۸$$

تست (۱)

۱ـ حد چپ تابع $f(x)=\left\lfloor \frac{x}{۲} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{۳} \right\rfloor$ وقتی که $x \to ۶$، کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۱−

۲ـ حاصل $\sqrt{x^۲-۶x+۹}\ \lim_{x \to ۳^-} \frac{۳-\lfloor x \rfloor}{x-۳}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱− ۳) ۱ ۴) $-\infty$

۳ـ $\lim_{x \to ۱^-}\left(\frac{x^۳-۱}{|x-۱|}+۲x\right)$ کدام است؟

۱) ۵− ۲) ۰ ۳) ۵ ۴) ۱−

۴ـ هرگاه $\lim_{x \to ۱} \frac{(a-۲)\lfloor x \rfloor + b}{x+۱} = ۱$ باشد، $۲a+b$ برابر است با:

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵ـ مقدار $\lim_{x \to ۰^-}\left(\lfloor x \rfloor + \lfloor x^۲ \rfloor + \lfloor x^۳ \rfloor + \dots + \lfloor x^{۲۰} \rfloor\right)$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۰− ۴) ۲۰−

۶ـ حاصل $\lim_{x \to ۰^-} \frac{\lfloor \cos x \rfloor + \lfloor \sin x \rfloor}{x+\sin\lfloor x \rfloor}$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) $\cos ۱$ ۳) $\frac{۱}{\sin ۱}$ ۴) ۱

۷ـ حاصل $\lim_{x \to ۰} \frac{۱-\cos x\sqrt{\cos ۲x}}{x\sin x}$ برابر است با:

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۸ـ حاصل $\lim_{x \to ۲^+} \frac{x^۲-۴}{x^۳-\lfloor x^۳ \rfloor}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۹ـ حد تابع $f(x)=\frac{|x^۳-۸|}{x-\sqrt{۲x}}$ وقتی $x \to ۲^-$، برابر است با:

۱) ۱۶ ۲) ۱۶− ۳) ۲۴ ۴) ۲۴−

۱۰ـ حاصل $\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^۲-a^۲}}$ کدام است؟

۱) $-\sqrt{۲a}$ ۲) $\sqrt{۲a}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲a}}$ ۴) $-\frac{۱}{\sqrt{۲a}}$

۱ـ (۳) $\lim_{x\to 6^-} f(x)=\left\lfloor \frac{6^-}{2}\right\rfloor-\left\lfloor \frac{6^-}{3}\right\rfloor=\lfloor 3^-\rfloor-\lfloor 2^-\rfloor=2-1=1$

۲ـ (۲) $\lim_{x\to 3^-}\frac{3-\lfloor 3^-\rfloor}{x-3}|x-3|=\lim_{x\to 3^-}\frac{-(3-2)(x-3)}{x-3}=-1$

۳ـ (۴) $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^3-1}{-(x-1)}+2x\right)\overset{HOp}{=}\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{3x^2}{-1}+2x\right)=-1$

۴ـ (۴) چون $\lfloor x\rfloor$ در $x=1$ حد ندارد لذا بایستی ضریبش صفر باشد، بنابراین: $a-2=0\Rightarrow a=2$

$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{b}{x+1}=1\Rightarrow \frac{b}{2}=1\Rightarrow b=2\Rightarrow 2a+b=6$

۵ـ (۳) $l=\lfloor 0^-\rfloor+\lfloor 0^+\rfloor+\lfloor 0^-\rfloor+\dots+\lfloor 0^-\rfloor=-10$

۶ـ (۳) $l=\frac{0-1}{0+\sin(-1)}=\frac{1}{\sin 1}$

۷ـ (۴) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos 2x}-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\cos 2x}(1-\cos x)}{x\sin x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 2x}(1-\cos x)}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x(1+\sqrt{\cos 2x})}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 2x}\times\frac{1}{2}x^2}{x^2}$

$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2\times 2}+\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

۸ـ (۳) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x^3-\lfloor 8^+\rfloor}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x^3-8}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 2^+}\frac{2x}{3x^2}=\frac{1}{3}$

۹ـ (۴) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x^3-8)}{x-\sqrt{2x}}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to 2^-}\frac{-3x^2}{1-\frac{2}{2\sqrt{2x}}}=-24$

۱۰ـ (۳) $l=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x-a})(\sqrt{x+a})}+\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x+a}}$

$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})(\sqrt{x+a})}+\frac{1}{\sqrt{2a}}=0+\frac{1}{\sqrt{2a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}$

تست (۲)

۱ـ هرگاه $\lim\limits_{x \to 2} \frac{mx+n}{x-\sqrt{x+2}} = 2$، $2m-n$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۲- ۳) ۶- ۴) ۶

۲ـ مجموع حد چپ و راست تابع $f(x) = x\lfloor x \rfloor$ در $x = n$، $(n \in z)$، کدام است؟

۱) $2n^2+1$ ۲) $2n^2-1$ ۳) $2n^2-n$ ۴) $2n^2+n$

۳ـ هرگاه $\lim\limits_{x \to 1} \frac{ax^4+bx+c}{x^3-3x+2} = 2$، حاصل $2a+b+c$ کدام است؟

۱) ۱- ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۴ـ هرگاه $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x}{x^2+ax+b} = +\infty$، $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۳- ۳) ۶ ۴) ۶-

۵ـ هرگاه $\lim\limits_{x \to 1} \frac{mx-2}{(x-1)^2} = -\infty$، حدود m، کدام است؟

۱) $m < 2$ ۲) $m > 2$ ۳) $m < 1$ ۴) $m > 1$

۶ـ حاصل $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2\lfloor x \rfloor - x\lfloor x^2 \rfloor}{x-2}$، کدام است؟

۱) ۲- ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۴-

۷ـ تابع $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$ در کدام نقطه حد ندارد؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۰/۱- ۴) $\sqrt[3]{3}$

۸ـ تابع $f(x) = \lfloor 2x-1 \rfloor$، در کدام نقطه حد ندارد؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) ۲/۵ ۳) $-\frac{2}{5}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۹ـ تابع $f(x) = \lfloor nx \rfloor$، $(n \in N)$ در بازه‌ی (۱ و ۰)، در چند نقطه حد ندارد؟

۱) n ۲) $n-1$ ۳) $n+1$ ۴) $2n-2$

۱۰ـ تابع $f(x) = \sqrt{x-\sqrt{x}}$ در $x = 0$

۱) حدی برابر صفر دارد ۲) فقط حد راست دارد.

۳) فقط حد چپ دارد ۴) نه حد راست دارد نه حد چپ

۱ـ (۴) چون مخرج به ازاء $x = ۲$، صفر می‌شود و جواب برابر ۲ است پس $x = ۲$، ریشه‌ی صورت کسر نیز می‌باشد لذا $۲m + n = ۰$ (در واقع این حد به صورت $\frac{۰}{۰}$ بوده که رفع ابهام شده و جواب ۲ شده است)

$$\overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x \to ۲} \frac{m}{۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{x+۲}}} = ۲ \Rightarrow \frac{۴m}{۳} = ۲ \Rightarrow m = \frac{۳}{۲} \Rightarrow n = -۳ \Rightarrow ۲m - n = ۶$$

۲ـ (۳)

$$\text{حد چپ} = n^- \lfloor n^- \rfloor = n(n-۱) = n^۲ - n$$

$$\text{حد راست} = n^+ \lfloor n^+ \rfloor = n^۲ \Rightarrow \text{حد چپ} + \text{حد راست} = ۲n^۲ - n$$

۳ـ (۳) چون $x = ۱$ ریشه‌ی مخرج کسر است لذا ریشه‌ی صورت کسر نیز می‌باشد. بنابراین:

$$x = ۱ \Rightarrow \text{صورت} = ۰ \Rightarrow a + b + c = ۰$$

$$\overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x \to ۱} \frac{۴ax^۳ + b}{۳x^۲ - ۳} = ۲ \Rightarrow ۴a + b = ۰ \overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x \to ۱} \frac{۱۲ax^۲}{۶x} = ۲ \Rightarrow \frac{۱۲a}{۶} = ۲ \Rightarrow a = ۱$$

$$\begin{cases} b = -۴ \\ c = ۳ \end{cases} \Rightarrow ۲a + b + c = ۱$$

۴ـ (۱)

$$\frac{۳}{۰^+} = +\infty \Rightarrow x^۲ + ax + b = (x-۳)^۲ \Rightarrow x^۲ + ax + b = x^۲ - ۶x + ۹$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -۶ \\ b = ۹ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۳$$

۵ـ (۱)

$$\frac{m-۲}{۰^+} = -\infty \Rightarrow m - ۲ < ۰ \Rightarrow m < ۲$$

۶ـ (۳)

$$\lim_{x \to ۲^+} \frac{x^۲ \lfloor ۲^+ \rfloor - x \lfloor ۴^+ \rfloor}{x - ۲} = \lim_{x \to ۲^+} \frac{۲x^۲ - ۴x}{x - ۲} \overset{HOP}{=} \lim_{x \to ۲^+} \frac{۴x - ۴}{۱} = ۴$$

۷ـ (۲) تابع $y = \lfloor x^۲ \rfloor$ در نقاط $\pm\sqrt{۱}, \pm\sqrt{۲}, \pm\sqrt{۳}, \ldots$ حد ندارد.

۸ـ (۲) تابع $y = \lfloor ۲x \rfloor$ در نقاط $۰, \pm\frac{۱}{۲}, \pm\frac{۲}{۲}, \pm\frac{۳}{۲}, \pm\frac{۴}{۲}, \ldots$ حد ندارد.

۹ـ (۲) تابع $y = \lfloor nx \rfloor$ در بازه‌ی (۰ و ۱) در نقاط $\pm\frac{۱}{n}, \pm\frac{۲}{n}, \ldots, \pm\frac{n-۱}{n}$ حد ندارد.

۱۰ـ (۴)

$$\text{حد چپ} = \sqrt{۰^- - \sqrt{۰^-}} = \text{وجود ندارد}$$ (زیر رادیکال منفی نمی‌شود)

$$\text{حد راست} = \sqrt{۰^+ - \sqrt{۰^+}} = \text{وجود ندارد}$$

$$۰^+ < \sqrt{۰^+} \Rightarrow ۰^+ - \sqrt{۰^+} < ۰ \Rightarrow \sqrt{۰^+ - \sqrt{۰^+}} = \text{تعریف نشده}$$

تست (۳)

۱ـ حاصل $\lim_{x \to +\infty} (x - \lfloor x \rfloor)\sin\frac{1}{x}$ **کدام است؟**

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) موجود نیست

۲ـ هرگاه $\lim_{x \to \frac{1}{3}} \frac{x^2 - 3}{9x^2 + ax + b} = -\infty$**، آنگاه a+ b، کدام است؟**

۱) ۵ ۲) ۵- ۳) ۶ ۴) ۶-

۳ـ مقدار $\lim_{x \to 0} \frac{x(1 - x)\sin\lambda x}{1 - \cos 2x}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{2\lambda}{3}$ ۲) $\frac{3\lambda}{2}$ ۳) $\frac{\lambda}{2}$ ۴) $\frac{\lambda}{3}$

۴ـ مقدار $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 5x} - 1}{\sqrt[5]{1 + 3x} - 1}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{25}{9}$ ۲) $\frac{9}{25}$ ۳) ۱ ۴) وجود ندارد

۵ـ حاصل $\lim_{x \to 0} (\frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor)\text{Arctan}x$ **کدام است؟**

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۰ ۴) وجود ندارد

۶ـ حاصل $\lim_{x \to +\infty} (x - \lfloor x \rfloor)$ **کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) $+\infty$ ۴) وجود ندارد

۷ـ حاصل $\lim_{x \to 0} (\cot^2 x - \frac{1}{x^2})$ **کدام است؟**

۱) ۰ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{2}{3}$ ۴) ۱

۸ـ هرگاه f تابعی حقیقی با دامنه‌ی R باشد و $|f| \leq 2$ و f در هیچ نقطه‌ای دارای حد نباشد، تابع $(x^3-x)f(x)$ دقیقاً در چند نقطه، دارای حدی حقیقی است؟

۱) ۲ ۲) هیچ نقطه ۳) ۳ نقطه ۴) بی‌شمار نقطه

۹ـ $\lim_{x \to -\infty} \lfloor \tan\frac{1}{x} \rfloor$**، کدام است؟**

۱) ۰ ۲) $-\frac{\pi}{2}$ ۳) ۱- ۴) $-\infty$

۱۰ـ تابع $f(x) = \lfloor x \rfloor \sin ax$**، به ازاء چه مقدار a، در تمام نقاط صحیح، حد دارد؟**

۱) π ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱ـ (۱) $0 \le x - \lfloor x \rfloor < 1 \Rightarrow$ کراندار $\times \sin\frac{1}{\infty} =$ کراندار $\times 0^{+} = 0$

۲ـ (۲) $\frac{\text{عددمنفی}}{0^{+}} = -\infty \quad \frac{(\frac{1}{3})^{2} - 3}{0^{+}} = -\infty \Rightarrow 9x^{2} + ax + b = (3x - 1)^{2}$

$9x^{2} + ax + b = 9x^{2} - 6x + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = -5$

۳ـ (۳) هم ارزی $\Rightarrow \frac{x(1-x) \times \lambda x}{\underset{x \to 0}{2x^{2}}} = \frac{\lambda}{2}$

۴ـ (۱) $\sqrt[n]{1 + ax} \underset{x \to 0}{\sim} 1 + \frac{a}{n}x$ هم ارزی $\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1 + \frac{5}{3}x - 1}{1 + \frac{3}{5}x - 1} = \frac{25}{9}$

۵ـ (۳) $0 \le \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor < 1 \Rightarrow$ کراندار $\times \text{Arctan}0 =$ کراندار $\times 0 = 0$

۶ـ (۴) $0 \le x - \lfloor x \rfloor < 1 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} (x - \lfloor x \rfloor)$ عددی نامعلوم بین صفر و یک

۷ـ (۳) $\lim_{x \to 0} (\frac{1}{\tan^{2}x} - \frac{1}{x^{2}}) = \lim_{x \to 0} \frac{x^{2} - \tan^{2}x}{x^{2}\tan^{2}x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{(x + \tan x)(x - \tan x)}{x^{2}\tan^{2}x} \sim \lim_{x \to 0} \frac{(x + x)(-\frac{1}{3}x^{3})}{x^{2}.x^{2}} = \frac{-2}{3}$

۸ـ (۳) $|f| \le 2 \Rightarrow$ کران دار $f \Rightarrow$ کران دار $\times 0 = 0$

$\Rightarrow x^{3} - x = 0 \Rightarrow x = 0, 1, -1$

۹ـ (۳) $\lfloor \tan 0^{-} \rfloor = \lfloor 0^{-} \rfloor = -1$

۱۰ـ (۱) بایستی sinax صفر شود، لذا ax بایستی مضرب صحیح π باشد حال چون x صحیح است پس بایستی a برابر π باشد.

اندیشه کن، آنگاه سخن گو، تا از لغزش برکنار باشی. (حضرت محمد (ص))

تست (۴)

۱ـ $\lim_{x\to-\infty}\left\lfloor \frac{1-x}{x} \right\rfloor$ برابر است با:

۱) -2 ۲) $+\infty$ ۳) 0 ۴) -1

۲ـ حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-\sqrt{2x+1}}{x+\sqrt{x^2+2}}$ برابر است با:

۱) $+\infty$ ۲) 4 ۳) 2 ۴) 0

۳ـ حاصل $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt[3]{x(x+1)(x+2)}-x)$ برابر است با:

۱) 1 ۲) 2 ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۴ـ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{8x+\sqrt{6x}}}{\sqrt{2x+\sqrt{5x}}}$ برابر است با:

۱) $\sqrt{\frac{6}{5}}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) 2 ۴) $+\infty$

۵ـ $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{32x^5-16x^4-2}-\sqrt[3]{8x^3+4x^2})$ برابر است با:

۱) $\frac{8}{15}$ ۲) $-\frac{15}{8}$ ۳) $-\frac{8}{15}$ ۴) $\frac{15}{8}$

۶ـ به ازاء چه مقدار a، حاصل $\lim_{x\to-\infty}(x+1+\sqrt{x^2+ax})$، برابر ۲ می‌شود؟

۱) -2 ۲) 1 ۳) 0 ۴) $-\frac{1}{2}$

۷ـ اگر $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-2x+3}-ax-b)=0$، $a+b$ کدام است؟

۱) ±1 ۲) ±2 ۳) ±3 ۴) 0

۸ـ هرگاه $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$، $a+b$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) -1 ۴) 2

۹ـ هرگاه داشته باشیم: $\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-1)x+\sqrt[5]{bx}}{\sqrt[5]{x+7}}=2$، $a+b$ کدام است؟

۱) 30 ۲) 31 ۳) 32 ۴) 33

۱۰ـ حاصل $\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$ برابر است با:

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) $+\infty$

۱ـ (۱) $\lim_{x\to-\infty}\left\lfloor \frac{۱}{x}-۱\right\rfloor=\lim_{x\to-\infty}\left(\left\lfloor\frac{۱}{x}\right\rfloor-۱\right)=\lfloor ۰^-\rfloor-۱=-۲$

۲ـ (۳) $\sim\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x}{x+|x|}=۲$

۳ـ (۱) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt[۳]{x^۳+۳x^۲+\dots}-x)\quad\sim\lim_{x\to-\infty}(x+۱-x)=۱$

۴ـ (۳) $\sim\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۸x}}{\sqrt{۲x}}=\sqrt{\frac{۸}{۲}}=۲$

۵ـ (۳) $\sim\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[۵]{۳۲}(x+\frac{-۱۶}{۵\times۳۲})-\sqrt[۳]{۸}(x+\frac{۴}{۲۴})-۱۱\right]=-\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۳}=\frac{-۸}{۱۵}$

۶ـ (۱) $\sim\lim_{x\to-\infty}(x+۱+|x+\frac{a}{۲}|)=۲\Rightarrow x+۱-x-\frac{a}{۲}=۲\quad\Rightarrow a=-۲$

۷ـ (۴) $\sim\lim_{x\to-\infty}(|x-۱|-ax-b)=۰\quad\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}(۱-x-ax-b)=۰\quad\Rightarrow(-۱-a)x+۱-b=۰x+۰$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-۱\\b=۱\end{cases}\quad\Rightarrow a+b=۰$$

۸ـ (۱) $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^۲-۱+۲}{x+۱}-ax-b)=۰\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}(x-۱+\frac{۲}{x+۱}-ax-b)=۰$

$\lim_{x\to+\infty}((۱-a)x-۱-b)=۰x+۰\Rightarrow\begin{cases}۱-a=۰\\-۱-b=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\b=-۱\end{cases}$

$a+b=۰$ توجه داشته باشید که $\lim_{x\to+\infty}\frac{۲}{x+۱}=۰$

۹ـ (۴) چون حد کسر، یک عدد مخالف صفر شده است لذا اولاً بایستی درجه‌ی صورت و مخرج برابر باشند بنابراین

$a-۱=۰\Rightarrow a=۱$

ثانیاً $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[۵]{bx}}{\sqrt[۵]{x+۷}}=۲\quad\Rightarrow\sqrt[۵]{b}=۲\quad\Rightarrow b=۳۲\quad\Rightarrow a+b=۳۳$

۱۰ـ (۱) مزدوج $\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{x(x^۲+۱-(x^۲-۱))}{\sqrt{x^۲+۱}+\sqrt{x^۲-۱}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x}{|x|+|x|}=-۱$

من معتقدم که انسان بر تحصیل علم به معنی درک حقیقت و معلوم ساختن مجهولات توانائی دارد و در تمام رشته‌ها، باید از ریاضی کمک گرفت. **(رنه دکارت)**

تست (۵)

۱ـ حاصل $\lim_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{\frac{x+3}{x-1}} - 1\right)$ برابر است با:

۱) $+\infty$ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) ۲

۲ـ هرگاه $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{cx^3 + (a+b+c)x^2 + (b+2)x + 7}{2x+2} = 3$، a−b برابر است با:

۱) −۸ ۲) ۰ ۳) ۸ ۴) −۴

۳ـ حاصل $\lim_{x \to -\infty} \frac{6x + |5x - 3|}{3x + |1 - 2x|}$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) $+\infty$ ۳) ۱ ۴) ۱۱

۴ـ هرگاه $\lim_{x \to +\infty} \frac{ax^4 + 1}{2x^b + x^2 + 1} = 6$، a+b کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۲ ۴) ۱۶

۵ـ هرگاه $\lim_{x \to +\infty} \frac{(a-1)(x+1)}{(4-a)(x+2)} = \frac{1}{2}$، a برابر است با:

۱) ۳ ۲) −۲ ۳) ۱ ۴) ۲

۶ـ حاصل $\lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2-1)^2 x^5 - 3x^9}{20x^4(x^5 + 2x^2 - 1)}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $-\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{10}$ ۴) $-\frac{1}{10}$

۷ـ $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{2x+1} - \frac{x^3}{2x^2-1}\right)$ برابر است با:

۱) $+\infty$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) ۱ ۴) ۰

۸ـ هرگاه $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + ax^2 + 2} - \sqrt{x^2 + ax + 1}\right) = 2$، a کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) −۶ ۳) −۱۲ ۴) ۶

۹ـ حد تابع $\frac{\sqrt{2x^2 + \sqrt{x^4 + \sqrt{9x^8}}}}{1 - 2x}$، هنگامیکه $x \to +\infty$ برابر است با:

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) −۱ ۴) −۲

۱۰ـ حاصل $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $+\infty$ ۴) ۰

۱ـ (۴)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{x+۳}{x-۱}-۱\right)}{\sqrt{\frac{x+۳}{x-۱}}+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+۳-x+۱)}{(x-۱)(۱+۱)}=۲$$

۲ـ (۱)

$$\begin{cases}c=۰\\a+b+c=۰\end{cases}\Rightarrow\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(b+۲)x+۷}{۲x+۲}=۳\Rightarrow\frac{b+۲}{۲}=۳\quad\begin{cases}c=۰\\b=۴\\a=-۴\end{cases}\Rightarrow a-b=-۸$$

۳ـ (۳)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۶x+۳-۵x}{۳x+۱-۲x}\sim\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=۱$$

۴ـ (۴)

$$\sim\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^{۴}}{۲x^{b}}=۶\Rightarrow\begin{cases}b=۴\\\frac{a}{۲}=۶\end{cases}\Rightarrow a+b=۱۶$$

۵ـ (۴)

$$\sim\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(a-۱)x}{(۴-a)x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{a-۱}{۴-a}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=۲$$

۶ـ (۴)

$$\sim\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{۹}-۳x^{۹}}{۲۰x^{۹}}=-\frac{۱}{۱۰}$$

۷ـ (۲)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{۳}(۲x-۱)-x^{۲}(۲x^{۲}-۱)}{(۲x^{۲}-۱)(۲x+۱)}\sim\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^{۳}}{۴x^{۳}}=-\frac{۱}{۴}$$

۸ـ (۳)

$$\sim\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{a}{۳}-\left|x+\frac{a}{۲}\right|\right)=۲\Rightarrow\frac{a}{۳}-\frac{a}{۲}=۲\Rightarrow a=-۱۲$$

۹ـ (۳)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۲x^{۲}+\sqrt{x^{۴}+۳x^{۴}}}}{۱-۲x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۲x^{۲}+۲x^{۲}}}{۱-۲x}\sim\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x}{-۲x}=-۱$$

۱۰ـ (۱)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[۳]{x}\left((x+۱)^{۲}-(x-۱)^{۲}\right)}{\sqrt[۳]{(x+۱)^{۴}}+\sqrt[۳]{(x+۱)^{۲}(x-۱)^{۲}}+\sqrt[۳]{(x-۱)^{۴}}}\sim\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[۳]{x}(۲x+۲x)}{\sqrt[۳]{x^{۴}}+\sqrt[۳]{x^{۴}}+\sqrt[۳]{x^{۴}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x\sqrt[۳]{x}}{۳x\sqrt[۳]{x}}=\frac{۴}{۳}$$

روزگار دوروز است، روزی برای تو، و روزی علیه تو. پس در آن روزی که برای توست تندروی مکن
و در آن روزی که علیه توست بردبار باش. حضرت علی (ع)

تست (۶)

۱ـ حد عبارت $\frac{(x+1)(x+2)(x+3)-x^3}{(x-1)^2+(x+1)^2}$، وقتی $x \to +\infty$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $+\infty$ ۳) 3 ۴) $-\frac{1}{2}$

۲ـ حد تابع $f(x)=\frac{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^8)}{x^6(2x^6+1)^5}$ وقتی $x \to +\infty$ کدام است؟

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 0 ۴) $\frac{1}{32}$

۳ـ مقدار $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1+\lfloor x\rfloor}{5x}$، برابر است با:

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) 0 ۳) $\frac{2}{5}$ ۴) $-\infty$

۴ـ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)\dots(x^n+1)}{\left[(nx)^n+1\right]^{\frac{(n+1)}{2}}}$، $(n\in N)$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{n(n+1)}$ ۲) $\frac{1}{n^{\frac{n+1}{2}}}$ ۳) $\frac{1}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}$ ۴) $\frac{1}{n^{\frac{n}{2}}}$

۵ـ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+1}}$، کدام است؟

۱) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۶ـ حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x+\sqrt{x}}+\sqrt{9x+\sqrt[5]{x}}}{\sqrt{16x+\sqrt{x}}}$، کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $+\infty$ ۴) $\frac{1}{2}$

۷ـ حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x+\sqrt{x^2+8x+3}}{7x+\sqrt[3]{x^3+6x^2+1}}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{4}{7}$ ۳) $\frac{5}{8}$ ۴) $\frac{3}{7}$

۸ـ هرگاه $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-2}{ax^2+bx+1}=-\infty$، آنگاه $-\frac{b}{a}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 0 ۳) -2 ۴) 2

۹ـ حاصل $\lim_{x \to ۳} (۹ - x^۲) \tan \frac{۳\pi}{۲x}$، کدام است؟

۱) $-\frac{۳۶}{\pi}$ ۲) $\frac{۳۶}{\pi}$ ۳) $\frac{۴}{\pi}$ ۴) $-\frac{۴}{\pi}$

۱۰ـ هرگاه $f(x) = a^۳ \lfloor x \rfloor + x^۲ - \lfloor x \rfloor$ در $x = ۱$، حد داشته باشد، a کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) هیچ مقدار

همیشه نعمتهایی را که دارید بشمارید نه محرومیت‌ها را. «دیل کارنگی»

هیچ فقری بدتر از جهل و هیچ ثروتی بالاتر از علم نیست. «حضرت محمد (ص)»

ادب خرجی ندارد ولی همه چیز را خریداری می‌کند. «لاوی تلناجیو»

هر بدی که توانی به دشمن مرسان باشد که روزی دوست شود. (سعدی)

۱ـ (۳) $= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۳+۶x^۲+\dots-x^۳}{x^۲+x^۲} \sim \lim_{x\to+\infty}\frac{۶x^۲}{۲x^۲}=۳$

۲ـ (۴) $\sim \lim_{x\to+\infty} \frac{x.x^۲.x^۳.\dots x^۸}{x^۶(۲x^۶)^۵} \sim \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{۱+۲+۳+\dots+۸}}{۳۲x^{۳۶}} \sim \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{۳۶}}{۲x^{۳۶}} = \frac{۱}{۳۲}$

۳ـ (۳) $\lfloor x \rfloor \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{x+۱+x}{۵x} \sim \lim_{x\to-\infty} \frac{۲x}{۵x}=\frac{۲}{۵}$

۴ـ (۳) $\sim \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{۱+۲+۳+\dots+n}}{((nx)^n)^{\frac{(n+۱)}{۲}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{n(n+۱)}{۲}}}{n^{\frac{n(n+۱)}{۲}} x^{\frac{n(n+۱)}{۲}}} = \frac{۱}{n^{\frac{n(n+۱)}{۲}}}$

۵ـ (۲) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x)}{(\sqrt{۳x+۱}-\sqrt{۲x+۱})(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x})} \sim \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(\sqrt{۳x}-\sqrt{۲x})(\sqrt{x}+\sqrt{x})}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{۲(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})x} = \frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{۲}$

۶ـ (۲) $\sim \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{۴x}+\sqrt{۹x}}{\sqrt{۱۶x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۵\sqrt{x}}{۴\sqrt{x}}=\frac{۵}{۴}$

۷ـ (۱) $\sim \lim_{x\to-\infty}\frac{۴x+|x|}{۷x+x} \sim \lim_{x\to-\infty} \frac{۴x-x}{۸x}=\frac{۳}{۸}$

۸ـ (۴) $\frac{\text{عددمنفی}}{۰^+} \Rightarrow ax^۲+bx+۱=(x-۱)^۲$

$ax^۲+bx+۱=x^۲-۲x+۱ \Rightarrow \begin{cases}a=۱\\b=-۲\end{cases} \Rightarrow \frac{-b}{a}=۲$

۹ـ (۲) $۰\times\infty = \text{مبهم} \Rightarrow \lim_{x\to۳}\frac{۹-x^۲}{\cot\frac{۳\pi}{۲x}}=\frac{۰}{۰} \overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x\to۳} \frac{-۲x}{-\frac{۳\pi}{۲x^۲}(۱+\cot^۲\frac{۳\pi}{۲x})}=\frac{۳۶}{\pi}$

۱۰ـ (۲) $f(x)=(a^۳-۱)\lfloor x\rfloor+x^۲ \Rightarrow a^۳-۱=۰ \Rightarrow a=۱$

چون $\lfloor x \rfloor$ در $x=۱$ حد ندارد لذا بایستی ضریبش صفر باشد تا f در $x=۱$ حد داشته باشد.

دانا باش یا جوینده دانائی.　(حضرت علی (ع))

تست (۷)

۱ـ حد چپ تابع $f(x) = \lfloor \cot x \rfloor$ وقتی $x \to \frac{\pi}{4}$، از حد راست آن در همین نقطه، چقدر بیشتر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) $\frac{1}{2}$

۲ـ در تابع $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor - 2}{\pi} \text{Arccot}\frac{1}{x}$، حاصل $\lim_{x \to 0^-} f(x)$، کدام است؟

۱) -3 ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۳

۳ـ مقدار $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$، کدام است؟ $(m, n \in N)$

۱) $-\frac{m}{n}$ ۲) $\frac{m}{n}$ ۳) $(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$ ۴) $(-1)^{m+n}\frac{n}{m}$

۴ـ حاصل $\lim_{x \to 0} \frac{\text{Arcsin}(1-\cos x)}{\text{Arctan}(1-\cos 2x)}$، برابر است با:

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۵ـ حاصل $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(1-\cos 2x)}{x^4}$، برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۶ـ حد چپ تابع $f(x) = \frac{\sqrt{1-\sin 2x}}{\tan x - 1}$، وقتی $x \to \frac{\pi}{4}$، کدام است؟

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۷ـ حد کسر $\frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt{\cos 4x}}{1-\sqrt{\cos x}}$، وقتی $x \to 0$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) -12 ۳) ۶ ۴) -6

۸ـ $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x \tan 2x \ldots \tan nx}{n(\text{Arctan} x)^n}$ برابر است با:

۱) $n!$ ۲) $(n+1)!$ ۳) $(n-1)!$ ۴) $(2n)!$

۹ـ حاصل $\lim_{x \to 0} \frac{\cot 10x}{\cot 20x}$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $+\infty$ ۴) ۰

۱۰ـ حاصل $\lim_{x \to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -1

۱ـ (۱) حد چپ $= \left\lfloor \cot(\frac{\pi}{۴})^- \right\rfloor = \lfloor ۱^+ \rfloor = ۱$

حد راست $= \left\lfloor \cot(\frac{\pi}{۴})^+ \right\rfloor = \lfloor ۱^- \rfloor = ۰$

۲ـ (۱) $\frac{-۱-۲}{\pi} \text{Arccot}(-\infty) = -\frac{۳}{\pi}(\pi) = -۳$

۳ـ (۳) $\frac{۰}{۰} \overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x \to \pi} \frac{m\cos mx}{n\cos nx} = \frac{m(-۱)^m}{n(-۱)^n} = \frac{m}{n}(-۱)^{m-n}$

۴ـ (۳) $\sim \lim_{x \to ۰} \frac{۱-\cos x}{۱-\cos ۲x} \sim \lim_{x \to ۰} \frac{\frac{x^۲}{۲}}{\frac{۲}{۲x^۲}} = \frac{۱}{۴}$

۵ـ (۲) $\sim \lim_{x \to ۰} \frac{۱-\cos(۲x^۲)}{x^۴} \sim \lim_{x \to ۰} \frac{۲x^۴}{x^۴} = ۲$

۶ـ (۴) $\lim_{x \to (\frac{\pi}{۴})^-} \frac{\sqrt{(\sin x - \cos x)^۲}}{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}} = \lim_{x \to (\frac{\pi}{۴})^-} \frac{-(\sin x - \cos x)\cos x}{-\sin x - \cos x} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

توجه: $\sin x < \cos x \quad \Rightarrow \quad ۰ < x < \frac{\pi}{۴}$

۷ـ (۱) $\lim_{x \to ۰} \frac{(\cos ۲x - \cos ۴x)(۱+\sqrt{\cos x})}{(۱-\cos x)(\sqrt{\cos ۲x}+\sqrt{\cos ۴x})} \sim \lim_{x \to ۰} \frac{۶x^۲(۱+۱)}{\frac{x^۲}{۲}(۱+۱)} = ۱۲$

توجه: $\cos \alpha x - \cos \beta x \underset{x \to ۰}{\sim} \frac{\beta^۲ - \alpha^۲}{۲} x^۲$

۸ـ (۳) $\sim \lim_{x \to ۰} \frac{(x)(۲x)(۳x)\dots(nx)}{nx^n} \sim \lim_{x \to ۰} \frac{n!x^n}{nx^n} = (n-۱)!$

۹ـ (۱) $= \lim_{x \to ۰} \frac{\tan ۲۰x}{\tan ۱۰x} \sim \lim_{x \to ۰} \frac{۲۰x}{۱۰x} = ۲$

۱۰ـ (۱) $\lim_{x \to ۰^+} \frac{(۱-\cos x)}{(۱-\cos\sqrt{x})(۱+\sqrt{\cos x})} \sim \lim_{x \to ۰^+} \frac{\frac{x^۲}{۲}}{\frac{x}{۲}(۱+۱)} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{x}{۲} = ۰$

گوهر وقت بدین خیرگی از دست نده

آخر این دُرّ گرانمایه بهائی دارد. پروین اعتصامی

تست (۸)

۱ـ حاصل $\lim_{x\to+\infty}(x^{۲}-x)\,\mathrm{Arcsin}\dfrac{۵}{۲x^{۲}-۲}$ برابر است با:

۱) ۵ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) ۰ ۴) $+\infty$

۲ـ حاصل $\lim_{x\to+\infty}x^{۴}(۱-\cos\frac{۱}{x^{۲}})$ برابر است با:

۱) ۳ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۳ـ مقدار $\lim_{x\to+\infty}x^{۴}(\cos\frac{۱}{x}-۱+\frac{۱}{۲x^{۲}})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲۴}$ ۲) $-\frac{۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۸}$

۴ـ حاصل $\lim_{x\to۰}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^{۲}}$ برابر است با:

۱) $\frac{\beta^{۲}+\alpha^{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\beta^{۲}-\alpha^{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\alpha^{۲}-\beta^{۲}}{۲}$ ۴) $\alpha^{۲}-\beta^{۲}$

۵ـ حاصل $\lim_{x\to\pi}\dfrac{۱-\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}(\cos\frac{x}{۴}-\sin\frac{x}{۴})}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $-\sqrt{۲}$

۶ـ حاصل $\lim_{x\to۰}\left(\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}\right)^{\frac{\tan x\tan ۲x\tan ۳x}{x^{۳}}}$ برابر است با:

۱) ۶۴ ۲) ۳۲ ۳) ۶ ۴) ۸

۷ـ حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\dfrac{\lfloor x+\sin x\rfloor}{\lfloor ۵\sin x\rfloor}$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۸ـ هرگاه $\lim_{x\to۰}\cot x^{m^{۲}}(x-\sin x)=۰$، حدود m، کدام است؟

۱) $m>۰$ ۲) $m>\sqrt{۳}$ یا $m<-\sqrt{۳}$ ۳) $-\sqrt{۳}<m<\sqrt{۳}$ ۴) $-\sqrt{۳}\le m\le\sqrt{۳}$

۹ـ هرگاه $\lim_{x\to۰}\dfrac{\cot kx}{\cot px}=۲$، کدام صحیح است؟

۱) $p=k$ ۲) $p=k^{۲}$ ۳) $p=۲k$ ۴) $p=\frac{k}{۲}$

۱۰ـ حد عبارت $\left\lfloor\dfrac{۱}{\cos x}\right\rfloor\sin ۲x$ $x\to\frac{\pi}{۲}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱ـ (۲) $\sim \lim_{x\to+\infty}(x^{۲}-x)\times\frac{۵}{۲x^{۲}-۲} \quad \sim \lim_{x\to+\infty}\frac{۵x^{۲}}{۲x^{۲}}=\frac{۵}{۲}$

۲ـ (۴) $\sim \lim_{x\to+\infty}x^{۴}\times\frac{(\frac{۱}{x^{۲}})^{۲}}{۲}=\frac{۱}{۲}$

۳ـ (۱) $\sim \lim_{x\to+\infty}x^{۴}(\frac{۱}{۲۴}(\frac{۱}{x})^{۴})=\frac{۱}{۲۴}$

یادآوری: $۱-\cos x-\frac{x^{۲}}{۲} \underset{x\to ۰}{\sim} \frac{-۱}{۲۴}x^{۴}$

۴ـ (۲) $\sim \lim_{x\to ۰}\frac{\beta^{۲}-\alpha^{۲}}{۲}x^{۲}=\frac{\beta^{۲}-\alpha^{۲}}{۲}$

۵ـ (۱) $\lim_{x\to\pi}\frac{(\cos\frac{x}{۴}-\sin\frac{x}{۴})^{۲}}{\cos\frac{x}{۲}(\cos\frac{x}{۴}-\sin\frac{x}{۴})}=\lim_{x\to\pi}\frac{\cos\frac{x}{۴}-\sin\frac{x}{۴}}{\cos^{۲}\frac{x}{۴}-\sin^{۲}\frac{x}{۴}}=\lim_{x\to\pi}\frac{۱}{\cos\frac{x}{۴}+\sin\frac{x}{۴}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۶ـ (۱) $\sim \lim_{x\to ۰}\left(\frac{\frac{۱}{۳}x^{۳}}{\frac{۱}{۶}x^{۳}}\right)^{\frac{x.۲x.۳x}{x^{۳}}}=۲^{۶}=۶۴$

۷ـ (۴) $\frac{\lfloor ۱^{+}\rfloor}{\lfloor (۲/۵)^{\pm}\rfloor}=\frac{۱}{۲}$

۸ـ (۳) $\lim_{x\to ۰}\frac{x-\sin x}{\tan x^{m^{۲}}}=۰ \Rightarrow \sim \lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{۶}x^{۳}}{x^{m^{۲}}}=۰ \Rightarrow m^{۲}<۳ \Rightarrow -\sqrt{۳}<m<\sqrt{۳}$

۹ـ (۳) $\lim_{x\to ۰}\frac{\tan px}{\tan kx}=۲ \Rightarrow \frac{p}{k}=۲ \Rightarrow p=۲k$

۱۰ـ (۴) $\sim \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}۲\sin x\cos x\times\frac{۱}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}۲\sin x=۲$

یادآوری: $x \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \lfloor x\rfloor$

شانس در خدمت ذهن آماده است. (پاستور)

تست (۹)

۱ـ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\text{Arctan}\,2x+\text{Arctan}\,3x-\frac{3\pi}{4}}{x^2-1}$ برابر است با:

۱) $\frac{3}{20}$ ۲) $\frac{9}{20}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{7}{20}$

۲ـ مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ برابر است با:

۱) $-\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۳ـ مقدار $\lim\dfrac{\sin^3(2x-\pi)}{(x-\frac{\pi}{2})\tan^2(3x-\frac{3\pi}{2})}$ وقتی $x\to\frac{\pi}{2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{8}{9}$ ۳) $\frac{9}{8}$ ۴) وجود ندارد

۴ـ $\lim\,(2x^2-x-1)\tan\frac{\pi x}{2}$، وقتی $x\to 1$ کدام است؟

۱) $-\frac{6}{\pi}$ ۲) $-\frac{3}{\pi}$ ۳) $\frac{3}{\pi}$ ۴) $\frac{6}{\pi}$

۵ـ حاصل $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin\sqrt[3]{x}}{\text{Arccos}(1-x)}$، کدام است؟

۱) ۰ ۲) $-\infty$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) وجود ندارد

۶ـ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$، برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) موجود نیست

۷ـ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x-\frac{x^3}{6}}{x^5}$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{120}$ ۳) $-\frac{1}{120}$ ۴) ۱

۸ـ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^{\circ}}{\tan x_{\text{grad}}}$، کدام است؟

۱) $\frac{9}{10}$ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) $\frac{10}{9}$

۹ـ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+\text{Arcsin}\,x}{x+\text{Arctan}\,x}$، کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۱۰ـ مقدار $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin^3 x}{\sin(\cos^2 x)}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{3}{2}$ ۳) ۳ ۴) ۱

۱ـ (۴) $\frac{0}{0} \overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x \to 1} \frac{\frac{2}{1+4x^2}+\frac{3}{1+9x^2}}{2x}=\frac{7}{20}$

۲ـ (۳) $\frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2(\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos 2x})} \sim \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3x^2}{2}}{x^2(1+1)}=\frac{3}{4}$

۳ـ (۲) $\frac{0}{0} \Rightarrow \sim \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(2x-\pi)^3}{(x-\frac{\pi}{2})(3x-\frac{3\pi}{2})^2}=\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{8(x-\frac{\pi}{2})^3}{(x-\frac{\pi}{2})9(x-\frac{\pi}{2})^2}=\frac{8}{9}$

۴ـ (۱) $0 \times \infty \Rightarrow \lim_{x \to 1} \frac{2x^2-x-1}{\cot\frac{\pi x}{2}}=\frac{0}{0} \overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x \to 1} \frac{4x-1}{-\frac{\pi}{2}(1+\cot^2\frac{\pi x}{2})}=\frac{-6}{\pi}$

۵ـ (۴) $\frac{0}{0} = \frac{0^-}{\operatorname{Arccos}(1-0^-)}=\frac{0^-}{\operatorname{Arccos}1^+}=\frac{0^-}{\text{وجود ندارد}}=$ وجود ندارد

۶ـ (۱) $\lim_{x \to +\infty} 2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$

$\sim \lim_{x \to +\infty} 2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2} \times \frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=2\times$ کراندار $\times 0 = 0$

۷ـ (۳) $\frac{0}{0} \Rightarrow \sim \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-1}{5!}x^5}{x^5}=\frac{-1}{120}$

۸ـ (۴) $\frac{0}{0} \Rightarrow \sim \lim_{x \to 0} \frac{\sin\frac{\pi}{180}x_{rad}}{\tan\frac{\pi}{200}x_{rad}} \sim \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\pi}{180}x}{\frac{\pi}{200}x}=\frac{10}{9}$

۹ـ (۳) $\frac{0}{0} \sim \lim_{x \to 0} \frac{2x+x}{x+x}=\frac{3}{2}$

۱۰ـ (۱) $\frac{0}{0} \sim \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}=\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)(1+\sin x+\sin^2 x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{3}{2}$

راه دوم: ← $\sim \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}=\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-3\sin^2 x\cos x}{-2\sin x\cos x}=\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}\sin x=\frac{3}{2}$

جوهر ریاضیات آزادی آن است. (کانتور)

تست (۱۰)

۱ـ حاصل $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{(x-۱)^{n-۱}}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt[۳]{x}-۱)(\sqrt[۴]{x}-۱)...(\sqrt[n]{x}-۱)}$، برابر است با:

۱) $n!$ ۲) $(n-۱)!$ ۳) $(n+۱)!$ ۴) $(n+۲)!$

۲ـ هرگاه $n \in N$، مقدار $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{x+x^۲+x^۳+...+x^n-n}{x-۱}$ کدام است؟

۱) $۲n-۱$ ۲) $n(n+۱)$ ۳) $\frac{n(n+۱)}{۲}$ ۴) $\frac{n(n+۱)}{۴}$

۳ـ حاصل $\lim\limits_{x \to ۰^-} (\sqrt[۴]{۲})^{\frac{۱}{x}}$، کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $-\infty$

۴ـ هم ارز تابع $\cos x - \cos ۳x$ وقتی $x \to ۰$، کدام است؟

۱) $-۸x^۲$ ۲) $-۴x^۲$ ۳) $۴x^۲$ ۴) $۸x^۲$

۵ـ تابع $f(x) = ۱ - \sin x$، هنگامی که $x \to \frac{\pi}{۲}$، هم ارز کدام تابع زیر است؟

۱) $\cot^۲ x$ ۲) $\frac{۱}{۲}\cot^۲ x$ ۳) $۲\cot^۲ x$ ۴) $۴\cot^۲ x$

۶ـ اگر $x \to ۱$، تابع $f(x) = x^۲ - ۳x + ۲$، هم ارز کدام تابع زیر است؟

۱) $x - ۱$ ۲) $x^۲ - ۱$ ۳) $۱ - x$ ۴) $۲(۱ - x)$

۷ـ هرگاه $ax^b \underset{x \to ۰}{\sim} \sqrt[۳]{۱+x} - ۱$، کدام درست است؟

۱) $a+b = \frac{۳}{۲}$ ۲) $a+b = \frac{۳}{۴}$ ۳) $a+b = \frac{۴}{۳}$ ۴) $a+b = \frac{۲}{۳}$

۸ـ اگر $x + ۱ \to ۰$، تابع $(x + ۱)(x^۲ - ۱)$، با کدام تابع زیر، هم ارز است؟

۱) $۲(x+۱)^۲$ ۲) $-۲(x+۱)$ ۳) $-۲(x^۲-۱)$ ۴) $-۲(x+۱)^۲$

۹ـ هرگاه $ax^b \underset{x \to ۰}{\sim} \sin ۴x - ۴x$، ab کدام است؟

۱) -۳۲ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۳۲

۱۰ـ تابع $۲\cos x + ۲$، وقتی $x \to \pi$، با کدام تابع زیر هم ارز است؟

۱) $x - \pi$ ۲) $(x+\pi)^۲$ ۳) $(x-\pi)^۲$ ۴) $x + \pi$

۱ـ (۱) با فرض ۲ = n داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{\Rightarrow}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=2$$

بنابراین گزینه‌ای درست است که به ازاء ۲ = n، برابر ۲ شود، لذا گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۲ـ (۳)

$$\frac{0}{0}\overset{HOP}{\Rightarrow}\lim_{x\to 1}\left(\frac{1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}}{1}\right)=1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

۳ـ (۱)

$$(\sqrt[4]{2})^{-\infty}=\frac{1}{(\sqrt[4]{2})^{+\infty}}=\frac{1}{(\text{۱/خورده‌ای})^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=0$$

۴ـ (۳)

$$-2\sin\frac{x+3x}{2}\sin\frac{x-3x}{2}\underset{x\to 0}{\sim}(3x+x)\left(\frac{3x-x}{2}\right)=4x^2$$

۵ـ (۲)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{a\cot^2 x}=1\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)\sin^2 x}{a\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{a(1+\sin x)}=\frac{1}{2a}=1\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

۶ـ (۳)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{1-x}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{\Rightarrow}\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{-1}=1$$

۷ـ (۳)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{ax^b}=1\overset{HOP}{\Rightarrow}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(1+x)^2}}}{abx^{b-1}}=1\Rightarrow\frac{\frac{1}{3}}{abx^{b-1}}=1$$

$$abx^{b-1}=\frac{1}{3}x^0\Rightarrow\begin{cases}b-1=0\\ ab=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=1\\ a=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac{4}{3}$$

راه دوم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{3}x-1}{ax^b}=1\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x}{ax^b}=1\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\ b=1\end{cases}\Rightarrow a+b=\frac{4}{3}$$

۸ـ (۴)

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-1)}{-2(x+1)^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2(x-1)}{-2(x+1)^2}=1$$

۹ـ (۱)

$$x-\sin x\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{6}x^3\Rightarrow 4x-\sin 4x\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{6}(4x)^3$$

$$\sin 4x-4x\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{32}{3}x^3\Rightarrow ab=-\frac{32}{3}\times 3=-32$$

۱۰ـ (۳)

$$\lim_{x\to\pi}\frac{2+2\cos x}{(x-\pi)^2}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{\Rightarrow}\lim_{x\to\pi}\frac{-2\sin x}{2(x-\pi)}=\frac{0}{0}\overset{HOP}{\Rightarrow}\lim_{x\to\pi}\frac{-2\cos x}{2}=1$$

تست (۱۱)

۱ـ حاصل $\lim\limits_{x\to n^-}(\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor)$، $(n\in z)$ **کدام است؟**

۱) ۰　　۲) ۱　　۳) ۱−　　۴) وجود ندارد

۲ـ هرگاه $f(x)=\begin{cases}5 & ,(x\geq\sqrt{3})\\ 3 & ,(x<\sqrt{3})\end{cases}$، آنگاه $\lim\limits_{x\to(\sqrt{3})^-}f(x)$ ، **کدام است؟**

۱) $f(10)$　　۲) $f(\frac{\sqrt{3}}{3})$　　۳) $f(\sqrt{3})$　　۴) $f(\sqrt{7})$

۳ـ حد تابع $f(x)=\begin{cases}10x & ,(|x|>2)\\ 2x & ,(\lfloor x\rfloor=1)\end{cases}$ **وقتی** $x\to 2^-$ **کدام است؟**

۱) ۲　　۲) ۲۰　　۳) ۴　　۴) موجود نیست

۴ـ هرگاه $f(x)=\begin{cases}10 & ,(x\in z)\\ -10 & ,(x\notin z)\end{cases}$، آنگاه $\lim\limits_{x\to 5}f(x)$ **برابر است با:**

۱) ۱۰　　۲) ۱۰−　　۳) ۰　　۴) موجود نیست

۵ـ تابع $f(x)=(3x^2-8x+5)\lfloor x\rfloor$ **در چند نقطه به طول صحیح حد دارد؟**

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) هیچ　　۴) بی‌شمار

۶ـ تابع $f(x)=(x^3-3x^2+2x)\lfloor x\rfloor$ **در چند نقطه به طول صحیح حد دارد؟**

۱) ۰　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

۷ـ تابع $f(x)=\begin{cases}x^3-3x^2+2x & ,(x\in z)\\ 0 & ,(x\notin z)\end{cases}$ **در چند نقطه به طول صحیح حد دارد؟**

۱) سه نقطه　　۲) ۲ نقطه　　۳) بی‌شمار نقطه　　۴) هیچ نقطه

۸ـ تابع $f(x)=\begin{cases}x^3-1 & ,(x\in Q)\\ x-1 & ,(x\notin Q)\end{cases}$ **در چند نقطه با طول گویا، حد دارد؟**

۱) سه نقطه　　۲) دو نقطه　　۳) هیچ نقطه　　۴) بی‌شمار نقطه

۹ـ تابع $f(x)=\sin\frac{\pi}{x-1}$ **مفروض است، کدام دو دنباله‌ی زیر، گویای عدم وجود حد تابع f در** $x=1$ **می‌باشند؟**

۱) $\{\frac{1}{2n\pi}\},\{\frac{1}{n\pi}\}$　　۲) $\{1+\frac{1}{2n\pi}\},\{1+\frac{1}{n\pi}\}$

۳) $\{1+\frac{1}{2n}\},\{1+\frac{1}{2n+1}\}$　　۴) $\{1+\frac{1}{2n+1}\},\{\frac{1}{2n}\}$

۱۰ـ کدام دو دنباله‌ی زیر نشانگر عدم وجود حد تابع $f(x)=\begin{cases}1 & ,(x\in Q)\\ 0 & ,(x\in R-Q)\end{cases}$ **در نقطه‌ی** $x=1$ **می‌باشند؟**

۱) $\{1+\frac{2}{n}\},\{1+\frac{1}{n}\}$　　۲) $\{1-\frac{\sqrt{3}}{n}\},\{1+\frac{\sqrt{2}}{n}\}$　　۳) $\{1+\frac{\sqrt{2}}{n}\},\{\frac{1}{2n}\}$　　۴) $\{n-2\},\{n+1\}$

۱ـ (۳)
$$\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} ۰ & ,(x \in z) \\ -۱ & ,(x \notin z) \end{cases}$$
$$x \to n^- \Rightarrow x \notin z \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -۱ \Rightarrow \lim_{x \to n^-} (\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor) = -۱$$

۲ـ (۲)
$$\lim_{x \to (\sqrt{۳})^-} f(x) = ۳ = f(\frac{\sqrt{۳}}{۳})$$

۳ـ (۳)
$$f(x) = \begin{cases} ۱۰x & ,(x < -۲ \quad ,x > ۲) \\ ۲x & ,(۱ \le x < ۲) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۴$$

۴ـ (۲)
$$x \to ۵ \Rightarrow x \notin z \Rightarrow f(x) = -۱۰ \Rightarrow \lim_{x \to ۵} f(x) = -۱۰$$

۵ـ (۱)
$$۳x^۲ - ۸x + ۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = \frac{۵}{۳} \end{cases}$$

۶ـ (۴)
$$x^۳ - ۳x^۲ + ۲x = ۰ \Rightarrow x(x^۲ - ۳x + ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱ \\ x = ۲ \end{cases}$$

۷ـ (۳)
$$n \in z \Rightarrow x \to n \Rightarrow x \notin z \Rightarrow f(x) = ۰ \Rightarrow \lim_{x \to n} f(x) = ۰$$

۸ـ (۱)
$$x^۳ - ۱ = x - ۱ \Rightarrow x^۳ = x \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases}$$

۹ـ (۳)
$$a_n = ۱ + \frac{۱}{۲n} \Rightarrow f(a_n) = \sin ۲n\pi = ۰ \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = ۰$$
$$b_n = ۱ + \frac{۱}{۲n+۱} \Rightarrow f(b_n) = \sin(۲n+۱)\frac{\pi}{۲} = ۱ \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(b_n) = ۱$$

۱۰ـ (۳)
$$a_n = ۱ + \frac{\sqrt{۲}}{n} \text{ اصم } \Rightarrow f(a_n) = ۰ \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = ۰$$
$$b_n = ۱ + \frac{۳}{n} \text{ گویا } \lim_{n \to \infty} f(b_n) = ۱ \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(b_n) = ۱ \qquad ۰ \ne ۱$$

ادب از که آموختی، از بی‌ادبان. (لقمان حکیم)

تست (۱۲)

۱ـ حاصل $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(x+1)^2}{3x^2-7x+1}\right)^{\frac{2x+1}{3+x}}$، کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) 0 ۳) $\sqrt[3]{e^2}$ ۴) $\frac{1}{9}$

۲ـ حاصل $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{\frac{n^2+1}{2}}$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) 0 ۳) $\sqrt{e^3}$ ۴) $\sqrt[3]{e^2}$

۳ـ حاصل $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+1}{3x+2}\right)^{2x}$، کدام است؟

۱) $e^{\frac{4}{3}}$ ۲) $e^{\frac{8}{3}}$ ۳) $\frac{16}{9}$ ۴) $+\infty$

۴ـ حاصل $\lim_{x\to+\infty}(x\,\mathrm{Ln}(x+1)-x\,\mathrm{Ln}x)$، برابر است با:

۱) ۱ ۲) $+\infty$ ۳) $-\infty$ ۴) 0

۵ـ $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ برابر است با:

۱) 0 ۲) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ۳) ۱ ۴) $\sqrt{e}$

۶ـ $\lim_{x\to 0}\frac{10^x-5^x}{x}$ برابر است با:

۱) $+\infty$ ۲) $\mathrm{Ln}2$ ۳) $2\mathrm{Ln}2$ ۴) $-\mathrm{Ln}2$

۷ـ حاصل $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin(e^x)}{e^x+2x}$ برابر است با:

۱) 0 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) e ۴) ۱

۸ـ $\lim_{x\to+\infty}\log_{0/01}^{(x+1)}$ کدام است؟

۱) $+\infty$ ۲) 0 ۳) $-\infty$ ۴) ۱

۹ـ حاصل $\lim_{x\to+\infty}\log_{(x+1)}^{(2x+1)}$ برابر است با:

۱) $\mathrm{Ln}2$ ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۰ـ $\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{Ln}(x^3+1)-3\mathrm{Ln}(5x-1))$ برابر است با:

۱) $+\infty$ ۲) $-\infty$ ۳) 0 ۴) $-\mathrm{Ln}125$

۱ـ (۴) $\sim \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^۲}{۳x^۲}\right)^{\frac{۲x}{x}} = \left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ = \frac{۱}{۹}$

۲ـ (۳) $۱^\infty \Rightarrow (f(x))^{g(x)} \underset{\substack{x\to a\\ f(x)\to ۱\\ g(x)\to+\infty}}{\sim} e^{g(x)(f(x)-۱)} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{n^۲+۱}{۲}(۱+\frac{۳}{n^۲}-۱)} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{۳n^۲}{۲n^۲}} = e^{\frac{۳}{۲}} = \sqrt{e^۳}$

۳ـ (۴) $\sim \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{۴x}{۳x}\right)^{۲x} = \left(\frac{۴}{۳}\right)^{+\infty} = +\infty$

۴ـ (۱) $\lim\limits_{x\to+\infty} Ln\frac{(x+۱)^x}{x^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} Ln\left(\frac{x+۱}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to+\infty} Ln\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^x = Lne = ۱$

۵ـ (۲) $۱^\infty \Rightarrow \sim \lim\limits_{x\to ۰} e^{\frac{۱}{x^۲}(\cos x - ۱)} \sim \lim\limits_{x\to ۰} e^{\frac{۱}{x^۲}(-\frac{x^۲}{۲})} = e^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{e}}$

۶ـ (۲) $\frac{۰}{۰} \overset{HOP}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to ۰} \frac{۱۰^x Ln۱۰ - ۵^x Ln۵}{۱} = Ln۱۰ - Ln۵ = Ln۲$

یادآوری: $(a^x)' = a^x Lna$

۷ـ (۱) $\frac{\infty}{\infty} \sim \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = ۰$ (سرعت رشد)

۸ـ (۳) چون پایه‌ی لگاریتم بین ۰ و ۱ است لذا هر چه x، بزرگ شود $\log^x_{۰/۰۱}$ کوچک می‌شود.

$\log^\infty_{۰/۰۱} = -\infty$

۹ـ (۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Ln(۲x+۱)}{Ln(x+۱)} = \frac{\infty}{\infty} \overset{HOP}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{۲}{۲x+۱}}{\frac{۱}{x+۱}} \sim \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x}{۲x} = ۱$

یادآوری: $\log^a_b = \frac{Lna}{Lnb}$

۱۰ـ (۴) $\lim\limits_{x\to+\infty} Ln\frac{x^۳+۱}{(۵x-۱)^۳} = Ln\frac{۱}{۱۲۵} = Ln۱ - Ln۱۲۵ = -Ln۱۲۵$

از کوچکی میل داشتم بزرگ باشم. «ویکتور هوگو»

ایمان به خداوند پیدا کنید زیرا به چنین عقیده‌ئی نیازمند می‌باشید. (امانوئل کانت)

تست (۱۳)

۱ـ حاصل $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{Ln2}{n})^n$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) e ۴) $\frac{e}{2}$

۲ـ حاصل $\lim_{x\to 0^+}\sqrt[x]{1-nx}$ کدام است؟

۱) e^n ۲) e^{-n} ۳) $e^{\frac{1}{n}}$ ۴) $e^{-\frac{1}{n}}$

۳ـ حاصل $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$، کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $+\infty$ ۴) $\frac{1}{2}$

۴ـ $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n}{n+2})^{3n+1}$ کدام است؟

۱) e^3 ۲) e^6 ۳) $\frac{1}{e^3}$ ۴) $\frac{1}{e^6}$

۵ـ حاصل $\lim_{x\to+\infty}(\cos\frac{n}{x}+n\sin\frac{n}{x})^x$، کدام است؟

۱) e^n ۲) e^{n^2} ۳) e^{2n} ۴) e^{-n^2}

۶ـ حاصل $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x-n}{x+n})^x$ برابر است با:

۱) e^{-2n} ۲) e^{2n} ۳) e^{-n} ۴) e^n

۷ـ حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$، کدام است؟

۱) e ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) e^2 ۴) $\frac{1}{e^2}$

۸ـ حاصل $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}}$، کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{e}$ ۲) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ ۳) $\frac{-1}{\sqrt[3]{e}}$ ۴) $-\sqrt[3]{e}$

۹ـ حاصل $\lim_{x\to a}(\frac{\sin x}{\sin a})^{\frac{1}{x-a}}$، کدام است؟

۱) $e^{\tan a}$ ۲) $e^{\cot a}$ ۳) $e^{\cos a}$ ۴) $e^{\sin a}$

۱۰ـ حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cot 2x\tan(x+\frac{\pi}{4})$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) $+\infty$ ۳) ۰ ۴) ۲

۱ـ (۲) $1^\infty \Rightarrow \sim e^{\lim_{n\to+\infty} n(1+\frac{Ln2}{n}-1)} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{nLn2}{n}} = e^{Ln2} = 2$

یادآوری: $e^{lnx} = x$

۲ـ (۲) $1^\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1-nx)^{\frac{1}{x}} \sim e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(1-nx-1)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{-nx}{x}} = e^{-n}$

۳ـ (۲) $\lim_{n\to+\infty}(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} = (0^+)^{0^+} \Rightarrow \sim e^{\frac{1}{n}Ln\frac{1}{n}} = e^{-\frac{Lnn}{n}} = e^{\frac{-\infty}{\infty}}$

$\overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{-\frac{1}{n}}{1}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}} = e^0 = 1$

یادآوری: $a^x = e^{xLna}$

۴ـ (۴) $1^\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} e^{(3n+1)(\frac{n}{n+2}-1)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{-2(3n+1)}{n+1}} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$

۵ـ (۲) $1^\infty \sim \lim_{x\to+\infty}(1+n(\frac{n}{x}))^x = \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{n^2}{x})^x = e^{n^2}$

۶ـ (۱) $1^\infty \quad \lim_{x\to+\infty} e^{x(\frac{x-n}{x+n}-1)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{-2nx}{x+n}} = e^{-2n}$

۷ـ (۲) $1^\infty \sim \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\tan 2x(\tan x-1)} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\frac{-2\tan x}{1-\tan^2 x}(1-\tan x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} e^{\frac{-2\tan x}{1+\tan x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

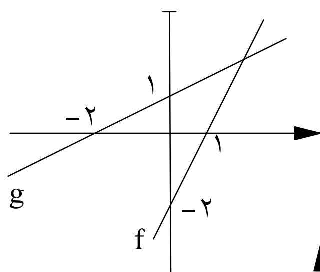
۸ـ (۲) $1^\infty \sim \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{1-\cos x}(\frac{\sin x}{x}-1)} \sim \lim_{x\to 0} e^{\frac{-\frac{1}{6}x^3}{x(\frac{x^2}{2})}} = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

۹ـ (۲) $1^\infty \sim \lim_{x\to a} e^{\frac{1}{x-a}(\frac{\sin x}{\sin a}-1)} = \lim_{x\to a} e^{\frac{\sin x-\sin a}{(x-a)\sin a}} \overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x\to a} e^{\frac{\cos x}{\sin a}} = e^{\cot a}$

۱۰ـ (۴) $0\times\infty \Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cot 2x}{\cot(x+\frac{\pi}{4})} \overset{HOP}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-2(1+\cot^2 2x)}{-(1+\cot^2(x+\frac{\pi}{4}))} = 2$

از حکمت گرسنه و از طعام سیر باش. «لقمان حکیم»

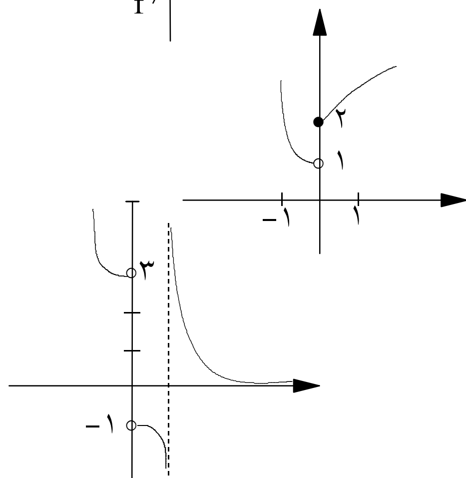
وجدان خدای حاضر در انسان است. «ویکتورهوگو»



تست (۱۴)

۱ـ هرگاه نمودار f و g به صورت روبرو باشد، $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$، کدام است؟

۱) ۴ ‏ ۲) ۴- ‏ ۳) $\frac{1}{4}$ ‏ ۴) $\frac{-1}{4}$



۲ـ اگر شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ باشد،

حاصل $\lim_{x\to 1} (f(x-1) + f(1-x))$ کدام است؟

۱) ۱ ‏ ۲) ۲ ‏ ۳) ۳ ‏ ۴) ۴

۳ـ هرگاه نمودار f به صورت مقابل باشد،

حاصل $\lim_{x\to +\infty} (fof)(x)$، کدام است؟

۱) ۱- ‏ ۲) ۱ ‏ ۳) ۳ ‏ ۴) ۰

۴ـ هرگاه $f(x) = x + \sin\frac{1}{x}$ و $g(x) = x\cos x$، آنگاه کدام تابع در $x = 0$ حد دارد؟

۱) $f+g$ ‏ ۲) $f-g$ ‏ ۳) fg ‏ ۴) $\frac{f}{g}$

۵ـ اگر $f(x) = \begin{cases} x & ,(x \ge 1) \\ -1 & ,(x < 1) \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -1 & ,(x \ge 1) \\ x & ,(x < 1) \end{cases}$، آنگاه کدام تابع در $x = 1$، دارای حد است؟

۱) $f+g$ ‏ ۲) $f.g$ ‏ ۳) $\frac{f}{g}$ ‏ ۴) هر سه گزینه

۶ـ هرگاه f تابعی باشد که $\lim_{x\to 5} f(x) = -10$، در این صورت $\lim_{x\to -5} f(-x) + \lim_{x\to \frac{5}{7}} f(7x)$ برابر است با:

۱) ۵ ‏ ۲) ۰ ‏ ۳) ۱۰- ‏ ۴) ۲۰-

۷ـ فرض کنید f تابعی زوج باشد و $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -5$، آنگاه $\lim_{x\to (-1)^+} f(x)$ کدام است؟

۱) ۵ ‏ ۲) ۵- ‏ ۳) ۱ ‏ ۴) قابل تعیین نیست

۸ـ هرگاه $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$، آنگاه کدام درست است؟

۱) $\forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \forall x(x > -M \Rightarrow f(x) > N)$ ‏ ۲) $\forall M > 0\ \exists N > 0 \quad : \forall x(x < -M \Rightarrow f(x) > N)$

۳) $\forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \forall x(x < M \Rightarrow f(x) > N)$ ‏ ۴) $\forall N > 0\ \exists M > 0 \quad : \forall x(x < -M \Rightarrow f(x) > N)$

۹ـ اگر $x > M$، ایجاب کند $\sqrt{x^2 - 2x} > N$، در آن صورت حداقل M، کدام است؟

۱) $\sqrt{N^2 - 1}$ ‏ ۲) $\sqrt{N^2 + 1}$ ‏ ۳) $\sqrt{N^2 - 1} + 1$ ‏ ۴) $\sqrt{N^2 + 1} + 1$

۱۰ـ اگر $x < -M$ ایجاب کند، $\left| \frac{2x^3 + 1}{x^3 - 1} - 2 \right| < 0/03$ حداقل مقدار M، کدام است؟

۱) $\sqrt[3]{99}$ ‏ ۲) $-\sqrt[3]{99}$ ‏ ۳) $\sqrt[3]{101}$ ‏ ۴) $-\sqrt[3]{101}$

۱ـ (۱)
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۱ \Rightarrow \frac{x}{۱}+\frac{y}{-۲}=۱ \Rightarrow y=f(x)=۲x-۲$$
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=۱ \Rightarrow \frac{x}{-۲}+\frac{y}{۱}=۱ \Rightarrow y=g(x)=\frac{۱}{۲}x+۱$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x-۲}{\frac{۱}{۲}x+۱}=۴$$

۲ـ (۳)
$$\lim_{x\to ۱^+}(f(x-۱)+f(۱-x))=\lim_{t\to ۰^+}(f(t)+f(-t))=۲+۱=۳$$
$$\lim_{x\to ۱^-}(f(x-۱)+f(۱-x))=\lim_{t\to ۰^-}(f(t)+f(-t))=۱+۲=۳$$

۳ـ (۱)
$$\lim_{x\to+\infty}(fof)(x)=\lim_{x\to ۰^+}f(x)=-۱ \qquad (\lim_{x\to+\infty}f(x)=۰^+)$$

۴ـ (۳) g در ۰ حد دارد و حدش در ۰، صفر است و f در ۰ کراندار است. بنابراین:
$$\lim_{x\to ۰}f(x)g(x)=\text{کراندار}\times ۰=۰$$

۵ـ (۴)
$$(f+g)(x)=\begin{cases}x-۱ & ,(x\geq ۱)\\ x-۱ & ,(x<۱)\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۱}(f+g)(x)=۰$$
$$(fg)(x)=\begin{cases}-x & ,(x\geq ۱)\\ -x & ,(x<۱)\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۱}(fg)(x)=-۱$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\begin{cases}-x & ,(x\geq ۱)\\ -\frac{۱}{x} & ,(x<۱)\end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to ۱}(\frac{f}{g})(x)=-۱$$

۶ـ (۴)
$$\lim_{x\to -۵}f(-x)=\lim_{t\to ۵}f(t)=-۱۰$$
$$\Rightarrow \text{جمع}=-۲۰$$
$$\lim_{x\to \frac{۵}{۷}}f(۷x)=\lim_{t\to ۵}f(t)=-۱۰$$

۷ـ (۲)
$$f(-x)=f(x)$$
$$\lim_{x\to(-۱)^+}f(x)=\lim_{x\to ۱^-}f(x)=-۵$$

۸ـ (۴)

۹ـ (۴)
$$x>M \Rightarrow \sqrt{x^۲-۲x}>N \Rightarrow x^۲-۲x>N^۲ \Rightarrow (x-۱)^۲-۱>N۲ \Rightarrow |x-۱|>\sqrt{۱+N^۲}$$
$$x>۱+\sqrt{۱+N^۲} \Rightarrow M\geq ۱+\sqrt{۱+N^۲} \Rightarrow \text{Min}(M)=۱+\sqrt{۱+N^۲}$$

۱۰ـ (۱)
$$x<-M \Rightarrow \left|\frac{۲x^۳+۱-۲x^۳+۲}{x^۳-۱}\right|<\frac{۳}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۳}{|x^۳-۱|}<\frac{۳}{۱۰۰}$$
$$|x^۳-۱|>۱۰۰ \Rightarrow -(x^۳-۱)>۱۰۰ \Rightarrow x^۳<-۹۹ \Rightarrow x<-\sqrt[۳]{۹۹} \Rightarrow M\geq\sqrt[۳]{۹۹}$$

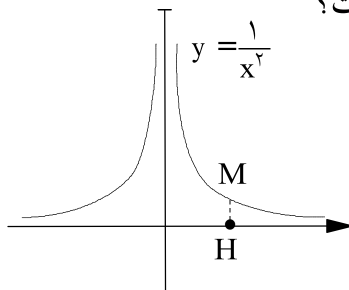
تست (۱۵)

۱ـ اگر $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x}=2$، برابر هر $\varepsilon>0$ داریم:

۱) $x>\frac{1}{4\varepsilon}\Rightarrow\left|\frac{2x+1}{x}-2\right|<\varepsilon$ ۲) $x>\frac{1}{2\varepsilon}\Rightarrow\left|\frac{2x+1}{x}-2\right|<\varepsilon$

۳) $x>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow\left|\frac{2x+1}{x}-2\right|<\varepsilon$ ۴) $x>\frac{1}{3\varepsilon}\Rightarrow\left|\frac{2x+1}{x}-2\right|<\varepsilon$

۲ـ با توجه به شکل مقابل، برای چه مقادیری از x، اندازه‌ی MH از 10^{-6} کمتر است؟



۱) $x>10^{2}$

۲) $x>10^{3}$

۳) $x>10^{6}$

۴) $x>10^{12}$

۳ـ در اثبات $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{3x-6}=\frac{2}{3}$، به کمک تعریف حد، به ازاء $\varepsilon=0/04$، کوچکترین مقادیر x، از کدام عدد بیشتر است؟

۱) ۷۵ ۲) ۷۶ ۳) ۷۷ ۴) ۷۸

۴ـ اگر به ازاء هر x که $0<|x-1|<\delta$، داشته باشیم: $\left|\frac{2x^2+x}{x}-3\right|<\frac{1}{5}$ در این صورت δ، کدام است؟

۱) $\frac{1}{10}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{2}{5}$

۵ـ اگر داشته باشیم: $\sqrt[4]{2-x}<\frac{1}{100}\Rightarrow 2-\delta<x<2$ آنگاه δ، کدامیک از مقادیر زیر را می‌تواند اختیار کند؟

۱) 10^{-4} ۲) 10^{-6} ۳) 10^{-7} ۴) 10^{-10}

۶ـ اگر به ازاء هر x که $\frac{7}{2}<x<\frac{9}{2}$ و $x\neq 4$، داشته باشیم: $\left|\frac{x^2-4x}{3x-12}-\frac{4}{3}\right|<\varepsilon$، δ کدامیک از مقادیر زیر را می‌تواند اختیار کند؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{1}{12}$ ۳) $\frac{1}{9}$ ۴) $\frac{1}{5}$

۷ـ در تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{4x^2-1}{2x-1}, & (x>1)\\ 5x-2, & (x\le 1)\end{cases}$ اگر $0<|x-1|<\delta$، آنگاه $|f(x)-3|<0/01$، بزرگترین مقدار δ کدام است؟

۱) ۰/۰۰۱ ۲) ۰/۰۰۲ ۳) ۰/۰۰۳ ۴) ۰/۰۰۵

۸ـ با توجه به تعریف حد برای حد $\lim_{x\to1}x^3=1$، اگر $\varepsilon>0$ مفروض باشد، مقدار $\delta>0$ کدام است؟

۱) $\min\{1,\frac{\varepsilon}{7}\}$ ۲) $\min\{1,\frac{\varepsilon}{6}\}$ ۳) $\min\{1,\frac{\varepsilon}{2}\}$ ۴) $\min\{1,\frac{\varepsilon}{5}\}$

۱ـ (۳) $\varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad : \forall x \, (x > M \quad \Rightarrow |\frac{2x+1}{x} - 2| < \varepsilon)$

$|\frac{2x+1-2x}{x}| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} < \varepsilon \quad \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$

۲ـ (۲) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad : \forall x \, (x > M \quad \Rightarrow |\frac{1}{x^2} - 0| < \varepsilon$

$x^2 > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad |x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

$\varepsilon = 10^{-6} \quad \Rightarrow x > \frac{1}{\sqrt{10^{-6}}} \quad \Rightarrow \quad x > \frac{1}{10^{-3}} \quad \Rightarrow x > 10^3$

۳ـ (۳) $\varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad : \forall x \, (x > M \quad \Rightarrow |\frac{2x+5}{3x-6} - \frac{2}{3}| < \varepsilon)$

$\left| \frac{2x+5-2x+4}{3x-6} \right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \frac{3}{|x-2|} < \varepsilon \quad \Rightarrow |x-2| > \frac{3}{\varepsilon} \quad \Rightarrow x > 2 + \frac{3}{\varepsilon} \quad \Rightarrow x > 2 + \frac{3}{0/04} \quad \Rightarrow x > 77$

۴ـ (۱) $0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |2x+1-3| < \frac{1}{5} \quad \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \delta \le \frac{1}{10}$

۵ـ (۴) $2-\delta \quad < x < 2 \quad \Rightarrow \sqrt[4]{2-x} < \frac{1}{100} \quad \Rightarrow -\delta < x-2 < 0 \quad \Rightarrow 2-x < \frac{1}{10^8}$

$10^{-\frac{1}{8}} < x-2 < 0 \quad \Rightarrow \delta \le \frac{1}{10^8} \quad \Rightarrow \delta \le 10^{-8}$

۶ـ (۴) $0 < |x-4| < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \left| \frac{x(x-4)}{3(x-4)} - \frac{4}{3} \right| < \varepsilon \quad \Rightarrow |\frac{x}{3} - \frac{4}{3}| < \varepsilon \quad \Rightarrow |x-4| < 3\varepsilon \quad \Rightarrow \delta \le 3\varepsilon$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \le 3\varepsilon \quad \Rightarrow \varepsilon \ge \frac{1}{6}$

۷ـ (۲) $0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow |\frac{4x^2-1}{2x-1} - 3| < \frac{1}{100} \quad \Rightarrow |2x+1-3| < \frac{1}{100}$

$|x-1| < \frac{1}{200} \quad \Rightarrow \delta \le \frac{1}{200} \quad \Rightarrow 0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |5x-2-3| < \frac{1}{100}$

$\Rightarrow \ |x-1| < \frac{1}{500} \quad \Rightarrow \delta \le \frac{1}{500} \Rightarrow \delta \le \mathrm{Min} \quad \{\frac{1}{200}, \frac{1}{500}\} \quad \Rightarrow \delta \le \frac{1}{500} \quad \Rightarrow \delta = 0/002$

۸ـ (۱) $\varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad : \forall x (0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow |x^3 - 1| < \delta)$

$|x-1| \, |x^2+x+1| < \delta \quad \Rightarrow 0 < |x-1| < 1 \quad \Rightarrow 0 < x < 2 \quad \Rightarrow \begin{cases} 0 < x^2 < 4 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \quad \Rightarrow x^2 + x < 6$

$|x^2+x+1| < 7 \quad \Rightarrow |x-1| \, |x^2+x+1| \quad < \quad 7|x-1| < \varepsilon \quad \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{7} \quad \Rightarrow \delta \le \mathrm{Min}\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$

فصل پانزدهم

پیوستگی

در این بخش‌به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

ابتدا پیوستگی یک تابع در یک نقطه، سپس پیوستگی یک تابع در یک بازه (اعم از بازه‌های باز، نیم باز و بسته) را تعریف نموده و پس از آن به تعریف حدود پیوستگی یک تابع پرداخته و ضمن بیان این مطلب، شما را با حدود پیوستگی توابع مختلف آشنا می سازیم.

تذکر مهم: برای درک بهتر این مبحث، به نمودار توابع بیشتر توجه کنید.

۱ـ تعریف پیوستگی یک تابع در یک نقطه: تابع f را در نقطه‌ی $x_\circ \in R$ پیوسته گوئیم هرگاه سه شرط زیر توأماً برقرار باشند.

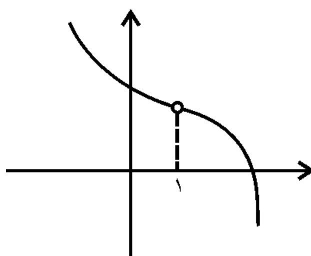
۱) $x_\circ \in D_f$ باشد یعنی $f(x_\circ)$ تعریف شده یا معین باشد به عبارت دیگر، $f(x_\circ) \in R$ باشد.

۲) تابع در نقطه‌ی $x_\circ$، حد داشته باشد (یعنی هم حد چپ و هم حد راست داشته و این دو حد با یکدیگر برابر باشند)

۳) حد تابع در نقطه‌ی $x_\circ$، با مقدار تابع در این نقطه، یعنی $f(x_\circ)$ برابر باشد.

تذکر مهم: از لحاظ نموداری، f در $x_\circ$ پیوسته (متصل) است هرگاه در این نقطه، نمودار تابع به هر صورتی قطع (پاره) نشده باشد، توجه داشته باشید که اگر دو سر نمودار در نقطه‌ای به هم نزدیک شده باشند، حتی اگر به هم نچسبیده باشند (به صورت شکل زیر)

تابع در این نقطه (نقطه‌ی $x = ۱$) حد دارد اما پیوسته نیست.



تذکر: هریک از سه شرط فوق، شرط لازم برای پیوستگی تابع f در نقطه‌ی $x_\circ$ می‌باشند ولی کافی نیستند بنابراین:

۱) هرگاه $x_\circ \notin D_f$، f در $x_\circ$ ناپیوسته است. **مثال:** تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ در $x = \circ$ ناپیوسته است، زیرا $\circ \notin D_f$

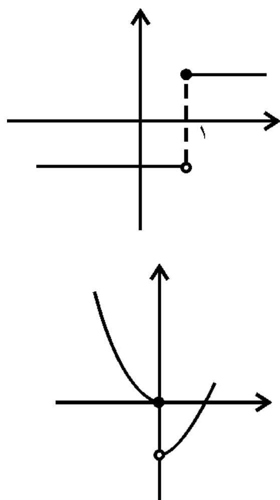
۲) هرگاه f در $x_\circ$، حد نداشته باشد، در $x_\circ$ ناپیوسته است. **مثال:** تابع $f(x) = \lfloor x \rfloor$ در نقاط صحیح ناپیوسته است، زیرا در این نقاط حد ندارد.

۳) هرگاه f در $x_\circ$ حد داشته باشد و $f(x_\circ)$ تعریف شده باشد، اما حد تابع با $f(x_\circ)$ برابر نباشد بازهم f در $x_\circ$ ناپیوسته است.

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^{2}-1}{x-1} & ,(x\neq 1)\\ 3 & ,(x=1)\end{cases}$ در $x=1$ ناپیوسته است، زیرا حد تابع در نقطه‌ی $x=1$ با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست.

تذکر: هرگاه $x_{\circ}\in D_f$، ممکن است f در $x_{\circ}$ پیوسته باشد و یا نباشد.

تعریف پیوستگی راست و پیوستگی چپ یک تابع:



تابع f را در نقطه‌ی $x_{\circ}$، از راست پیوسته گوئیم هرگاه اولاً $f(x_{\circ})$ تعریف شده، و تابع در $x_{\circ}$، حد راست داشته باشد، ثانیاً حد راست تابع با $f(x_{\circ})$ برابر باشد به شکل توجه کنید: تابع مقابل در $x=1$ از راست پیوسته است در واقع نقطه‌ی توپر، به سمت راست منحنی تابع، وصل است به همین ترتیب تابع f را در نقطه‌ی $x_{\circ}$، از چپ پیوسته گوئیم هرگاه اولاً $f(x_{\circ})$ تعریف شده و تابع در $x_{\circ}$، حد چپ داشته باشد، ثانیاً حد چپ تابع با $f(x_{\circ})$ برابر باشد به شکل توجه کنید: تابع مقابل در $x=0$ از چپ پیوسته است در واقع نقطه‌ی توپر به سمت چپ تابع وصل است.

قضیه: تابع f در نقطه‌ی $x_{\circ}$ پیوسته است اگر و فقط اگر که در این نقطه هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

مثال: پیوستگی، پیوستگی راست و پیوستگی چپ تابع $f(x)=x\lfloor x\rfloor$ را در نقطه‌ی $x=2$ بررسی کنید؟

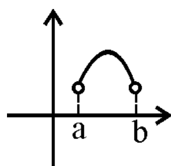
$f(x)=2\lfloor 2\rfloor=4$

حد راست $=\lim\limits_{x\to 2^{+}} x\lfloor x\rfloor=2^{+}\lfloor 2^{+}\rfloor=2\times 2=4$

حد چپ $=\lim\limits_{x\to 2^{-}} x\lfloor x\rfloor=2^{-}\lfloor 2^{-}\rfloor=2\times 1=2$

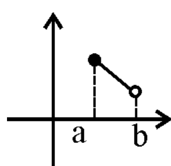
چون فقط حد راست تابع با مقدار تابع، برابر است، لذا f در $x=2$ فقط پیوستگی راست دارد.

۲ـ تعریف پیوستگی یک تابع در یک بازه:



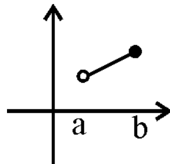
الف) تابع f را در بازه‌ی باز (a,b) پیوسته گوئیم هرگاه f در تمام نقاط درون این بازه (به نقاط a و b کاری نداریم) پیوسته باشد (به شکل توجه کنید)

مثال: تابع $f(x)=\frac{1}{x-1}$ در بازه‌ی $(3,5)$ پیوسته است، زیرا در تمام نقاط این بازه، پیوسته است.



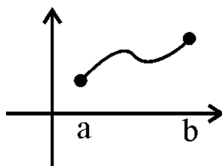
ب) تابع f را دربازه‌ی نیم‌باز $[a,b)$ پیوسته گوئیم هرگاه اولاً f در بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد، ثانیاً در نقطه‌ی a، پیوستگی راست داشته باشد (به شکل توجه کنید)

مثال: تابع $y=\sqrt{x}$ در بازه‌ی $[0,9)$ پیوسته است (توجه داشته باشید که این تابع در نقطه‌ی ۰، پیوسته نیست، اما در این نقطه پیوستگی راست دارد)



ج) تابع f را در بازه‌ی نیم باز $(a,b]$ پیوسته گوئیم هرگاه اولاً در بازه‌ی باز (a,b) پیوسته باشد، ثانیاً در نقطه‌ی b، از چپ پیوسته باشد. (به شکل توجه کنید)

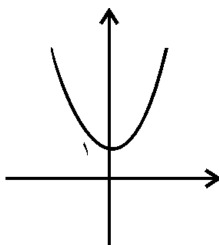
مثال: تابع $y=\lfloor -x \rfloor$ در بازه‌ی $(0,1]$ پیوسته است.



د) تابع f را در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته گوئیم هرگاه اولاً تابع در بازه‌ی باز (a,b) پیوسته باشد، ثانیاً در نقطه‌ی a از راست و در نقطه‌ی b، از چپ پیوسته باشد. (به شکل توجه کنید)

مثال: تابع $y=|x|$ در بازه‌ی بسته‌ی $[-2,2]$ پیوسته است.

۳ـ تعریف پیوستگی یک تابع در R: چون $R=(-\infty,+\infty)$، لذا تابع f را در R پیوسته گوئیم، هرگاه در تمام نقاط R، پیوسته باشد.



مثال: توابع چند جمله‌ای از جمله تابع $y=x^2+1$ در R پیوسته‌اند.

شرط پیوستگی توابع چند ضابطه‌ای:

شرط اینکه تابع $f(x)=\begin{cases} g(x) & ,(x\in D_1) \\ h(x) & ,(x\in D_2) \\ t(x) & ,(x\in D_3) \end{cases}$ در اجتماع دامنه‌ها، پیوسته باشد، آن است که اولاً هر یک از توابع g و h و t، به ترتیب در دامنه‌های خود پیوسته باشند، ثانیاً f در نقاط شکستگی نیز پیوسته باشد.

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ,(x<0) \\ 2x+1 & ,(0\le x\le 1) \\ 3x^2 & ,(1\le x) \end{cases}$ در R پیوسته است، زیرا اولاً تک‌تک ضابطه‌ها در دامنهٔ خودشان پیوسته‌اند، ثانیاً f در نقاط ۰ و ۱ نیز پیوسته است.

تعریف حدود پیوستگی یک تابع: به مجموعه نقاطی که یک تابع در آن نقاط پیوسته باشد، حدود پیوستگی آن تابع می‌گویند واضح است که:

دامنه‌ی آن تابع $\subseteq$ حدود پیوستگی هر تابع

مثال: حدود پیوستگی تابع $f(x) = \sin x$**، برابر** R **,** $g(x) = \lfloor x \rfloor$ **برابر** $R-Z$**،** $h(x) = \frac{1}{x}$**، برابر** $R-\{0\}$ **می‌باشد.**

تذکر مهم: با به خاطر آوردن و مجسم کردن شکل توابع مختلف، سعی کنید با حدود پیوستگی توابع مختلفی که معمولاً با آنها سروکار داریم آشنا شوید.

قضایا و نکاتی راجع به پیوستگی توابع: (توجه کنید که در اکثر قضایا و نکات زیر، توجه به نمودار تابع، درک آنها را آسانتر می‌کند)

۱) تابع ثابت $f(x) = c$ در R پیوسته است.

۲) توابع چند جمله‌ای در R پیوسته‌اند، بالاخص تابع $y = x^n$ در R پیوسته است.

۳) توابع $y = \sin x$, $y = \cos x$، $y = a^x$ و $y = e^x$، $y = \text{Arctan}x$، $y = \text{Arccot}x$ در R پیوسته‌اند.

۴) هرگاه توابع f و g در نقطه‌ی x_0 پیوسته باشند آنگاه

الف) تابع cf نیز در x_0 پیوسته است. ب) توابع $f \pm g$ نیز در x_0 پیوسته‌اند.

ج) fg نیز در x_0 پیوسته است. د) $\frac{1}{g}$ در x_0 هنگامی پیوسته است که $g(x_0) \neq 0$ باشد.

هـ) $\frac{f}{g}$ در x_0 هنگامی پیوسته است که $g(x_0) \neq 0$ باشد.

۵) هرگاه f در x_0 و g در $f(x_0)$ پیوسته باشند آنگاه تابع مرکب gof در x_0 پیوسته است.

۶) هرگاه f در x_0 پیوسته باشد، $|f|$ نیز در x_0 پیوسته است، اما عکس این مطلب، همواره صحیح نیست.

(مثال نقض: تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & ,(x \geq 2) \\ -1 & ,(x < 2) \end{cases}$، این تابع در $x = 2$ ناپیوسته است در صورتی که $y = |f(x)| = 1$ در $x = 2$ پیوسته است.

۷) توابع $y = |x|$ ،$y = |\cos x|$, $y = |\sin x|$, $y = |x-a| + |x-b|$, $y = |x-a| - |x-b|$ در R پیوسته‌اند.

۸) هرگاه f در x_0 پیوسته باشد، f^n نیز در x_0 پیوسته است. $(n \in N)$

۹) هرگاه f در x_0 پیوسته باشد $\sqrt[2n+1]{f}$ نیز در x_0 پیوسته است. $(n \in N)$

۱۰) هرگاه f در x_0 پیوسته باشد و در همسایگی x_0، مثبت باشد $\sqrt[2n]{f}$ نیز در x_0 پیوسته است. $(n \in N)$

به عنوان مثال، تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = 1$ پیوسته است ولی در $x = 0$ پیوسته نیست زیرا در $x = 0$، حد چپ ندارد.

۱۱) توابع $y = \tan x$ و $y = \cot x$ و $y = \sec x$ و $y = \text{cosec}x$، $y = \text{Arcsin}x$ و $y = \text{Arccos}x$، $y = \log_a^x$ $(a \neq 1, a > 0)$ در دامنه‌اشان پیوسته‌اند.

تذکر مهم: توجه داشته باشید که همه‌ی توابع در دامنه‌اشان پیوسته نیستند. به عنوان مثال: تابع $f(x) = \lfloor x \rfloor$، دامنه‌اش R است ولی در R پیوسته نیست بلکه در $R-Z$ پیوسته است.

۱۲) هرگاه یکی از توابع f و g در نقطه‌ی x_0 پیوسته و دیگری در همین نقطه ناپیوسته باشد، آنگاه توابع $f+g$ و $f-g$ در نقطه‌ی x_0، ناپیوسته‌اند.

۱۳) هرگاه توابع f و g هر دو در نقطه‌ی $x_\circ$ ناپیوسته باشند، توابع $f \pm g$، fg، $\frac{f}{g}$ در $x_\circ$ ممکن است پیوسته باشند و ممکن است ناپیوسته.

مثال: توابع $f(x)=\begin{cases}۱ & ,(x\geq ۱)\\ ۲ & ,(x<۱)\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۴ & ,(x\geq ۱)\\ ۳ & ,(x<۱)\end{cases}$ **هر دو در نقطه‌ی ۱ = x ناپیوسته‌اند ولی تابع f+g در ۱ = x پیوسته است زیرا** $(f+g)(x)=\begin{cases}۵ & ,(x\geq ۱)\\ ۵ & ,(x<۱)\end{cases}$ **در واقع تابع y = (f+g)(x) تابع ثابت ۵ = y است که همه جا، و بالاخص در ۱ = x پیوسته است.**

۱۴) دامنه‌ی پیوستگی هر تابع، همیشه زیر مجموعه‌ای از دامنه‌ی آن تابع است.

۱۵) هرگاه توابع f+g و f−g هر دو در نقطه‌ی $x_\circ$ پیوسته باشند، آنگاه توابع f و g هم در $x_\circ$ پیوسته‌اند.

تست: کدام حکم همواره صحیح است؟

۱) اگر f+g در a پیوسته باشد، آنگاه g و f نیز در a پیوسته‌اند.

۲) اگر fg در a ناپیوسته باشد، آنگاه f و g نیز در a ناپیوسته‌اند.

۳) اگر f و g در a ناپیوسته باشند، آنگاه f+g در a ناپیوسته است.

۴) اگر f در a پیوسته و g در a ناپیوسته باشد، آنگاه f+g در a ناپیوسته است.

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۴ می‌باشد.

۱۶) هرگاه تابع f در بازه‌ی بسته‌ی [a,b] پیوسته باشد، آنگاه در این بازه کراندار است.

تذکر: ممکن است تابع f در بازه‌ی بسته‌ی [a,b] پیوسته نباشد، اما در این بازه کراندار باشد، مثال تابع $f(x)=\lfloor x \rfloor$ در بازه‌ی [۱,۳]

۱۷) هرگاه تابع f در بازه‌ی بسته [a,b] پیوسته باشد، آنگاه در این بازه، Max و Min مطلق دارد. (گفتیم مطلق نگفتیم نسبی)

تذکر: ممکن است تابع f در بازه‌ی بسته‌ی [a,b] پیوسته نباشد اما در این بازه Max و Min مطلق داشته باشد. مثال: تابع $y=\lfloor x \rfloor$ در بازه‌ی [۲,۵]

تذکر مهم: اگر بازه‌ی (a,b) باز باشد، حتی اگر f پیوسته باشد ممکن است هر دو نتیجه (۱۶) و (۱۷) و یا یکی از آنها برقرار باشند و یا هیچکدام برقرار نباشند.

مثال: تابع $f(x)=۳x+۱$ در بازه‌ی باز (۳,۵−) پیوسته هست، کراندار نیز هست ولی در این بازه Max و Min مطلق ندارد.

مثال: تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ در بازه‌ی باز (۰,۱) پیوسته هست، اما در این بازه، نه کراندار است نه Max و Min مطلق دارد.

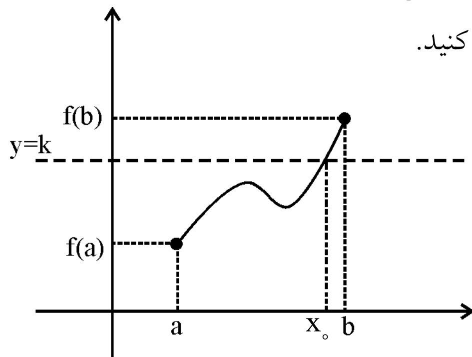
تست: هرگاه f در [a,b] پیوسته باشد کدام حکم همواره صحیح است؟

۱) f در [a,b]، Max و Min نسبی دارد. ۲) f در [a,b]، کراندار است.

۳) f در [a,b] فقط Max مطلق و یا فقط Min مطلق دارد. ۴) هر سه

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۲ می‌باشد.

۱۸) قضیه‌ی مقدار میانی: هرگاه تابع f در بازه‌ی بسته‌ی [a,b] پیوسته باشد و k عددی حقیقی بین f(a) و f(b) باشد، آنگاه خط $y = k$، نمودار تابع f را در بازه‌ی بسته‌ی [a,b]، حداقل در یک نقطه مانند $x_\circ$ قطع خواهد کرد، به عبارت دیگر، حداقل یک نقطه مانند $x_\circ$ در بازه‌ی [a,b] هست به طوریکه $f(x_\circ) = k$، به شکل توجه کنید.



مثال: ثابت کنید خط $y = \sqrt{۱۷}$، نمودار تابع $f(x) = (x ۲)(x - ۳) + x^۲$ **را در بازه‌ی [۲,۳]، حداقل یک بار قطع می‌کند؟**

حل: اولاً f در بازه‌ی [۲,۳] پیوسته است ثانیاً $f(۲) = ۴ < \sqrt{۱۷} < ۹ = f(۳)$، بنابراین طبق قضیه‌ی مقدار میانی، خط $y = \sqrt{۱۷}$، نمودار f را در بازه‌ی [۲,۳]، حداقل یک بار قطع می‌کند.

تست: هرگاه خط $y = k$، نمودار تابع $y = x^۲ - ۲x - ۱$ را در بازه‌ی [۰,۱]، حداقل در یک نقطه قطع کند، k کدام عدد زیر می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۳}{۲}$ ۴) $-\frac{۱}{۵}$

حل: باید داشته باشیم: $f(a) < k < f(b)$ لذا $-۲ < k < -۱$ و بنابراین پاسخ صحیح گزینه‌ی ۳ می‌باشد.

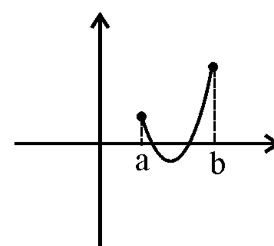
۱۹) نتیجه‌ی قضیه‌ی مقدار میانی (قضیه‌ی بولتزانو):

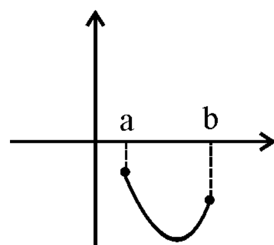
هرگاه تابع f در بازه‌ی بسته‌ی [a,b] پیوسته باشد و f(a) و f(b) مختلف العلامه باشند. ($f(a) \times f(b) < ۰$)، در این صورت حداقل یک عدد حقیقی مانند $x_\circ$ در بازه‌ی (a,b) و در نتیجه در بازه‌ی [a,b] وجود دارد، به طوریکه $f(x_\circ) = ۰$، یعنی f در این بازه، حداقل یک ریشه دارد، به عبارت دیگر، نمودار f محور xها را در بازه‌ی (a,b)، حداقل یک بار قطع خواهد کرد.

مثال: آیا معادله‌ی $x^۳ + x - ۱ = ۰$ در بازه‌ی [۰,۱] ریشه دارد یا نه، چرا؟ بلی، زیرا اولاً تابع در بازه‌ی [۰,۱] پیوسته است و ثانیاً $f(۰) \times f(۱) < ۰$ است.

تذکر ۱: توجه داشته باشید که هرگاه $f(a) \times f(b) \leq ۰$ باشد، آنگاه f در بازه‌ی بسته‌ی [a,b] حداقل یک ریشه دارد، در این صورت خود a یا خود b نیز می‌توانند ریشه‌ی معادله باشند.

تذکر ۲: توجه داشته باشید که هرگاه f(a) و f(b) متحدالعلامه باشند، f ممکن است در بازه‌ی [a,b] ریشه داشته باشد و یا نداشته باشد، به شکلهای زیر توجه کنید.





تذکر ۳: هر تغییر علامت یک تابع پیوسته در یک بازه‌ی بسته، نشانگر وجود حداقل یک ریشه در آن بازه است.

مثال: ثابت کنید هر سه ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ در بازه‌ی $[-2,2]$ قرار دارند؟

حل: اولاً f در بازه‌ی $[-2,2]$ پیوسته است و ثانیاً طبق جدول، f در بازه‌ی $[-2,2]$، سه بار تغییر علامت داده است، لذا هر سه ریشه‌ی معادله فوق در بازه‌ی $[-2,2]$ قرار دارند.

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
f(a)	−۱	۳	۱	−۱	۳

۲۰) نتیجه‌ی نهائی: فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، در این صورت داریم:

۱ـ اگر $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامه باشند، معادله‌ی $f(x) = 0$ در بازه‌ی (a,b) حداقل ۱ ریشه دارد.

۲ـ اگر $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامه باشند و f در این بازه یک به یک باشد (و یا اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی باشد) آنگاه معادله‌ی $f(x) = 0$ در بازه‌ی (a,b)، دقیقاً یک ریشه دارد.

۳ـ هرگاه $f(a)$ و $f(b)$ متحدالعلامه (همعلامت) باشند، در مورد تعداد ریشه‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ در بازه‌ی (a,b) هیچگونه حکمی نمی‌توان داد، ممکن است ریشه داشته باشد ممکن هم هست نداشته باشد.

تست: f در بازه‌ی $[-2,2]$ پیوسته است و داریم: $f(-2) = -5f(2) = -2$، نمودار f در بازه‌ی $[-2,2]$ محور xها را:

۱) قطع نمی‌کند.
۲) فقط در یک نقطه قطع می‌کند.
۳) حداقل در یک نقطه قطع می‌کند.
۴) حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

$$\begin{cases} f(-2) = -2 < 0 \\ -5f(2) = -2 \Rightarrow f(2) = \frac{2}{5} > 0 \end{cases} \Rightarrow f(-2) \times f(2) < 0$$ مختلف العلامه

لذا طبق قضیه‌ی بولتزانو، نمودار تابع f محور xها را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند.

مثال: نشان دهید که منحنی $y = \frac{x^4 + 1}{4x - 2\sin x - 1}$ در بازه‌ی $[0,1]$ حداقل یک نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

حل: چون صورت و مخرج تابع فوق هر دو در R و لذا در $[0,1]$ پیوسته‌اند، بنابراین نقطه‌ی ناپیوستگی تابع، باید ریشه‌ی مخرجش باشد، لذا کافی است ثابت کنیم مخرج کسر یعنی تابع $f(x) = 4x - 2\sin x - 1$ در بازه‌ی $[0,1]$، حداقل یک ریشه دارد و برای این منظور گوئیم چون $f(0) = -1 < 0$ و $f(1) = 3 - 2\sin 1 > 0$ است لذا طبق قضیه‌ی بولتزانو f در بازه‌ی $[0,1]$ حداقل یک ریشه دارد و بنابراین تابع داده شده در این ریشه ناپیوسته است.

تست: f تابعی پیوسته است و $f(0/2) = -5$ و $f(3) = -7$ و $f(\sqrt{5} - \sqrt{7}) = \sqrt{2}$، کدام درست است؟

۱) f حداقل یک ریشه دارد.
۲) f دقیقاً ۱ ریشه دارد.
۳) f دقیقاً ۲ ریشه دارد.
۴) f حداقل دو ریشه دارد.

حل: چون یک بار تغییر علامت داده است، لذا حداقل یک ریشه دارد.

x	$\sqrt{5} - \sqrt{7}$	۰/۲	۳
f(x)	$\sqrt{2}$	−۵	−۷

تست: f تابعی پیوسته و اکیداً نزولی است و $f(-1) = k - 2$, $f(2) = k + 1$ و $f(\frac{1}{2}) = 5$، مجموعه مقادیر k، کدام است؟

۱) $-2 < k < 2$ ۲) $0 < k < 4$ ۳) $4 < k < 7$ ۴) $4 < k < 5$

حل: چون $-1 < \frac{1}{2} < 2$ و f پیوسته و اکیداً نزولی است، لذا بایستی، $f(\frac{1}{2})$ بین $f(2)$ و $f(-1)$ باشد بنابراین داریم:

$$k + 1 < 5 < k - 2 \Rightarrow 4 < k < 7$$

۲۱) هرگاه f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و اکیداً نزولی باشد، آنگاه f^{-1} در بازه‌ی $[f(b),f(a)]$ پیوسته و اکیداً نزولی است.

۲۲) هرگاه f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و اکیداً صعودی باشد، آنگاه f^{-1} در بازه‌ی $[f(a),f(b)]$ پیوسته و اکیداً صعودی است.

۲۳) بر طبق نکات ۲۱ و ۲۲، تابع معکوس یک تابع معکوس‌پذیر پیوسته، تابعی پیوسته است.

۲۵) بر طبق نکته‌ی ۲۳، توابع $y = \text{Arcsin}x$ و $y = \text{Arccos}x$ در بازه‌ی $[-1,1]$ و توابع $y = \text{Arctan}x$ و $y = \text{Arccot}x$ در R پیوسته‌اند.

۲۶) هر تابع کسری، هنگامی پیوسته است که صورتش پیوسته بوده، مخرجش نیز پیوسته باشد، ضمناً مخرج صفر نباشد.

تست: تابع $y = \frac{x^2 + 4}{4^x + 2^x - 2}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

حل: چون صورت و مخرج تابع فوق هر دو به تنهائی پیوسته‌اند لذا:

$$4^x + 2^x - 2 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ 2^x = -2 \quad \text{غیرممکن} \end{cases}$$

پس تابع فوق فقط در نقطه‌ی $x = 0$ ناپیوسته است و لذا گزینه‌ی ۱ صحیح است.

مثال: حدود پیوستگی تابع $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\frac{1}{x} - 2}$ را بیابید؟

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 0 \\ \frac{1}{x} - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{حدود پیوستگی} = [-1,0) \cup (0,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},+\infty)$$

تست: تابع $y = \frac{3\sin x + 5}{\tan x - 1}$ در بازه‌ی $[0,2\pi]$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۳

$$f(x) = \frac{3\sin x + 5}{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}$$

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} - 1 \neq 0 \Rightarrow \tan x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

بنابراین تابع در نقاط $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$ ناپیوسته است.

۲۷) هر تابع گویا، در ریشه‌های مخرجش ناپیوسته است، به عبارت دیگر در دامنه‌اش پیوسته است. (تابع گویا، به تابعی می‌گویند که صورت و مخرجش دو چند جمله‌ای باشند)

مثال: حدود پیوستگی تابع $y = \frac{x^2 + x}{x^3 - 8}$ را بیابید؟

$$x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{حدود پیوستگی} = R - \{2\}$$

تست: تابع $y=\frac{3x+2}{x-1}$ **درکدام بازه‌ی زیر پیوسته است؟**

۱) $(0,2)$ ۲) $[-3,3]$ ۳) $(0,1]$ ۴) $(1,7)$

حل: تابع مزبور فقط در $x=1$، ناپیوسته است لذا گزینه‌ی ۴ صحیح است.

۲۸) تابع $y=\lfloor x \rfloor$ در نقاط صحیح، ناپیوسته است، ضمناً این تابع در نقاط صحیح، از راست پیوسته است.

۲۹) تابع $y=\lfloor -x \rfloor$ در نقاط صحیح، ناپیوسته است، ضمناً این تابع در نقاط صحیح، از چپ پیوسته است.

۳۰) توابع $y=\lfloor ax \rfloor$ در نقاطی که ax صحیح شود، ناپیوسته‌اند.

ضمناً تابع فوق با شرط $a>0$، در نقاطی که ax صحیح شود، فقط پیوستگی راست دارد و در حالتی که $a<0$ باشد، در نقاطی که ax صحیح شود، فقط پیوستگی چپ دارد.

۳۱) تابع $y=\lfloor 2x \rfloor$ در نقاط $\dots, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{1}{2}$ و 0 ناپیوسته است (در نصف نصف‌ها، ناپیوسته است)

۳۲) تابع $y=\lfloor 3x \rfloor$ در نقاط $\dots, \pm\frac{3}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{3}$ و 0 ناپیوسته است (در ثلث ثلث‌ها، ناپیوسته است)

۳۳) تابع $y=\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ در نقاط $\dots, \pm 6, \pm 4, \pm 2$ و 0 ناپیوسته است (در دو برابر دو برابرها ناپیوسته است)

۳۴) تابع $y=\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor$ در نقاط $\dots, \pm 9, \pm 6, \pm 3$ و 0 ناپیوسته است (در سه برابر سه برابرها ناپیوسته است)

تست: تابع $y=\lfloor 2x \rfloor$ **در بازه‌ی** $(-5,5)$ **در چند نقطه ناپیوسته است؟**

۱) ۹ ۲) ۱۱ ۳) ۱۹ ۴) ۲۳

حل: پاسخ صحیح گزینه‌ی ۳ می‌باشد، زیرا: $-5<x<5 \Rightarrow -10<2x<10$

بین ۱۰- و ۱۰ ، ۱۹ عدد صحیح، وجود دارد که عبارتند از: ۹ و ۸ و ۷ و... و ۱ و ۰ و ۱- و... و ۷- و ۸- و ۹- البته این اعداد بایستی تقسیم بر ۲ شوند تا در بازه‌ی $(-5,5)$ قرار گیرند. $\frac{9}{2}$ و $\frac{8}{2}$ و $\frac{7}{2}$ و.. و ۱ و $\frac{1}{2}$ و ۰ و $-\frac{1}{2}$ و ۱- و... و $-\frac{7}{2}$ و $-\frac{8}{2}$ و $-\frac{9}{2}$

۳۵) توابع $y=\lfloor x^n \rfloor$ در نقاطی که x^n صحیح شود، ناپیوسته‌اند (البته به استثناء $x=0$، در حالتی که n زوج باشد، به عبارت دیگر تابع $y=\lfloor x^{2n} \rfloor$ در $x=0$ پیوسته است) $(n \in N)$

به عنوان مثال: ۱ـ تابع $y=\lfloor x^2 \rfloor$ در نقاط $\dots, \pm\sqrt{4}, \pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{1}$ ناپیوسته است (در جذر جذرها ناپیوسته است)

۲) تابع $y=\lfloor x^3 \rfloor$ در نقاط $\dots, \pm\sqrt[3]{3}, \pm\sqrt[3]{2}, \pm\sqrt[3]{1}$ ناپیوسته است (در ریشه‌ی سوم ریشه‌ی سوم‌ها ناپیوسته است)

۳۶) توابع به صورت $y=\lfloor \sqrt[n]{x} \rfloor$ در نقاطی که $\sqrt[n]{x}$ صحیح شود ناپیوسته‌اند، البته در حالتی که n زوج باشد در نقاط منفی نیز ناپیوسته‌اند.

به عنوان مثال:

۱ـ تابع $y=\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ در نقاط ... و ۲۵ و ۱۶ و ۹ و ۴ و ۱ و ۰ و R^- ناپیوسته است (در مربع مربع‌ها و اعداد منفی، ناپیوسته است)

۲ـ تابع $y=\lfloor \sqrt[3]{x} \rfloor$ در نقاط ... و ۲۷± و ۸± و ۱± و ۰ ناپیوسته است (در مکعب‌مکعب‌ها، ناپیوسته است)

۳۷) توابع $y=(x-k)\lfloor x \rfloor$، $y=(x-k)^{2}\lfloor x \rfloor$ و ... $y=(x-k)^{n}$, $n \in N$ $(k \in Z)$ همگی در عدد صحیح k، پیوسته‌اند.

۳۸) توابع $y=\lfloor (x-k)^{2n} \rfloor$ $(n \in N$ و $K \in Z)$ در عدد صحیح k پیوسته‌اند.

تست: کدام تابع زیر در نقطه‌ی ۰، پیوسته است؟

۱) $y=x\lfloor x \rfloor$ ۲) $y=\lfloor x^{2} \rfloor$ ۳) $y=x^{2}\lfloor x \rfloor$ ۴) هر سه

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۴ می‌باشد.

تست: تابع $y=\lfloor \sqrt[3]{x} \rfloor$ در کدام نقطه ناپیوسته است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) ۲۵ ۳) ۶۴ ۴) ۰/۳

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۳ می‌باشد.

تست: تابع $y=\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ در بازه‌ی (۰,۳۰۰) در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۱۸

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۲ می‌باشد، زیرا تابع $y=\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ در فاصله‌ی (۰,۳۰۰) در نقاط $۱^{۲}$ و $۲^{۲}$ و $۳^{۲}$ و... و $۲۸۹=۱۷^{۲}$ ناپیوسته است.

۳۹) تابع $f(x)=\lfloor x \rfloor+\lfloor -x \rfloor$ در نقاط صحیح ناپیوسته است.

۴۰) توابع $y=x-\lfloor x \rfloor$ و $y=\lfloor x \rfloor-x$ در نقاط صحیح ناپیوسته‌اند.

۴۱) تابع $y=\text{sign}(x)$ (تابع علامت) فقط در $x=۰$ ناپیوسته است.

۴۲) کلیه‌ی توابع به‌جز براکتی‌ها و چند ضابطه‌ایها در دامنه‌اشان پیوسته‌اند.

۴۳) هر تابع به صورت $f(x)=\begin{cases} g(x) & ,(x \in Z) \\ h(x) & ,(x \notin Z) \end{cases}$ همواره در نقاط غیرصحیح پیوسته است، اما در نقاط صحیح ،فقط در ریشه‌های صحیح معادله‌ی $g(x)=h(x)$، پیوسته است.

۴۴) هر تابع به صورت $f(x)=\begin{cases} k_{1} & ,(x \in Z) \\ k_{2} & ,(x \notin Z) \end{cases}$ $(k_{1} \neq k_{2}, k_{1}, k_{2} \in R)$ در کلیه‌ی اعداد صحیح ناپیوسته است.

بالاخص $f(x)=\lfloor x \rfloor+\lfloor -x \rfloor=\begin{cases} ۰ & ,(x \in Z) \\ -۱ & ,(x \notin Z) \end{cases}$ در Z ناپیوسته است.

۴۵) هر تابع به صورت $f(x)=\begin{cases} g(x) & ,(x \in Q) \\ h(x) & ,(x \in Q') \end{cases}$ فقط در نقاطی که $g(x)=h(x)$ شود (چه گویا و چه اصم) پیوسته است.

۴۶) هر تابع به صورت $f(x)=\begin{cases}k_1 & ,(x\in Q)\\ k_2 & ,(x\in Q')\end{cases}$ $(k_1\neq k_2, k_1, k_2\in R)$، در کلیه‌ی نقاط (چه گویا چه اصم) ناپیوسته است، به عبارت دیگر در تمام اعداد حقیقی ناپیوسته است.

به عنوان مثال تابع دیریکله یعنی تابع $D(x)=\begin{cases}1 & ,(x\in Q)\\ 0 & ,(x\in R-Q)\end{cases}$ در R ناپیوسته است.

مثال: فرض کنید f در بازه‌ی بسته‌ی [a,b] پیوسته باشد و به علاوه $f(a)+f(b)=0$ باشد، ثابت کنید معادله‌ی $f(x)=0$، در بازه‌ی [a,b] حداقل یک ریشه دارد؟

حل: اگر $f(a)=0$ یا $f(b)$ باشد که حکم ثابت است، چرا که خود a یا خود b، ریشه‌ی معادله می‌شوند لذا فرض می‌کنیم $f(a)\neq 0$ و $f(b)\neq 0$ باشند، با این فرض داریم:

$$f(a)+f(b)=0\Rightarrow f(a)=-f(b)\overset{\times f(b)}{\Rightarrow} f(a)\times f(b)=-(f(b))^2<0$$

چون $f(a)\times f(b)<0$ شد، لذا طبق قضیه‌ی بولتزانو f در بازه‌ی [a,b]، حداقل یک ریشه دارد.

تست: تابع $f(x)=\begin{cases}1 & ,(x\in Q)\\ 0 & ,(x\notin Q)\end{cases}$ مفروض است، تابع $g(x)=(x^2-x-5)f(x)$ در چند نقطه حد دارد و پیوسته است؟

۱) هیچ نقطه ۲) یک نقطه ۳) دو نقطه ۴) بیشمار نقطه

حل: چون f در هیچ نقطه‌ای حد ندارد لذا ضریبش بایستی صفر باشد بنابراین داریم:

$x^2-x-5=0\Rightarrow \Delta=1+20=21>0\Rightarrow$ ۲ ریشه دارد

پس g در دو نقطه حد دارد و پیوسته است، که این دو نقطه ریشه‌های معادله‌ی $x^2-x-5=0$ می‌باشند.

تست: تابع $f(x)=\begin{cases}x+1 & ,(x\in Q)\\ \frac{1}{x-1} & ,(x\notin Q)\end{cases}$ مفروض است، این تابع در چند عدد گویا، ناپیوسته است؟

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) بیشمار

لذا گزینه‌ی ۴ صحیح است. $x+1=\frac{1}{x-1}\Rightarrow x^2-1=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}\notin Q$

۴۷) هرگاه f در a پیوسته باشد، f^{-1} در f(a) پیوسته است.

۴۸) هرگاه f تابعی زوج یا فرد باشد و در $x=0$ پیوستگی یکطرفه (پیوستگی راست یا چپ) داشته باشد. آنگاه در $x=0$ پیوسته است، ضمناً در حالتی که f فرد باشد، موارد زیر نیز برقرار است.

۱ـ در صورتی که $f(0)$ موجود باشد، $f(0)=0$ است.

۲ـ اگر حد تابع در $x=0$ از یک طرف l باشد، آنگاه حد تابع در $x=0$ از طرف دیگر، $-l$ است و چون f در $x=0$ پیوستگی یکطرفه نیز دارد بنابراین ($l=-l\Rightarrow 2l=0\Rightarrow l=0$) حد تابع در $x=0$ موجود و برابر صفر است.

مسأله: هرگاه f در $x=0$ پیوسته باشد و داشته باشیم $\forall x , y \in R : f(x+y) = f(x) + f(y)$، ثابت کنید f در هر نقطه پیوسته است.

$$x = y = 0 \Rightarrow f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

چون f در $x=0$ پیوسته است لذا داریم: $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$، اکنون فرض می‌کنیم a نقطه‌ای دلخواه از R باشد، ثابت می‌کنیم f در a پیوسته است.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{h \to 0} (f(a) + f(h)) = \lim_{h \to 0} f(a) + \lim_{h \to 0} f(h)$$

$$= f(a) + f(0) = f(a) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

پس f در هر نقطه مانند a پیوسته است.

مسأله: هرگاه f در $x=0$ پیوسته باشد و $f(0) \neq 0$ باشد و داشته باشیم $\forall x , y \in R : f(x+y) = f(x) \times f(y)$، ثابت کنید f در هر نقطه پیوسته است؟

$$x = y = 0 \Rightarrow f(0+0) = f(0) \times f(0) \Rightarrow (f(0))^2 = f(0) \Rightarrow f(0)(f(0) - 1) = 0 \overset{f(0) \neq 0}{\Rightarrow} f(0) = 1$$

چون f در $x=0$ پیوسته است لذا داریم: $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$، اکنون فرض می‌کنیم a نقطه‌ای دلخواه از R باشد، ثابت می‌کنیم f در a پیوسته است.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{h \to 0} f(a)f(h) = f(a) \times \lim_{h \to 0} f(h) = f(a) \times f(0) = f(a) \times 1 = f(a)$$

پس f در هر نقطه مانند a پیوسته است.

انواع ناپیوستگی‌ها:

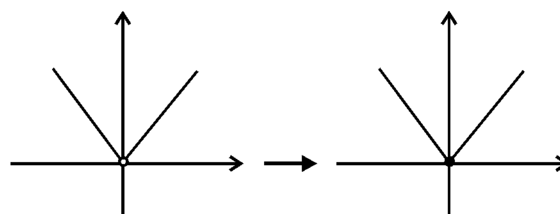
۱) ناپیوستگی رفع شدنی: هرگاه تابع f در نقطه‌ی x_0، حد داشته باشد ولی در این نقطه یا تعریف نشده باشد و یا بد تعریف شده باشد (یعنی اینکه $f(x_0)$ با حد تابع برابر نباشد)، در این صورت گوئیم، f در x_0 ناپیوستگی رفع شدنی دارد، یعنی می‌توان از روی f، تابع جدیدی ساخت که در x_0 پیوسته باشد.

تذکر مهم: توجه داشته باشید که هر نوع ناپیوستگی یک تابع، رفع شدنی نیست، به شرطی رفع شدنی است که f در x_0 حد داشته باشد.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x & ,(x > 0) \\ -x & ,(x < 0) \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=0$ ناپیوسته است و نوع ناپیوستگی تابع رفع شدنی است، زیرا در این نقطه، اصلاً تعریف نشده است، با وجود اینکه f در $x_0 = 0$ حدی دارد که برابر ۰ است. در این حالت کافی است $f(0)$ را برابر حد تابع یعنی ۰ تعریف کنیم تا تابع پیوسته شود یعنی:

$$f(x) = \begin{cases} x & ,(x > 0) \\ 0 & ,(x = 0) \\ -x & ,(x < 0) \end{cases}$$

به شکلها توجه کنید:

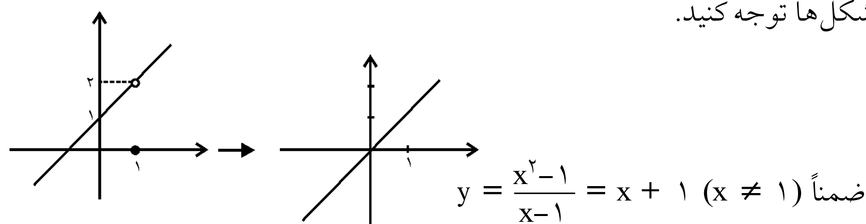


مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & ,(x \neq 1) \\ 0 & ,(x = 1) \end{cases}$ **در نقطه‌ی ۱ = x_0 ناپیوسته است** (نوع ناپیوستگی تابع باز هم، رفع شدنی

است) **زیــرا:** $\lim_{x\to 1} f(x)=2$ **در حــالیکه** $f(1)=0$ **است** (در واقــع طــرف نــاشی بــوده است و داروی اشـتباهی بـرای این مریض تجویز کرده است) **در این حالت کافی است مقدار $f(1)$ یعنی ۰ را تغییر داده و آنرا برابر حد تابع یعنی ۲ تعریف کنیم. در این صورت داریم:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & ,(x\neq 1)\\ 2 & ,(x=1)\end{cases}$$

به شکل‌ها توجه کنید.



ضمناً $y=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1\ (x\neq 1)$

۲) ناپیوستگی جهشی: هرگاه تابع f در نقطه‌ی x_0 دارای حد چپ و راست نابرابر باشد، (دو عدد حقیقی نابرابر) در این صورت f در x_0 ناپیوسته است، نوع ناپیوستگی f را در این نقطه، ناپیوستگی جهشی می‌گویند، مقدار $\lim_{x\to a^+} f(x)-\lim_{x\to a^-} f(x)$ را جهش تابع f در نقطه‌ی x_0 می‌گویند.

مثال: تابع $y=\lfloor x\rfloor$ در نقاط صحیح، ناپیوستگی جهشی دارد (شکل تابع $y=\lfloor x\rfloor$ را مجسم کنید) و مقدار این جهش برابر یک واحد است.

۳) ناپیوستگی اساسی: هرگاه حداقل یکی از دو حد چپ و راست تابع f در نقطه‌ی x_0 برابر $\pm\infty$ شود، f در x_0 ناپیوسته است، نوع این ناپیوستگی را ناپیوستگی اساسی می‌گویند.

مثال: نوع ناپیوستگی تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ در $x_0=0$، از نوع اساسی است.

۴) ناپیوستگی نوسانی: هرگاه f در x_0 پیوسته نباشد اما مرتباً نوسان کند، نوع ناپیوستگی f را در x_0، ناپیوستگی نوسانی گویند.

مثال: ناپیوستگی $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ در نقطه‌ی $x_0=0$، از نوع نوسانی است.

۴۴) هرگاه f در x_0 پیوسته باشد حد تابع با مقدار تابع برابر است یعنی $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$، در این حالت تعریف حد به صورت زیر خواهد بود:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ :\forall x\ (|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon)$$

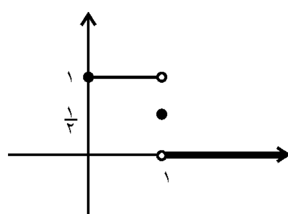
۴۵) هرگاه f در x_0 پیوسته باشد آنگاه: $\lim_{t\to 0} f(x_0+t)=f(x_0)$

این شرط معادل شرط پیوستگی f در x_0 یعنی شرط $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ می‌باشد.

تست: تابع $f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x^n+1}$ مفروض است، این تابع در بازه‌ی $[0,+\infty)$، چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

$$f(x)=\begin{cases}1 & ,(0\le x<1)\\ \frac{1}{2} & ,(x=1)\\ 0 & ,(x>1)\end{cases}$$



با توجه به شکل، تابع فقط در یک نقطه $(x=1)$ ناپیوسته است.

تست ۱:

۱ـ هرگاه تابع $f(x) = \frac{۵}{a\cos x + ۱}$، همواره پیوسته باشد، حدود a کدام است؟

۱) $-۱ < a < ۱$ ۲) $a > ۱$ ۳) $a < -۱$ ۴) $a \le ۱$

۲ـ تابع $f(x) = (x-۲)(x-۳) + kx^۲$ با فرض $k > ۰$ مفروض است، هرگاه خط $۲y - ۱۰ = ۰$، نمودار تابع f را در فاصله‌ی (۲,۳) حتماً قطع کند، حدود k کدام است؟

۱) $۲ < k < ۳$ ۲) $۰ < k < ۳$ ۳) $\frac{۵}{۹} < k < \frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵} < k < \frac{۹}{۵}$

۳ـ هرگاه f و g هر دو در نقطه‌ی a پیوسته باشند تابع $h(x) = \text{Min}\{f(x), g(x)\} + \text{Max}\{f(x), g(x)\}$ در نقطه‌ی a چگونه است؟

۱) در a پیوسته است.
۲) در a فقط از راست پیوسته است.
۳) در a فقط از چپ پیوسته است.
۴) در a نه از راست پیوسته است نه از چپ.

۴ـ تابع $f(x) = \begin{cases} ۷x^۳ - x^۲ - ۶x, & (x \notin Z) \\ ۰ & ,(x \in Z) \end{cases}$ در چند نقطه به طول صحیح پیوسته است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵ـ تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x}{\frac{۱}{x} - \frac{۲}{x-۱}}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) یک نقطه ۲) دو نقطه ۳) سه نقطه ۴) هیچ نقطه

۶ـ هرگاه تابع دلخواه f در بازه‌ی [a,b] پیوسته نباشد، در این بازه:

۱) کراندار نیست.
۲) الزاماً فاقد ماکزیمم و می‌نیمم مطلق است.
۳) ممکن است کراندار باشد.
۴) الزاماً کراندار است.

۷ـ کدام تابع روی R پیوسته نیست؟

۱) $y = \left\lfloor \frac{x^۲}{۱+x^۲} \right\rfloor$ ۲) $y = \left\lfloor \frac{۱}{۱+x^۲} \right\rfloor$ ۳) $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & ,(x \ne ۰) \\ ۱ & ,(x = ۰) \end{cases}$ ۴) هر سه مورد

۸ـ تابع $f(x) = (۱+x^۲)\text{sign}(x)$ در $x = ۰$ چگونه است؟

۱) پیوسته است.
۲) پیوستگی راست دارد.
۳) پیوستگی چپ دارد.
۴) نه از راست پیوسته است نه از چپ.

۹ـ تابع $y = \lfloor \sin x \rfloor$ در کدام نقطه، دارای حد بوده ولی ناپیوسته است؟

۱) $x = ۰$ ۲) $x = \frac{\pi}{۲}$ ۳) $x = \frac{۳\pi}{۲}$ ۴) $x = \pi$

۱۰ـ تابع به معادله‌ی $y = \lfloor \sin x \rfloor$ در کدام نقطه‌ی زیر پیوسته است؟

۱) $x = ۰$ ۲) $x = \frac{\pi}{۲}$ ۳) $x = \pi$ ۴) $x = \frac{۳\pi}{۲}$

۱ـ (۱) $a\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{a} \Rightarrow |-\frac{1}{a}| > 1 \Rightarrow |a| < 1$

۲ـ (۳) $f(2) = 4k$, $f(3) = 9k$ $\xrightarrow{\text{طبق قضیه‌ی مقدار میانی}} 4k < 5 < 9k \Rightarrow \frac{5}{9} < k < \frac{5}{4}$

۳ـ (۱) **یادآوری:** $\text{Min}\{a,b\} + \text{Max}\{a,b\} = a + b$

می‌دانیم مجموع دو تابع پیوسته در یک نقطه، در آن نقطه پیوسته است. $\Rightarrow h(x) = f(x) + g(x)$

۴ـ (۳) $7x^3 - x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(7x^2 - x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0, 1, \frac{-6}{7}$

توجه داشته باشید که فقط ۰ و ۱ اعداد صحیح هستند.

۵ـ (۳) $x = 0 \quad , x = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{\frac{x-1-2x}{x(x-1)}} = \frac{x^2(x-1)}{-x-1} \Rightarrow -x-1 = 0 \Rightarrow x = -1$

پس f در سه نقطه ناپیوسته است.

۶ـ (۳) به عنوان مثال تابع $f(x) = \lfloor x \rfloor$ در بازه‌ی $[1,2]$ پیوسته نیست ولی در این بازه کراندار است.

۷ـ (۲) این تابع در $R-\{0\}$ پیوسته‌است.

$$y = \left\lfloor \frac{1}{1+x^2} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & ,(x = 0) \\ 0 & ,(x \neq 0) \end{cases}$$

تابع $y = \left\lfloor \frac{x^2}{1+x^2} \right\rfloor = 0$، تابعی ثابت است و در R پیوسته است.

تابع گزینه‌ی ۳ نیز در $R-\{0\}$ پیوسته است زیرا $y = \frac{\sin x}{x}$ پیوسته است، ضمناً در صفر نیز پیوسته است زیرا:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$$

۸ـ (۴)

$$f(x) = (1 + x^2)\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & ,(x > 0) \\ 0 & ,(x = 0) \\ -(1 + x^2) & ,(x < 0) \end{cases}$$

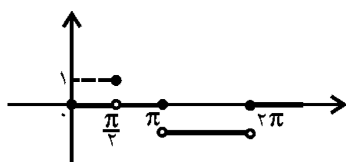
$f(0) = 0$

حد چپ $= -1$ $f(0) = 0$

حد راست $= 1$

۹ـ (۲)

با توجه به شکل در نقطه‌ی $\frac{\pi}{2}$، ضمناً



$$\begin{cases} f(\frac{\pi}{2}) = \lfloor 1 \rfloor = 1 \\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \lfloor \sin x \rfloor = \lfloor 1^- \rfloor = 0 \end{cases}$$

۱۰ـ (۴) با توجه به شکل (در تست قبل) در نقطه‌ی $\frac{3\pi}{2}$، ضمناً

$$f(\frac{3\pi}{2}) = \lfloor -1 \rfloor = -1$$

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} \lfloor \sin x \rfloor = \left\lfloor (-1)^+ \right\rfloor = -1$$

سعی کنید نمودار $y = \lfloor \sin x \rfloor$ را به خاطر بسپارید.

تست ۲:

۱ـ با فرض $f(x) = ۲x - ۱$ و $g(x) = \frac{x}{x^۲ - ۳x + ۲}$، تابع gof، در کدام نقاط زیر، دچار ناپیوستگی می‌شود؟

۱) $\{۱, \frac{۱}{۲}\}$ ۲) $\{۱, \frac{۳}{۲}\}$ ۳) $\{-۱, \frac{۱}{۲}\}$ ۴) $\{-۱, \frac{۳}{۲}\}$

۲ـ تابع $y = \left\lfloor \frac{x}{۳} \right\rfloor$ در کدام بازه‌ی زیر پیوسته می‌باشد؟

۱) $(۱,۴]$ ۲) $[۱,۴)$ ۳) $[۳,۶)$ ۴) $(۳,۶]$

۳ـ در کدامیک از توابع زیر، $f(۱)$ را می‌توان چنان تعریف کرد که تابع داده شده، در $x = ۱$ پیوسته باشد؟

۱) $f(x) = \frac{x-۱}{x^۲-۱}$ ۲) $f(x) = \frac{x^۲-۱}{(x-۱)^۲}$ ۳) $f(x) = \frac{x-۱}{|x-۱|}$ ۴) $f(x) = \frac{x^۲+۵x+۶}{|x-۱|}$

۴ـ مجموع مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع $f(x) = |x + ۳|$ در بازه‌ی $[-۵,۲]$ چقدر است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۳ ۴) ۴

۵ـ کدام تابع زیر در بازه‌ی $[۰,۱]$ کراندار است، در بازه‌ی $(۰,۱]$ پیوسته است، اما در $x = ۰$ ناپیوسته است؟

۱) $f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{x} & ,(۰ < x \le ۱) \\ ۲ & ,(x = ۰) \end{cases}$ ۲) $f(x) = \begin{cases} x+۱ & ,(۰ < x \le ۱) \\ ۲ & ,(x = ۰) \end{cases}$

۳) $f(x) = \begin{cases} ۲x^۲ & ,(۰ < x \le ۱) \\ ۰ & ,(x = ۰) \end{cases}$ ۴) هیچکدام

۶ـ تابع $f(x) = Ln(\cos x)$ در کدام بازه‌ی زیر پیوسته است؟

۱) $(۰,\pi)$ ۲) $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲})$ ۳) $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ ۴) $(۰, \frac{۲\pi}{۳})$

۷ـ کدام یک از توابع زیر در نقطه‌ی $x = ۰$ ناپیوستگی رفع شدنی دارد؟

۱) $y = \frac{\sin x}{x}$ ۲) $y = \lfloor x \rfloor$ ۳) $y = x\lfloor x \rfloor$ ۴) هیچکدام

۸ـ معادله‌ی $x^۲ - ۴ax + ۳a^۲ = ۰$ $(a \neq ۰)$ در کدام یک از بازه‌های زیر حتماً، حداقل یک جواب دارد؟

۱) $[۰,۱]$ ۲) $[-۱,۰]$ ۳) $[۰,۲a]$ ۴) $[-a,۰]$

۹ـ تابع $y = \frac{x+۱}{x+|x-۱|}$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) هیچ

۱۰ـ هرگاه $f(x) = \begin{cases} -۱ & ,(x < ۱) \\ ۰ & ,(x > ۱) \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} ۳ & ,(x < ۱) \\ ۲ & ,(x > ۱) \end{cases}$، تابع $f + g$ در نقطه‌ی $x = ۱$ چگونه است؟

۱) پیوسته ۲) فقط از راست پیوسته

۳) فقط از چپ پیوسته ۴) نه از راست پیوسته و نه از چپ پیوسته

۱ـ (۲) $(gof)(x)=\dfrac{2x-1}{(2x-1)^2-3(2x-1)+2}$

$$(2x-1)^2-3(2x-1)+2=0\Rightarrow a+b+c=0\Rightarrow\begin{cases}2x-1=1\\2x-1=\dfrac{c}{a}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

۲ـ (۳) تابع $y=\left\lfloor\dfrac{x}{3}\right\rfloor$ در نقاط $\{\dots,\pm6,\pm3,0\}=3Z$ ناپیوسته است و در این نقاط فقط پیوستگی راست دارد.

۳ـ (۱) در واقع تابع باید ناپیوستگی رفع شدنی داشته باشد. یعنی تابع باید حد داشته باشد.

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

۴ـ (۱) $-5\le x\le2\Rightarrow-2\le x+3\le5\quad\Rightarrow0\le|x+3|\le5\Rightarrow\begin{cases}Max=5\\Min=0\end{cases}\Rightarrow Max+Min=5$

۵ـ (۲) f در $[0,1]$ کراندار است، در ۰ ناپیوسته است و در $x=1$ پیوستگی چپ دارد و در $(0,1)$ پیوسته است.

۶ـ (۳) $\cos x>0\Rightarrow x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

۷ـ (۱) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$، توضیح اینکه تابع گزینه‌ی ۲ در $x=0$ ناپیوستگی رفع نشدنی دارد زیرا در ۰ حد ندارد و تابع گزینه‌ی ۳ در $x=0$ پیوسته است.

۸ـ (۳) $\begin{matrix}f(0)=3a^2>0\\f(2a)=-a^2<0\end{matrix}\ (a\neq0)\Rightarrow$ طبق قضیه‌ی بولتزانو (نتیجه‌ی قضیه‌ی مقدار میانی)

۹ـ (۴) $x+|x-1|=0\Rightarrow\begin{cases}x>1\Rightarrow x+x-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2} & \text{غیرقابل قبول}\\x<1\Rightarrow x-x+1=0\Rightarrow1=0 & \text{غیرممکن}\end{cases}$

۱۰ـ (۴) چون f و g هر دو در $x=1$ تعریف نشده‌اند، لذا $f+g$ نیز در $x=1$ تعریف نشده و بنابراین ناپیوسته است، هم از راست و هم از چپ

کلیدی که کار می‌کند درخشان است و وقتی بیکار ماند زنگ می‌زند. «روزولت»

کسانی که هرگز وقت ندارند آنهایی هستند که کمتر کار می‌کنند. «پاستور»

تست ۳:

۱ـ به ازاء کدام مقدار a، تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^{۲}+|x|}{x^{۲}-|x|} & ,(x\neq ۰)\\ a+۱ & ,(x=۰)\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=۰$ پیوسته است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) -۲

۲ـ هرگاه تابع $f(x)=\begin{cases}x+۱ & ,(|x-۲|<۱)\\ x^{۲}+ax+b & ,(|x-۲|\geq ۱)\end{cases}$، در سرتاسر R پیوسته باشد، $a-b$ کدام است؟

۱) -۷ ۲) -۹ ۳) ۰ ۴) ۱

۳ـ هرگاه تابع $f(x)=\frac{۱-\cos ۳x}{x^{۲}}$ در نقطه‌ی $x=۰$، پیوسته باشد، $f(۰)$ کدام است؟

۱) ۴/۵ ۲) ۵/۵ ۳) ۲ ۴) ۱

۴ـ انفصال (ناپیوستگی) کدامیک از توابع زیر در نقطه‌ی $x=۰$، رفع شدنی است؟

۱) $y=\frac{|x|}{x}$ ۲) $y=\frac{۱}{x^{۲}}$ ۳) $y=\frac{x}{x^{۲}}$ ۴) $y=\frac{x^{۲}}{x}$

۵ـ تابع $y=\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}+mx+۱}$ در ازاء چه مقادیری از m، در R پیوسته است؟

۱) $-۲<m<۲$ ۲) $m>۲$ ۳) $m<-۲$ ۴) $|m|>۲$

۶ـ در ازاء چه مقادیری از m، تابع $y=\sqrt{x^{۲}-(m-۱)x+۱}$ در R پیوسته است؟

۱) $۰<m<۳$ ۲) $۱<m<۳$ ۳) $-۱\leq m\leq ۳$ ۴) $۲<m<۳$

۷ـ هرگاه تابع $f(x)=\begin{cases}a\sin x+\frac{\sqrt{۲}}{۲} & ,(-\frac{\pi}{۲}\leq x<-\frac{\pi}{۴})\\ \sqrt{۲} & ,(-\frac{\pi}{۴}\leq x<\frac{\pi}{۴})\\ \cos x-b & ,(\frac{\pi}{۴}\leq x\leq\frac{\pi}{۲})\end{cases}$ در فاصله‌ی $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ پیوسته باشد، $a+b\sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۸ـ بزرگترین مقدار k، که به ازاء آن تابع $y=\lfloor x^{۲}-۲\rfloor$، روی بازه‌ی $[۳,k)$ پیوسته باشد، کدام است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۱۰}$ ۳) $\sqrt{۱۴}$ ۴) $۲\sqrt{۳}$

۹ـ در ازاء چه مقادیری از α تابع $y=\frac{-x}{۳x^{۲}-۲x\tan\alpha+۱}$، همواره در سرتاسر R پیوسته است؟

۱) $-\frac{\pi}{۳}<\alpha<\frac{\pi}{۳}$ ۲) $-\frac{\pi}{۶}<\alpha<\frac{\pi}{۶}$ ۳) $۰<\alpha<\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۳}<\alpha<\frac{\pi}{۲}$

۱۰ـ هرگاه تابع f در نقطه‌ی a، پیوسته باشد، کدام تابع همواره در نقطه‌ی a پیوسته است؟

۱) $\sqrt{۱-f^{۲}}$ ۲) $\sqrt{۱+f^{۲}}$ ۳) $\sqrt{f-f^{۲}}$ ۴) $\sqrt{f+f^{۲}}$

۱ـ (۴) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|(|x|+1)}{|x|(|x|-1)}=-1\Rightarrow a+1=-1\Rightarrow a=-2$

۲ـ (۱) واضح است که f در $R-\{1,3\}$ پیوسته است لذا فقط کافی است.

در $x=1$ و $x=3$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & ,(1<x<3)\\ x^2+ax+b & ,(x\le 1 \text{ یا } x\ge 3)\end{cases}$$

$$\begin{matrix}2=a+b+1\Rightarrow\\ 4=9+3a+b\Rightarrow\end{matrix}\begin{cases}a+b=1\\3a+b=-5\end{cases}\Rightarrow a-b=-7$$

۳ـ (۱) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}=\dfrac{0}{0}\sim\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{9x^2}{2}}{x^2}=\dfrac{9}{2}=4/5=f(0)$

۴ـ (۴) کافی است تابعی را بیابیم که در $x=0$ حد داشته باشد.

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}x=0$$

۵ـ (۱) بایستی مخرج ریشه نداشته باشد.

$$\Delta<0\Rightarrow m^2-4<0\Rightarrow -2<m<2$$

۶ـ (۳) بایستی زیر رادیکال مثبت یا صفر باشد.

$$\begin{cases}a>0\Rightarrow a=1>0\\ \Delta\le 0\Rightarrow(m-1)^2-4\le 0\Rightarrow -2\le m-1\le 2\Rightarrow -1\le m\le 3\end{cases}$$

نکته: هر تابع به صورت $y=\sqrt{(x-k)^2}$, $y=\sqrt{a(x-k)^2}$ در R پیوسته است. $(a>0)$

۷ـ (۲) کافی است فقط تابع در نقاط $\pm\frac{\pi}{4}$ پیوسته باشد.

$$\left.\begin{matrix}x=-\frac{\pi}{4}\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\Rightarrow a=-1\\ x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-b\Rightarrow b=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+b\sqrt{2}=-2$$

۸ـ (۲) $3\le x<k\Rightarrow 9\le x^2<k^2\Rightarrow k^2=10\Rightarrow k=\sqrt{10}$

یادآوری: تابع $y=\lfloor x^2\rfloor$ در نقاطی که x^2 صحیح شود به استثناء $x=0$، ناپیوسته است.

۹ـ (۱) چون صورت و مخرج هر دو پیوسته‌اند لذا بایستی مخرج صفر نشود.

$$3x^2-2x\tan\alpha+1\neq 0\Rightarrow\Delta'<0\Rightarrow\tan^2\alpha-3<0\Rightarrow-\sqrt{3}<\tan\alpha<\sqrt{3}\Rightarrow-\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{3}$$

۱۰ـ (۲) چون f در a پیوسته است، و $1+f^2>0$ است لذا تابع $\sqrt{1+f^2}$ نیز در a پیوسته است.

کار انسان را از سه بلای بزرگ دور می‌کند:

۱ـ افسردگی. ۲ـ فسق. ۳ـ احتیاج «ولتر»

تست ۴:

۱ـ تابع $y = \frac{x^5 \cos x}{x^3 - x}$ در چند نقطه، ناپیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲ـ تابع $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ در بازه‌ی $[-\pi, \pi]$، در چند نقطه، ناپیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

۳ـ تابع $f(x) = \lfloor 2x \rfloor$، وقتی $-3 < x < 3$، در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۱۱

۴ـ تابع $f(x) = \lfloor x^3 \rfloor$ در کدام نقطه، پیوسته نیست؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{2}{5}$ ۳) $\sqrt[3]{2}$ ۴) ۱/۰۱

۵ـ تابع $f(x) = \sqrt{x} + \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ در کدام یک از نقاط زیر، ناپیوسته است؟

۱) ۱۲۵ ۲) ۸ ۳) ۴۹ ۴) هر سه مورد

۶ـ تابع $f(x) = \lfloor x \rfloor^2 - \lfloor x \rfloor$ در چند نقطه به طول صحیح، پیوسته است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۷ـ تابع $f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|(x^2 - 3x + 2)}$ در چند نقطه ناپیوستگی رفع شدنی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۸ـ مجموعه‌ی نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = x^2 \lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor$، کدام است؟

۱) Z ۲) $Z - \{0\}$ ۳) $Z - \{\pm 1\}$ ۴) $\{1, -1\}$

۹ـ هرگاه به ازاء هر عدد حقیقی x، $f(x) = x + 1$ و $g(x) = x + 2$، کدام تابع زیر در R پیوسته است؟

۱) $\frac{f+g}{f+1}$ ۲) $\frac{f+g}{g-2}$ ۳) $\frac{f+g}{f+g+x^2}$ ۴) $\frac{2f-g}{f+g}$

۱۰ـ حدود پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x}, & (x \le 1) \\ \frac{x-2}{x+3}, & (x > 1) \end{cases}$ کدام است؟

۱) $R - \{0\}$ ۲) $R - \{1\}$ ۳) $R - \{0, 1, -3\}$ ۴) $R - \{0, 1\}$

۱ـ (۳) چون صورت و مخرج هر دو پیوسته‌اند، لذا: $x^۳ - x = ۰ \Rightarrow x = ۰,۱,-۱$

۲ـ (۲) $\sin x - \cos x = ۰ \Rightarrow \tan x = ۱ \Rightarrow x = K\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۴}, \frac{-۳\pi}{۴}$

۳ـ (۴) $-۳ < x < ۳ \Rightarrow -۶ < ۲x < ۶ \Rightarrow ۲x \in$ {۵و ۴و ... و ۱و ۰و ۱-و ... و ۴-و ۵-}

$x \in \{-\frac{۵}{۲}, -۲, ..., -\frac{۱}{۲}, ۰, \frac{۱}{۲}, ..., \frac{۵}{۲}\}$

۴ـ (۳) ***یادآوری:*** تابع $y = \lfloor x^۳ \rfloor$ در نقاط $..., \pm\sqrt[۳]{۲}, \pm\sqrt[۳]{۱}, ۰$ ناپیوسته است.

۵ـ (۳) تابع $y = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ در نقاط ... و ۹ و ۴ و ۱ و ۰ و کلیه‌ی اعداد منفی ناپیوسته است.

۶ـ (۲) فرض می‌کنیم $n \in Z$ داریم: $f(n) = \lfloor n^۲ \rfloor - \lfloor n \rfloor = n^۲ - n$

حد راست $= \lfloor n^+ \rfloor^۲ - \lfloor n^+ \rfloor = n^۲ - n$

حد چپ $= \lfloor n^- \rfloor^۲ - \lfloor n^- \rfloor = (n-۱)^۲ - (n-۱)$

$n^۲ - n = (n-۱)^۲ - (n-۱) \Rightarrow n = ۱$

۷ـ (۳) تابع در ریشه‌های مخرج یعنی ۰ و ۱ و ۲ ناپیوسته است و فقط در $x = ۱$ حد دارد.

۸ـ (۳) تابع $y = \lfloor x \rfloor$ در نقاط صحیح ناپیوسته است و تابع $y = (x-n)\lfloor x \rfloor$ $(n \in Z)$ در عدد صحیح n پیوسته است.

لذا تابع $y = (x^۲-۱)\lfloor x \rfloor$ در نقاط ۱ و ۱- پیوسته است. $f(x) = (x^۲-۱)\lfloor x \rfloor$

۹ـ (۳) چون f و g هر دو در R پیوسته‌اند پس مخرج نبایستی صفر شود.

$\frac{f+g}{f+g+x^۲} \Rightarrow$ مخرج $= x + ۱ + x + ۲ + x^۲ = x^۲ + ۲x + ۳ = ۰ \Rightarrow \Delta < ۰$

۱۰ـ (۴) تابع f در $x = ۰$ ناپیوسته است زیرا تابع $y = \frac{x+۱}{x}$ $(x \leq ۱)$ در $x = ۰$ ناپیوسته است.

تابع f در $x = -۳$ پیوسته است زیرا تابع $y = \frac{x+۱}{x}$ $(x \leq ۱)$ در $x = -۳$ پیوسته است.

تابع f در $x = ۱$ ناپیوسته است زیرا: $f(۱) = ۲$

حد چپ در $x = ۱$ $= ۲$

حد راست در $x = ۱$ $= \frac{-۱}{۴} \Rightarrow$ پیوستگی $D = R - \{۰,۱\}$

کار سرمایهٔ سعادت و نیکبختی است. «سقراط»

تست ۵:

۱ـ مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\sqrt{|x|(x-۲)}$، کدام است؟

۱) $x > ۲$ ۲) $(x > ۲) \cup \{۰\}$ ۳) $x \geq ۲$ ۴) $x \leq ۲$

۲ـ تعداد نقاط ناپیوستگی کدام یک از توابع زیر، در فاصله‌ی $(۰,۶)$، کمتر از سایرین است؟

۱) $y=\lfloor x^۲ \rfloor$ ۲) $y=\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ ۳) $y=\left\lfloor \frac{x}{۳} \right\rfloor$ ۴) $y=\lfloor ۲x \rfloor$

۳ـ در تابع f، اگر $f(-۲)=۱$, $f(-۳)=-۵$, $f(۰)=-۴$ و f در بازه‌ی $[-۳,۰]$ پیوسته باشد، معادله‌ی $f(x)=۰$ در این بازه...

۱) دقیقاً ۲ ریشه دارد. ۲) دقیقاً ۳ ریشه دارد. ۳) حداقل ۲ ریشه دارد. ۴) حداقل ۳ ریشه دارد.

۴ـ تابع $f(x)=\lfloor x \rfloor - \lfloor x^۲ \rfloor$ در بازه‌ی $(۰,۲)$، چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

۵ـ تابع $y=\left\lfloor \frac{x}{۲} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{۳} \right\rfloor$ در بازه‌ی $(-۴,۴)$، چند نقطه‌ی انفصال دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۶ـ حدود پیوستگی کدام تابع زیر، نادرست نوشته شده است؟

۱) $\begin{cases} y=\lfloor x \rfloor \\ \text{حدود پیوستگی} = R-Z \end{cases}$

۲) $\begin{cases} y=Ln(x-۱) \\ \text{حدود پیوستگی} = [۱,+\infty) \end{cases}$

۳) $\begin{cases} y=Arctanx \\ \text{حدود پیوستگی} = R \end{cases}$

۴) $\begin{cases} y=\dfrac{۱}{۱-\frac{۱}{x-۱}} \\ \text{حدود پیوستگی} = R-\{۱,۲\} \end{cases}$

۷ـ هرگاه تابع $y=\lfloor x+۱ \rfloor$ در بازه‌ی (a,b)، ۷ نقطه‌ی ناپیوستگی داشته باشد، a−b، کدام است؟ $(a,b \in N)$

۱) ۷ ۲) ۷− ۳) ۸ ۴) ۸−

۸ـ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{۱}{۲}$، تابع $f(x)=\left\lfloor x+\frac{۳}{۲} \right\rfloor + \left\lfloor x+\frac{۱}{۲} \right\rfloor$،

۱) پیوستگی چپ دارد. ۲) پیوستگی راست دارد. ۳) پیوسته است. ۴) فقط تعریف شده است.

۹ـ مجموعه‌ی نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} \sqrt{۹-x^۲} & ,(|x|\leq ۳) \\ x-۳ & ,(|x|>۳) \end{cases}$ کدام است؟

۱) R ۲) $\{-۳\}$ ۳) $R-\{\pm ۳\}$ ۴) $x > ۳$ یا $x < -۳$

۱۰ـ طول نقطه‌ی ناپیوستگی تابع $y=\frac{۱}{۴^x-۸}$، کدام است؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱ـ (۴) $x - ۲ \leq ۰ \Rightarrow x \leq ۲ \Rightarrow$ حدود ناپیوستگی $= (-\infty,۲]$

۲ـ (۳) تابع $y = \lfloor x^۲ \rfloor$ در فاصله‌ی (۰,۶)، در ۳۵ نقطه‌ی $\sqrt{۱}, \sqrt{۲}, ..., \sqrt{۳۵}$ ناپیوسته است.

تابع $y = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ در فاصله‌ی (۰,۶) در ۲ نقطه‌ی ۴ و ۱ ناپیوسته است.

تابع $y = \lfloor \frac{x}{۳} \rfloor$ در فاصله‌ی (۰,۶) در ۱ نقطه‌ی $(x = ۳)$ ناپیوسته است.

تابع $y = \lfloor ۲x \rfloor$ در فاصله‌ی (۰,۶) در ۱۲ نقطه‌ی $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۲}$ و $\frac{۳}{۲}$ و... $\frac{۱۲}{۲}$، ناپیوسته است.

۳ـ (۳) چون f در بازه‌ی [۳,۰-] دوبار تغییر علامت داده است.

x	-۳	-۲	۰
f(x)	-۵	۱	-۴

تغییرعلامت تغییرعلامت

لذا طبق قضیه‌ی بولتزانو (نتیجه‌ی قضیه‌ی مقدار میانی) f در بازه‌ی [۳,۰-] حداقل ۲ ریشه دارد.

۴ـ (۲) تابع $y = \lfloor x \rfloor$ در بازه‌ی (۰,۲) در نقطه‌ی $x = ۱$، ناپیوسته است.

تابع $y = \lfloor x^۲ \rfloor$ در بازه‌ی (۰,۲) در نقاط $\sqrt{۱}, \sqrt{۲}, \sqrt{۳}$ ناپیوسته است.

در نقاط $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ چون یکی از دو تابع ناپیوسته و دیگری پیوسته است لذا تفاضلشان نیز ناپیوسته است در نقطه‌ی ۱ چون هر دو تابع ناپیوسته‌اند بایستی بررسی شود.

$f(۱) = ۰$

حد راست در ۱ $= ۱ - ۱ = ۰$

حد چپ در ۱ $= ۰ - ۰ = ۰$

لذا تابع در $x = ۱$ پیوسته است.

۵ـ (۳) تابع $y = \lfloor \frac{x}{۲} \rfloor$ در بازه‌ی (۴,۴-) در نقاط ۲- و ۰ و ۲، ناپیوسته است.

تابع $y = \lfloor \frac{x}{۳} \rfloor$ در بازه‌ی (۴,۴-) در نقاط ۳- و ۰ و ۳ ناپیوسته است.

در نقاط ۲± و ۳± چون یکی از دو تابع ناپیوسته و دیگری پیوسته است لذا تفاضلشان نیز ناپیوسته است در نقطه‌ی ۰ چون هر دو تابع ناپیوسته‌اند بایستی بررسی شود.

$f(۰) = ۰$

حد راست در ۰ $= ۰ - ۰ = ۰$

حد چپ در ۰ $= -۱ - (-۱) = ۰$

لذا تابع در $x = ۰$ پیوسته است.

۶ـ (۲) تابع $y = Ln(x - ۱)$ در $x = ۱$ تعریف نشده است لذا حدود پیوستگی این تابع $(۱,+\infty)$ می‌باشد.

۷ـ (۴) تابع $y = \lfloor x \rfloor + ۱$ در نقاط صحیح ناپیوسته است لذا بایستی در بازه‌ی (a,b)، ۷ عدد صحیح وجود داشته باشد.

مثلاً: $(a,b) = (۰,۸)$ بنابراین $a-b= -۸$

۸ـ (۲) $f(\frac{۱}{۲}) = ۲ + ۱ = ۳$

حد راست در $\frac{۱}{۲}$ $= ۲ + ۱ = ۳$ $\Rightarrow$ f در $x = \frac{۱}{۲}$ پیوستگی راست دارد.

حد چپ در $\frac{۱}{۲}$ $= ۱ + ۰ = ۱$

۹ـ (۲) تابع $y=\sqrt{9-x^2}$ در فاصله‌ی $(-3,3)$ پیوسته است تابع $y=x-3$ در فاصله‌ی $x>3$ و $x<-3$ پیوسته است. لذا کافی است پیوستگی را در نقاط ۳- و ۳ بررسی کنیم. بسادگی دیده می‌شود که تابع در $x=3$ پیوسته است ولی در $x=-3$ ناپیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2} & ,(-3\le x\le 3)\\ x-3 & ,(x<-3 \quad ,x>3)\end{cases}$$

۱۰ـ (۳) $4^x=8\Rightarrow x=\log_4^8=\log_{2^2}^{2^3}=\frac{3}{2}$

کار بد را همیشه فردا انجام بده.

«یونانی»

کار امروز را برای فردا مگذار.

«پیامبر اسلام»

فکر چراغ مغز است.

«پیامبر اسلام»

عبادت بجز خدمت خلق نیست.

«سعدی»

تست ۶:

۱ـ تعداد نقاط انفصال تابع $y = \lfloor 2x^2 \rfloor$ در بازه‌ی $(2,4)$، کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۴ ۳) ۲۳ ۴) ۲۲

۲ـ تابع $f(x) = \dfrac{x\cos x}{(|x| - \pi)\sin \pi x}$، در کدام نقاط ناپیوسته است؟

۱) $\{\pm\pi\}$ ۲) Z ۳) $Z \cup \{\pm\pi\}$ ۴) $N \cup \{\pi\}$

۳ـ تابع $y = \lfloor \cos x \rfloor$ در بازه‌ی $(0, 2\pi)$، چند نقطه‌ی انفصال دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴ـ هرگاه تابع مقابل در $x = 2$ پیوسته باشد، $f(x) = \begin{cases} \dfrac{12b\sqrt{x^2-4x+4}}{x^3-8} & ,(x<2) \\ 3 & ,(x=2) \\ 2\lfloor -x \rfloor + a & ,(x>2) \end{cases}$، $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) -3 ۳) ۶ ۴) -6

۵ـ کدام تابع در $x = 2$ ناپیوسته است؟

۱) $y = \lfloor 2x \rfloor$
۲) $y = \begin{cases} 3x-3 & ,(x \in Q) \\ x+1 & ,(x \in R-Q) \end{cases}$
۳) $y = (x^2-4)\lfloor x \rfloor$
۴) $y = \left\lfloor \dfrac{x}{3} \right\rfloor$

۶ـ تابع $f(x) = \begin{cases} x & ,(x \notin Z) \\ x^2 & ,(x \in Z) \end{cases}$، در بازه‌ی $(-3,3)$، در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

۷ـ تابع $f(x) = \begin{cases} ax + \left\lfloor x^2 - \frac{5}{3} \right\rfloor & ,(x>2) \\ \left\lfloor -x^2 + \sqrt{3} \right\rfloor & ,(x=2) \\ 2bx + \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2} & ,(x<2) \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 2$ پیوسته است، $a+b$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۳ ۳) -3 ۴) $-\frac{5}{2}$

۸ـ مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x & ,(|x| \le 1) \\ -1 & ,(|x| > 1) \end{cases}$ کدام است؟

۱) $\{1\}$ ۲) $\{1,-1\}$ ۳) $\{-1\}$ ۴) $\{-1,0,1\}$

۹ـ تابع $y = \left\lfloor \dfrac{3x-1}{2} \right\rfloor$ در بازه‌ی $(-1,3)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۰ـ تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & ,(x \in Z) \\ -1 & ,(x \notin Z) \end{cases}$ مفروض است، مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع fof چند عضو دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۱ـ (۳) $۲ < x < ۴ \Rightarrow ۴ < x^۲ < ۱۶ \Rightarrow ۸ < ۲x^۲ < ۳۲$

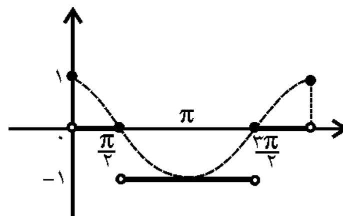
نکته: تابع $y = \lfloor ۲x^۲ \rfloor$ در بازه‌ی (۲,۴) در نقاطی که $۲x^۲$ صحیح شود، ناپیوسته است، در بازه‌ی (۸,۳۲)، ۲۳ عدد صحیح وجود دارد.

۲ـ (۳) چون صورت و مخرج هر دو پیوسته‌اند لذا نقاط ناپیوستگی تابع ریشه‌های مخرجند.

$|x| - \pi = ۰ \Rightarrow x = \pm\pi$

$\sin\pi x = ۰ \Rightarrow \pi x = k\pi \Rightarrow x = k \in Z$

۳ـ (۲) تابع در نقاط $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ ناپیوسته است.



۴ـ (۳) $f(۲) = ۳$

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \to ۲^-} \frac{۱۲b|x-۲|}{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)} = \frac{-۱۲b}{۱۲} = -b \Rightarrow \begin{cases} -b = ۳ \\ -۶ + a = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -۳ \\ a = ۹ \end{cases} \Rightarrow a + b = ۶$$

$$\text{حد راست} = \lim_{x \to ۲^+} (۲\lfloor -x \rfloor + a) = -۶ + a$$

۵ـ (۱) تابع $y = \lfloor ۲x \rfloor$ در نقاط ... و ± ۲ و $\pm\frac{۳}{۲}$ و ± ۱ و $\pm\frac{۱}{۲}$ و ۰ ناپیوسته است.

۶ـ (۳) تابع f داده شده در نقاط غیرصحیح پیوسته است، ضمناً تابع در نقاط صحیح ۰ و ۱ پیوسته است (زیرا $x^۲ = x \Rightarrow x = ۰$ و ۱) لذا در بازه‌ی (۳,۳−) در نقاط صحیح ۲− و ۱− و ۲ ناپیوسته است.

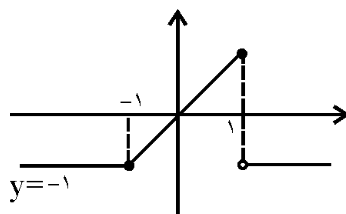
۷ـ (۳) $f(۲) = \lfloor -۴ + \sqrt{۳} \rfloor = -۳$

$\text{حد راست} = ۲a + ۲$

$\text{حد چپ} = \lim_{x \to ۲^-} (۲bx + \frac{|x-۲|}{x-۲}) = ۴b - ۱$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{۵}{۲} \\ b = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow a + b = -۳$$

۸ـ (۱)



۹ـ (۲) تابع $y = \left\lfloor \frac{۳x-۱}{۲} \right\rfloor$ در بازه‌ی (۱,۳−) در نقاطی که داخلش صحیح شود ناپیوسته است.

$$-۱ < x < ۳ \Rightarrow -۳ < ۳x < ۹ \Rightarrow \frac{-۱-۱}{۲} < \frac{۳x-۱}{۲} < \frac{۹-۱}{۲} \Rightarrow -۱ < \frac{۳x-۱}{۲} < ۴$$

چون در فاصله‌ی (۱,۴−)، اعداد صحیح ۰ و ۱ و ۲ و ۳ وجود دارند لذا تابع در چهار نقطه ناپیوسته است. البته این نقاط عبارتند از: $x \in \{\frac{۱}{۳}, ۱, \frac{۵}{۳}, \frac{۷}{۳}\}$

زیرا: $\frac{3x-1}{2} \in \{0,1,2,3\}$

۱۰ـ (۱)

$$(fof)(x) = f(f(x)) = \begin{cases} 1 & ,(x \in Z) \\ 1 & ,(x \notin Z) \end{cases} \Rightarrow y = (fof)(x) = 1$$

تابع ثابت y = ۱ همه جا پیوسته است.

عاقبت جوینده یابنده بود.

«مولوی»

برای شب پیری در روز جوانی چراغی باید تهیه دهید.

«افلاطون»

عشق کوتاهترین راه از قلبی به قلب دیگر است.

«موریس بدل»

عشق دفتر زندگی و سعادت جاودانگی است.

«سعدی»

علم نور است و جهل تاریکی.

«اوحدی»

تست ۷:

۱ـ هرگاه تابع $f(x)=\begin{cases}\lfloor \sin x-\frac{1}{2}\rfloor+a & ,(x<\frac{\pi}{6})\\ \lfloor -(x+\sin x)\rfloor & ,(x=\frac{\pi}{6})\\ \lfloor \sin x+\frac{1}{2}\rfloor+b & ,(x>\frac{\pi}{6})\end{cases}$ در $x=\frac{\pi}{6}$ پیوسته باشد، $a-b$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 2 ۳) -2 ۴) -4

۲ـ تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & ,(x\in Q)\\ 5x-4 & ,(x\in R-Q)\end{cases}$ مفروض است، این تابع در چند نقطه پیوسته است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۰ ۴) بی‌شمار

۳ـ تابع $f(x)=x^2\sin\lfloor x\rfloor+\sin\lfloor x\rfloor$ در $x=0$، چگونه است؟

۱) پیوسته ۲) معین ۳) فقط از راست پیوسته ۴) فقط از چپ پیوسته

۴ـ هرگاه $f(x)=\begin{cases}\frac{b}{x}\tan x & ,(x>0)\\ 2 & ,(x=0)\\ a\lfloor x\rfloor+b\lfloor -x\rfloor & ,(x<0)\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 0 ۳) 1 ۴) -4

۵ـ تابع $y=\text{sign}(x^2-1)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۶ـ حدود m، کدام باشد تا یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2-(m+1)x+2m-3=0$ در فاصله‌ی $[-1,1]$ قرار بگیرد؟

۱) $\frac{1}{3}\le m\le 3$ ۲) $-1\le m\le 3$ ۳) $-\frac{1}{3}\le m\le 3$ ۴) $-3\le m\le\frac{1}{3}$

۷ـ هرگاه تابع $(n\in N)\ f(x)=\begin{cases}x^{n-1}\sin\frac{1}{x} & ,(x\neq 0)\\ 0 & ,(x=0)\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد، حدود n کدام است؟

۱) $n\in N-\{1,2\}$ ۲) $n\in N-\{0\}$ ۳) $n\in N$ ۴) $n\in N-\{1\}$

۸ـ هرگاه تابع $f(x)=(x^2+ax)\lfloor x\rfloor+2x^2+b\lfloor x\rfloor$ در نقاط $x=1$ و $x=2$ پیوسته باشد، a و b عبارتند از:

۱) $\begin{cases}a=3\\ b=-2\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}a=-3\\ b=-2\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}a=-3\\ b=2\end{cases}$

۹ـ تابع f در بازه‌ی $[a,b]$، پیوسته و اکیداً صعودی است، هرگاه معادله‌ی $f(x)=0$، در این بازه، ریشه داشته باشد، نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}f(a)\\ f(b)\end{matrix}\right.$، در کدام ناحیه واقع است؟

۱) ربع اول ۲) ربع دوم ۳) ربع سوم ۴) ربع چهارم

۱۰ـ تابع $f(x)=\sqrt{1-2x^2}$ مفروض است، تابع $y=f(\sin x)$ در کدام فاصله، پیوسته است؟

۱) $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ ۲) $[0,\pi]$ ۳) $(0,\pi)$ ۴) R

۱ـ (۲)

$f(\frac{\pi}{6}) = \left\lfloor -(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}) \right\rfloor = \left\lfloor -(\text{خورده‌ای}/1) \right\rfloor = -2$

$\text{حد راست} = \left\lfloor (\frac{1}{2})^{+}+\frac{1}{2} \right\rfloor + b = 1 + b$

$\text{حد چپ} = \left\lfloor (\frac{1}{2})^{-}-\frac{1}{2} \right\rfloor + a = \lfloor 0^{-} \rfloor + a = a - 1$

$\begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a - b = 2$

۲ـ (۱)

$x^2 = 5x - 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ و 4

۳ـ (۳)

$f(x) = (x^2+1)\sin\lfloor x \rfloor$

$f(0) = 0$

$\text{حد راست در } 0 = (0+1)\sin 0 = 0$

$\text{حد چپ در } 0 = (0+1)\sin(-1) = \sin(-1)$

تابع فقط از راست پیوسته است.

۴ـ (۲)

$f(0) = 2$

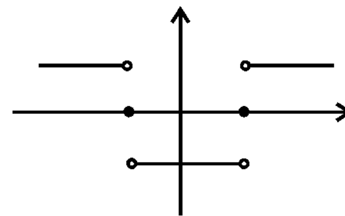
$\text{حد راست} \sim \lim_{x \to 0} \frac{b}{x} \times x = b$

$\text{حد چپ} = a\lfloor 0^{-} \rfloor + b\lfloor 0^{+} \rfloor = -a$

$\Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 0$

۵ـ (۳) تابع در نقاط ۱ و ۱− ناپیوسته است.

$y = \text{sign}(x^2-1) = \begin{cases} 1 & ,(x < -1 \text{ یا } x > 1) \\ 0 & ,(x = \pm 1) \\ -1 & ,(-1 < x < 1) \end{cases}$



۶ـ (۱) طبق قضیه‌ی بولتزانو، کافی است $f(-1) \times f(1) \leq 0$ باشد.

$f(-1) = 3m - 1$

$f(1) = m - 3$

$\Rightarrow (3m-1)(m-3) \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq m \leq 3$

۷ـ (۴) چون $y = \sin\frac{1}{x}$ در ۰ حد ندارد،

لذا ضریبش یعنی x^{n-1} بایستی صفر شود در نتیجه $n - 1 > 0$ یا $n > 1$

$\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \to 0} x^{n-1}\sin\frac{1}{x} = 0 \end{cases}$

۸ـ (۴)

$f(x) = (x^2 + ax + b)\lfloor x \rfloor + 2x^2$

$x^2 + ax + b = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$

نکته: $(n \in Z)\ y = (x-n)\lfloor x \rfloor$ در n پیوسته است.

۹ـ (۲) چون $a < b$ است و f اکیداً صعودی است لذا $f(a) < f(b)$ و چون معادله‌ی $f(x) = 0$، در این بازه ریشه دارد لذا طبق قضیه‌ی بولتزانو، f(a) و f(b) مختلف العلامه‌اند پس f(a) منفی و f(b) مثبت است. بنابراین نقطه‌ی $A \left| \begin{matrix} f(a) \\ f(b) \end{matrix} \right.$ در ناحیه‌ی دوم قرار دارد.

۱۰ـ (۱)

$y = f(\sin x) = \sqrt{1 - 2\sin^2 x} \Rightarrow 1 - 2\sin^2 x \geq 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

تست ۸:

۱ـ تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x-x^3}{x^3-x^2-2x} & ,(x\neq 0)\\ -2 & ,(x=0)\end{cases}$، در کدام بازه‌ی زیر پیوسته است؟

۱) $[-1,1]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $[0,2)$ ۴) $(\frac{1}{2},+\infty)$

۲ـ توابع $f(x)=3x-6$ و $g(x)=x^2+x+1$ مفروضند، کدامیک از توابع زیر در R پیوسته نیست؟

۱) $3f(x)g(x)$ ۲) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ۳) $\sqrt{f(x)g(x)}$ ۴) $7g^2(x)+\sqrt[3]{f(x)}$

۳ـ هرگاه تابع f در بازه‌ی $[-1,1]$، تابعی زوج و پیوسته باشد، با توجه به مقادیر f در جدول زیر، معین کنید، معادله‌ی $f(x)=0$ در بازه‌ی $[-1,1]$، حداقل چند ریشه دارد؟

x	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱
f(x)	۰	۰/۴۵	۰/۸۵−	۰/۳۲	۱/۴۵	۱/۱

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۳

۴ـ در معادله‌ی $ax^{2n-1}+bx^{2n-2}+\dots+k=0$ ضرائب، اعداد حقیقی‌اند و $(n\in N)$، کدام نتیجه درست و کامل است؟ $(a\neq 0)$

۱) معادله، حداکثر n ریشه‌ی حقیقی دارد. ۲) معادله حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

۳) معادله‌ی، حداکثر $(2n-1)$ ریشه‌ی حقیقی دارد. ۴) گزینه‌های ۲ و ۳

۵ـ نقاط انفصال تابع $y=\dfrac{1}{u^2+u-2}$ با شرط $u=\dfrac{1}{x-1}$ کدام است؟

۱) $\{1,2\}$ ۲) $\{1,\frac{1}{2}\}$ ۳) $\{2,\frac{1}{2}\}$ ۴) $\{1,2,\frac{1}{2}\}$

۶ـ کدام یک از توابع زیر در بازه‌ی داده شده، ماکزیمم مطلق دارد؟

۱) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ، $0<x\leq 1$ ۲) $f(x)=2x+1$ ، $-1\leq x<1$ ۳) $f(x)=\dfrac{-1}{1+x^2}$ ، $-\infty<x<+\infty$ ۴) $f(x)=5-x^2$ ، $-1\leq x<1$

۷ـ کدام حکم زیر صحیح است؟

۱) اگر f در بازه‌ی (a,b) و (b,c) پیوسته باشد، آنگاه f در بازه‌ی (a,c) پیوسته است.

۲) اگر f در بازه‌ی [a,b) و [b,c] پیوسته باشد، آنگاه f در بازه‌ی [a,c] پیوسته است.

۳) اگر f در بازه‌ی [a,b] و [b,c] پیوسته باشد، آنگاه f در بازه‌ی [a,c] پیوسته است.

۴) هر سه مورد

۸ـ هرگاه تابع $f(x) = \begin{cases} (2x-2)\cot(x^2-1) & ,(x \neq 1) \\ kx-1 & ,(x=1) \end{cases}$ در $x = 1$ پیوسته باشد، k کدام است؟

۱) -12 ۲) -1 ۳) 2 ۴) $\frac{1}{5}$

۹ـ کدام خط نمودار تابع $y = (x-a)(x-b)+x$ را حتماً قطع می‌کند؟ $(a < b)$

۱) $y = a+b$ ۲) $y = 2(a+b)$ ۳) $y = \frac{a+b}{2}$ ۴) $y = a+2b$

۱۰ـ مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع $y = \lfloor x^2-2x \rfloor$ کدام است؟ $(n \in N)$

۱) $\{x \mid x = 1+\sqrt{n+2}\}$ ۲) $\{x \mid x = 1-\sqrt{n+2}\}$ ۳) $\{x \mid x = 1+\sqrt{1+n}\}$ ۴) $\{x \mid x = 1+\sqrt{n}\}$

مردان کامیاب غالباً از شکست میوهٔ پیروزی می‌چینند.

«گوته»

غیرممکن فقط برای کسانی وجود دارد که ناتوانند.

«ژول‌ورن»

عشق دفتر زندگی و سعادت جاودانگی است.

«سعدی»

قدرت برای انسان، ایجاد حق می‌کند.

«بیمارک»

۱ـ (۳) $x^{۳}-x^{۲}-۲x=۰ \Rightarrow x(x^{۲}-x-۲)=۰ \quad \overset{x\neq ۰}{\Rightarrow}$

$x^{۲}-x-۲=۰ \Rightarrow x=-۱\ ,\ ۲$

تابع در نقاط ۱− و ۲ ناپیوسته است.

$\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{x(۴-x^{۲})}{x(x^{۲}-x-۲)}=-۲=f(۰)$

تابع در نقطه‌ی ۰ پیوسته است.

بنابراین f در بازه‌ی [۰,۲) پیوسته است.

۲ـ (۳) $y=\sqrt{f(x)g(x)}=\sqrt{(۳x-۶)(x^{۲}+x+۱)} \Rightarrow$ حدود پیوستگی $=[۲,+\infty)$

۳ـ (۳) چون f در بازه‌ی (۰,۱) دوبار تغییر علامت داده لذا در این بازه حداقل دو ریشه دارد ضمناً چون $f(۰)=۰$ است پس خود ۰ نیز یک ریشه‌ی معادله است از طرفی چون f زوج است طبق اعداد جدول داریم:

x	۰	−۰/۲	−۰/۴	−۰/۶	−۰/۸	−۱
f(x)	۰	۰/۴۵	−۰/۸۵	۰/۳۲	۱/۴۵	۱/۱

و لذا دو ریشه نیز در بازه‌ی (−۱,۰) دارد. بنابراین جمعاً در بازه‌ی [−۱,۱] حداقل ۵ ریشه دارد.

۴ـ (۴) چون معادله از درجه‌ی فرد است لذا معادله حداقل ۱ ریشه دارد (هر معادله‌ی از درجه‌ی فرد در R حداقل یک ریشه دارد) ضمناً چون معادله از درجه‌ی (۲n−۱) است پس حداکثر (۲n−۱) ریشه دارد. (هر معادله‌ی از درجه‌ی n در R، حداکثر n ریشه دارد)

۵ـ (۴) $y=\dfrac{۱}{(\frac{۱}{x-۱})^{۲}+\frac{۱}{x-۱}-۲} \Rightarrow x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$

$(\dfrac{۱}{x-۱})^{۲}+\dfrac{۱}{x-۱}-۲=۰ \Rightarrow a+b+c=۰ \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{۱}{x-۱}=۱\\ \dfrac{۱}{x-۱}=\dfrac{c}{a}=-۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=۲\\ x=\dfrac{۱}{۲}\end{cases}$

پس تابع در نقاط $\{۱,۲,\frac{۱}{۲}\}$ ناپیوسته است.

۶ـ (۴) $-۱\leq x<۱ \Rightarrow ۰\leq x^{۲}\leq ۱ \Rightarrow -۱\leq -x^{۲}\leq ۰ \Rightarrow ۴\leq ۵-x^{۲}\leq ۵ \Rightarrow Max\,(۵-x^{۲})=۵$

۷ـ (۳) چون f در [a,b] پیوسته است لذا در b پیوستگی چپ دارد و چون در [b,c] پیوسته است لذا در b پیوستگی راست نیز دارد پس f در b پیوسته است.

۸ـ (۳) $f(۱)=k-۱$

$\lim\limits_{x\to ۱}(۲x-۲)\cot(x^{۲}-۱)=۰\times\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۲x-۲}{\tan(x^{۲}-۱)}=\dfrac{۰}{۰} \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۲(x-۱)}{x^{۲}-۱}=۱ \Rightarrow k-۱=۱ \Rightarrow k=۲$

۹ـ (۳) $\begin{matrix}f(a)=a\\ f(b)=b\end{matrix}\ ,\quad a<\dfrac{a+b}{۲}<b \Rightarrow f(a)<\dfrac{a+b}{۲}<f(b)$

پس طبق قضیه‌ی مقدار میانی خط $y=\dfrac{a+b}{۲}$ حتماً نمودار تابع f را در بازه‌ی [a,b]، حداقل در یک نقطه قطع می‌کند.

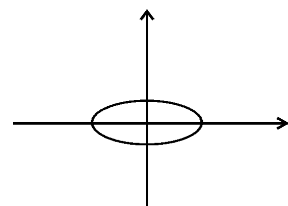
۱۰ـ (۴) $y=\lfloor (x-۱)^{۲}\rfloor-۱ \Rightarrow (x-۱)^{۲}=n\in N \Rightarrow (x-۱)=\pm\sqrt{n} \Rightarrow x=۱\pm\sqrt{n}$

فصل شانزدهم

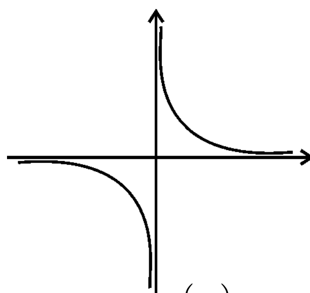
مجانب

نقطه‌ی بی‌نهایت: نقطه‌ایست که طول یا عرض آن بینهایت باشد، مانند $A\left|\begin{matrix}2\\ \infty\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}\infty\\ 3\end{matrix}\right.$

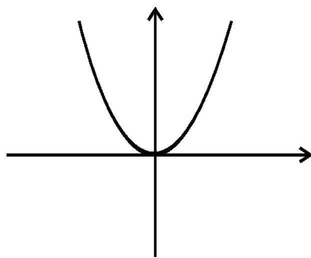
شاخه‌ی بینهایت: شاخه‌ی بی‌نهایت در هر منحنی، شاخه‌ای است که روی آن x یا y یا هر دو به سمت بی‌نهایت بروند، به عبارت دیگر، شاخه‌ای‌ایست که روی آن نقطه‌ی بینهایت وجود داشته باشد.



(الف)



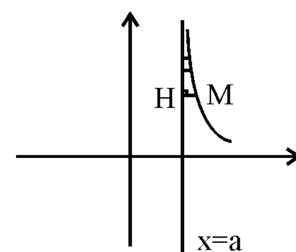
(ب)



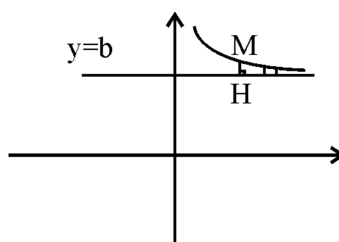
(ج)

شکلهای (ب) و (ج) شاخه‌ی بینهایت دارند، اما شکل (الف) شاخه‌ی بی‌نهایت ندارد.

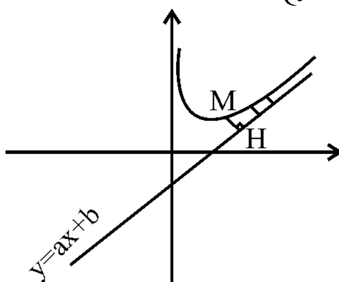
تعریف مجانب: مجانب خطی است افقی، قائم و یا مایل که در نقطه‌ی بینهایت برمنحنی مماس شود، به عبارت دیگر، خطی است که فاصله‌ی نقاط منحنی از آن خط هنگامیکه $x \to \pm\infty$ یا $y \to \pm\infty$ یا $\begin{cases}x\to\pm\infty\\ y\to\pm\infty\end{cases}$، به سمت صفر میل کند.



(مجانب قائم)



(مجانب افقی)



(مجانب مایل)

تعریف مجانب قائم: خط قائم $x = a$ را مجانب قائم منحنی $y = f(x)$ گویند هرگاه شرایط زیر برقرار باشند.

۱) $x = a$ ریشه‌ی مخرج کسر باشد (البته در توابع کسری)

۲) a^+ یا a^- متعلق به دامنه‌ی تابع باشند.

۳) وقتی که x به سمت a میل می‌کند (چه از راست چه از چپ) آنگاه y به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند.

لذا می‌توان گفت:

خط $x = a$ را مجانب قائم منحنی $y = f(x)$ گویند، اگر و فقط اگر که حداقل یکی از روابط زیر برقرار باشند.

$$\begin{cases} \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$

نکته‌ی مهم: توجه داشته باشید که در مجانب قائم این y است که بایستی به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ یا $\pm\infty$ میل کند و لذا در توابعی که y نتواند به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند (به عبارت دیگر بُرد تابع محدود باشد) تابع مجانب قائم نخواهد داشت.

به عنوان مثال، توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$ و $y = \text{Arcsin}x$ و $y = \text{Arccot}x$ و $y = \text{Arctan}x$ و $y = \text{Arccot}x$ و $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ و... مجانب قائم ندارد. زیرا: $-1 \le \sin x \le 1$ و $-1 \le \cos x \le 1$ و $-\frac{\pi}{2} \le \text{Arcsin}x \le \frac{\pi}{2}$ و $0 \le \text{Arccos}x \le \pi$ و $-\frac{\pi}{2} < \text{Arctan}x < \frac{\pi}{2}$ و $0 < \text{Arccot}x < \pi$ و $0 \le \frac{x^2}{x^2+1} < 1$

تذکر مهم: شرط لازم برای وجود مجانب قائم آنستکه، y بتواند به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند اما این شرط کافی نیست.

مثال: در تابع $y = x^2$، y می‌تواند به سمت $\pm\infty$ میل کند، اما این تابع مجانب قائم ندارد!

نکتهٔ مهم: شرط لازم برای وجود مجانب قائم توابع کسری، آنستکه مخرج کسر ریشه داشته باشد، ولی این شرط کافی نیست، یعنی هر ریشه‌ی مخرجی، ممکن است مجانب قائم نباشد.

مثال: آیا تابع $y = \frac{x-1}{x^2+4}$ مجانب قائم دارد؟

خیر، زیرا مخرج ریشه ندارد.

مثال: توابع $y = \frac{x^2}{x}$ و $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ مجانب قائم ندارند، با وجود اینکه مخرج کسر دارای ریشه‌ی $x = 0$ است. (برای درک بهتر مطلب به نکات بعدی توجه نمائید.)

نکته: در توابع کسری، هرگاه $x = a$ ریشه‌ی مخرج کسر باشد و این ریشه، ریشه‌ی صورت کسر نیز باشد، زمانی $x = a$ مجانب قائم تابع هست که درجه‌ی این ریشه در مخرج از صورت بیشتر باشد.

در واقع هنگامیکه $x \to a$ میل می‌کند، بایستی حد تابع $\pm\infty$ شود.

تست: درکدام تابع زیر، خط $x = 0$ مجانب قائم می‌باشد؟

۱) $y = \frac{x^2}{x}$ ۲) $y = \frac{x}{x}$ ۳) $y = \frac{x}{x^3}$ ۴) هیچکدام

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۳ می‌باشد.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

تست: تابع $y = \frac{x}{x^3-x}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل: پس دو مجانب قائم دارد.

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \ \text{غیر قابل قبول} \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^3 - x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2 - 1} = -1 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

تست: **تابع** $y = \dfrac{\sin x}{x^2 - 2|x|}$ **چند مجانب دارد؟**

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) ۴　　مجانب افقی $y = 0$

حل: $x^2 - 2|x| = 0 \Rightarrow |x|(|x| - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \ \text{غیرقابل قبول} \\ x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow$ پس کلاً ۳ مجانب دارد.

تست: a و b **چند باشند تا خطوط** $x = \pm 1$، **مجانبهای قائم تابع** $y = \dfrac{-5x}{x^2 + ax + b}$ **باشند؟**

۱) $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$　　۲) $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$　　۳) $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$　　۴) $\begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + ax + b = 0 \\ y \to \pm\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow 1 + a + b = 0 \\ x = -1 \Rightarrow 1 - a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$$

راه دوم: $x^2 + ax + b = (x-1)(x+1) = x^2 + 0x - 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases}$

نکته: در توابع کسری، هرگاه $x = a$ ریشه‌ی مخرج کسر باشد، اما تابع در هیچ همسایگی a، تعریف نشده باشد، خط $x = a$ مجانب قائم تابع نخواهد بود. (در واقع بایستی حداقل یکی از a^+ و a^- در دامنه‌ی تابع باشند.)

مثال: در تابع $y = \dfrac{\sqrt{x - 2}}{x - 1}$، **خط** $x = 1$ **مجانب قائم نیست، زیرا هنگامیکه** $x \to 1$ **میل می‌کند، زیر رادیکال صورت منفی می‌شود.**

تست: **تابع** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ **چند مجانب قائم دارد؟**

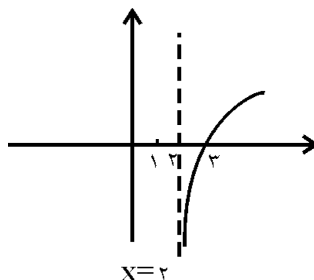
۱) ۱　　۲) ۲　　۳) ۳　　۴) هیچی

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \xrightarrow[\text{غیر قابل قبول}]{\text{غیر قابل قبول}} x \to 1^+ \Rightarrow y \to +\infty$$

نکته: فقط توابع کسری نیستند که مجانب قائم دارند، بلکه توابعی هستند که کسری نیستند ولی مجانب قائم دارند.

مثال: در تابع $y = \log(x - 2)$، **خط** $x = 2$، **مجانب قائم است زیرا:**

$x \to 2^+ \Rightarrow y \to -\infty$



نکته: در توابع $y = \log_a(f(x))$ و $y = \text{Ln}(f(x))$، مجانبهای قائم ریشه‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ هستند.

تست: تابع $y = \log(x^۲ - ۴)$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

حل: $x^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲$ مجانب قائم

تست: تابع $y = \dfrac{Lnx + ۱}{Lnx - ۲}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

حل: یک مجانب قائم دارد. $Lnx - ۲ = ۰ \Rightarrow x = e^۲$ مجانب قائم

تذکر: کل ریشه‌های مخرج هر تابع کسری، بدون هیچ قید و شرطی، طولهای نقاط انفصال (ناپیوستگی) تابع هستند، (به عبارت دیگر در توابع کسری هر مجانب قائمی طول نقطه‌ی انفصال تابع نیز هست) اما ممکن است همه و یا برخی از آنها مجانب قائم باشند (یعنی نمی‌توان گفت هر نقطهٔ ناپیوستگی تابع، مجانب قائم تابع نیز هست)

مجانب افقی: خط افقی $y = b$ را مجانب افقی تابع $y = f(x)$ گویند هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند.

۱) متغیر مستقل (یعنی x) بتواند به سمت $+\infty$ و $-\infty$ میل کند.

۲) وقتی که x به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند، حد تابع برابر b شود.

لذا می‌توان گفت:

خط $y = b$ را مجانب افقی منحنی $y = f(x)$ گویند، اگر و فقط اگر که حداقل یکی از روابط زیر برقرار باشند.

$$\begin{cases} ۱)\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \\ \text{یا} \\ ۲)\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \end{cases}$$

نکته‌ی مهم: توجه داشته باشید که در مجانب افقی، این x است که بایستی به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ یا $\pm\infty$ میل کند و لذا در توابعی که x نتواند به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند (به عبارت دیگر، دامنهٔ تابع محدود باشد) تابع مجانب افقی نخواهد داشت.

به عنوان مثال: توابع $y = \sqrt{۴ - x^۲}$، $y = Arcsinx$ و $y = Arccosx$ و ... مجانب افقی ندارند.

تذکر مهم: شرط لازم برای وجود مجانب افقی، آنستکه x بتواند به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند، اما این شرط کافی نیست. (البته در این حالت، y بایستی به سمت یک عدد حقیقی میل کند)

مثال: در تابع $y = x^۲$، x می‌تواند به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند، اما این تابع مجانب افقی ندارد.

مثال: مجانب افقی توابع زیر را بیابید؟

$$۱)\ y = \frac{۲x^۲ + ۱}{x^۲ - ۱} \Rightarrow \begin{cases} x \to \pm\infty \\ y = ۲ \end{cases}$$ (حد تابع)

$$۲)\ y = \frac{۱}{\sqrt{x}} + \frac{۱}{\sqrt{x - ۱}} + ۵ \Rightarrow \begin{cases} x \to +\infty \\ y = ۵ \end{cases}$$ (حد تابع)

$$۳)\ y = x\sin\frac{۱}{x^{۲}+۱} \Rightarrow \begin{cases} x \to \pm\infty \\ y = ۰ \end{cases}$$ (حد تابع)

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\sin\frac{۱}{x^{۲}+۱} \sim \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^{۲}+۱} = ۰$$

$$۴)\ y = \sqrt{x^{۲}-۴x} - x \Rightarrow \begin{cases} x \to +\infty \\ y = -۲ \end{cases}$$ (حد تابع)

هم ارزی $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}(|x-۲|-x) = -۲$

$$۵)\ y = \log\frac{x-۱}{x-۲} \quad \begin{cases} x \to \pm\infty \\ y = \log ۱ = ۰ \end{cases}$$ (حد تابع)

$$۶)\ y = x + \sqrt{x^{۲}+۴x+۱} \Rightarrow \begin{cases} x \to -\infty \\ y = -۲ \end{cases}$$ (حد تابع)

هم ارزی $\lim_{x\to-\infty}(x+|x+۲|) = -۲$

مجانب مایل: خط مایل $y = ax + b\ (a \neq ۰)$ را مجانب مایل منحنی $y = f(x)$ گویند، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند.

۱) وقتی x به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند، y نیز به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند.

۲) $\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}|f(x)-(ax+b)| = ۰ \\ \lim_{x\to-\infty}|f(x)-(ax+b)| = ۰ \end{cases}$

وجود داشته باشد $M \in R$ به طوریکه اگر $x > M$ آنگاه: $f(x) \neq ax + b$

وجود داشته باشد $M \in R$ به طوریکه اگر $x < -M$ آنگاه $f(x) \neq ax + b$

در این حالت داریم $h(x) = f(x) - (ax + b)$ و $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = ۰$، h را تابع میرا (مردنی) (میل کننده به صفر) می‌گویند.

نکته: هرگاه خط $y = ax + b$ مجانب مایل تابع $y = f(x)$ باشد، a و b از روابط زیر حساب می‌شوند.

$$\begin{cases} a = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-ax) \end{cases}$$

بدیهی است زمانی خط $y = ax + b$، مجانب مایل نمودار $y = f(x)$ است که حدود فوق هر دو موجود باشند، لذا ممکن است هر یک از حالات زیر پیش آیند.

۱) اگر a و b مقادیر حقیقی معینی داشته باشند $(a \neq ۰)$ و تابع $y = f(x)$ مجانب مایل داشته باشد، آنگاه برای پیدا کردن مجانب مایل در این حالت، بایستی مقادیر a و b را از دو فرمول فوق به دست آورده و در فرمول $y = ax + b$ جایگذاری نمائیم.

مثال: مجانب مایل تابع $y = \frac{x^{۲}+۲}{x-۱}$ را بیابید؟

$$a = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^{۲}+۲}{x-۱}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}+۲}{x^{۲}-x} = ۱$$ شیب مجانب مایل

عرض از مبدأ مجانب مایل $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty}(f(x) - ax) = \lim\limits_{x \to \pm\infty}(\frac{x^۲ + ۲}{x - ۱} - x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty}\frac{x + ۲}{x - ۱} = ۱$

مجانب مایل $y = ax + b = x + ۱$

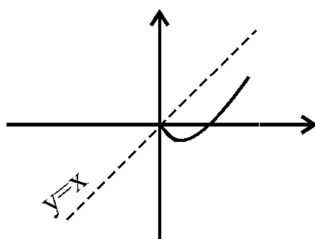
۲) اگر هر یک از حدود فوق موجود نباشند و یا مساوی $+\infty$ یا $-\infty$ شوند، تابع مجانب مایل ندارد، در این حالت به حالتهای خاص زیر توجه کنید.

الف) اگر $a = ۰$ باشد و b یک عدد غیرصفر، در این صورت خط $y = b$ مجانب افقی تابع $y = f(x)$ خواهد بود.

ب) اگر a یک عدد حقیقی باشد و b برابر $+\infty$ یا $-\infty$ باشد، منحنی تابع، با شاخه‌ی سهمی شکل (سهمی‌وار)، در امتداد خط $y = ax$ به بینهایت می‌رود.

مثال: در تابع $y = x - \sqrt{x}$، منحنی تابع با شاخه‌ی سهمی شکل در امتداد خط $y = x$ به ∞ می‌رود.

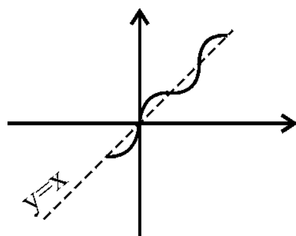
$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x \to +\infty}\frac{y}{x} = ۱ \\ b = \lim\limits_{x \to +\infty}(y - x) = -\infty \end{cases}$$



ج) اگر a یک عدد حقیقی باشد و b مقدار معینی نداشته باشد، آنگاه منحنی تابع در امتداد خط $y = ax$ به بینهایت می‌رود ولی دارای شاخه‌ی سهمی شکل نیست.

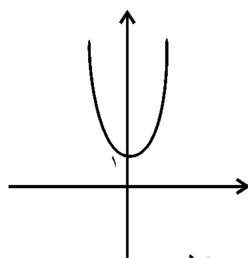
مثال: تابع $y = x + \sin x$ در راستای $y = x$ به بینهایت می‌رود.

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x \to \pm\infty}\frac{y}{x} = ۱ \\ b = \lim\limits_{x \to \pm\infty}(y - x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty}\sin x = \text{وجود ندارد} \end{cases}$$



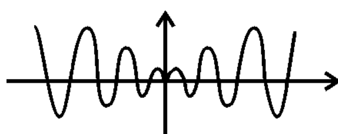
د) اگر a، برابر $+\infty$ یا $-\infty$ باشد، منحنی در امتداد محور yها با شاخه‌ی سهمی به بینهایت می‌رود.

مثال: تابع $y = x^۲ + ۱$ در امتداد محور yها با شاخه‌ی سهمی به بینهایت می‌رود.



ه) اگر برای a، حد معینی به دست نیاید، منحنی تابع راستای مجانب ندارد ولی خودش به بینهایت می‌رود.

مثال: $y = x\sin x$



تذکر مهم: در تابع $y = f(x)$، هرگاه $x \to \pm\infty$ و $y \not\to \pm\infty$، تابع مجانب مایل ندارد.

مثال: $y = \sin x$

نکته: در تابع $y = f(x)$، هرگاه $x \to \pm\infty$ و $y \to \pm\infty$، تابع مجانب افقی نداشته ولی ممکن است مجانب مایل داشته باشد.

نکته مهم: در توابع گویا

معادله مجانب افقی یا مایل	مجانب افقی یا مایل	درجه‌ی صورت و مخرج	تابع
مجانب افقی $y = \frac{۱}{۲}$	تابع فقط مجانب افقی دارد و مجانب مایل ندارد.	برابر	۱) $y = \frac{x^۲}{۲x^۲+۱}$
مجانب افقی $y = ۰$	تابع فقط مجانب افقی دارد و مجانب مایل ندارد.	درجه‌ی‌مخرج > درجه‌ی‌صورت	۲) $y = \frac{x}{x^۳+۱}$
مجانب مایل $y = x + ۱$	تابع حتماً مجانب مایل دارد ولی مجانب افقی ندارد.	۱+درجه‌ی مخرج = درجه صورت یا درجهٔ صورت فقط یک واحد از درجه‌ی مخرج بیشتر باشد.	۳) $y = \frac{x^۲+۲}{x-۱}$
---------	تابع نه مجانب افقی دارد نه مایل	درجه‌ی صورت از درجه‌ی‌مخرج، بیش از یک واحد بیشترباشد.	۴) $y=\frac{x^۳+x+۱}{x+۴}$

نکته‌ی مهم: در توابع گویا، هرگاه درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج، فقط یک واحد بیشتر باشد، در این صورت تابع صددرصد مجانب مایل داشته و برای تعیین آن، کافی است، صورت را بر مخرج تقسیم کرده، (خارج قسمت = y) معادله‌ی مجانب مایل خواهد بود.

مثال: مجانب مایل تابع $y = \frac{x^۲+x+۱}{x+۲}$ را بیابید؟

$$\begin{array}{l|l} x^۲+x+۱ & x+۲ \\ -x^۲-۲x & x-۱ \\ \hline -x+۱ & \\ +x+۲ & \\ \hline ۳ & \end{array} \Rightarrow y = x-۱$$ معادله‌ی مجانب مایل

روش دوم:

نکته: مجانب مایل تابع $y = \frac{x^۲+ax+b}{x+a'}$ عبارتست از $y = x + a - a'$، بنابراین خط $y = x+۱-۲$ یا $y = x-۱$ مجانب مایل تابع فوق است.

نکته‌ی بسیار مهم: دیدیم که هرگاه خط $y = ax + b$ مجانب مایل تابع $y = f(x)$ باشد و $h(x) = f(x) - (ax + b)$، آنگاه $\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = ۰$ است، لذا هرگاه تابعی به صورت $f(x) = ax + b + h(x)$ بوده و $\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = ۰$ باشد، آنگاه خط $y = ax + b$ مجانب مایل تابع $y = f(x)$ خواهد بود بالاخص:

نکته: هرگاه ضابطه‌ی تابعی به صورت $y = ax + b + \frac{p(x)}{q(x)}$ باشد و درجه‌ی $p(x)$ نسبت به x از درجه‌ی $q(x)$ نسبت به x،

کمتر باشد، آنگاه خط $y = ax + b$، مجانب مایل تابع $y = f(x)$ خواهد بود.

مثال: مجانب مایل توابع زیر را بیابید.

۱) $y = x + 1 + \frac{1}{x} \rightarrow y = x + 1$

۲) $y = |x| + \frac{x}{x^2 + 1} \rightarrow y = \pm x$

۳) $y = x + \frac{\sqrt{x}}{x + 5} \rightarrow y = x$

۴) $y = 3x + 2 + \frac{\sin x}{x} \rightarrow y = 3x + 2$

۵) $y = x + \frac{x^2}{x - 1} \rightarrow y = x + \frac{x^2 - 1 + 1}{x - 1} \rightarrow y = x + x + 1 + \frac{1}{x - 1} \rightarrow y = 2x + 1$

تست: تابع $y = 2x + \sin\frac{5}{x}$ چه نوع مجانبی دارد؟

۱) یک قائم　۲) یک افقی　۳) یک مایل　۴) مجانب ندارد.

$\lim_{x \to \pm\infty} \sin\frac{5}{x} = 0 \Rightarrow y = 2x$ مجانب مایل

ضمناً توجه داشته باشد که $x = 0$ مجانب قائم نیست زیرا $\lim_{x \to 0} y$ موجود نیست.

نکته: هرگاه $y = ax + b + \frac{p(x)}{q(x)}$ (درجه‌ی q نسبت به x از درجه‌ی p نسبت به x بیشتر باشد)، و تابع مجانب مایلش یعنی خط $y = ax + b$ را در یک یا چند نقطه قطع کند، طولهای نقاط برخورد تابع با مجانب مایلش از حل معادله‌ی $p(x) = 0$ به دست می‌آیند.

مثال: تابع $y = x + 2 + \frac{x^2 - 4}{x^3}$، مجانب مایلش یعنی خط $y = x + 2$ را در نقاط $x = \pm 2$ قطع می‌کند.

نکته: در توابع گنگ یا اصم، چنانچه مجانب مایل یا افقی وجود داشته باشد، بهتر است به روش هم ارزی رادیکالها، معادلات مجانب‌های افقی و مایل آنها را بیابیم.

پس از استفاده از هم ارزی، اگر xها ساده شوند مجانب افقی و در غیر این صورت، مجانب مایل خواهد بود.

مثال: مجانبهای افقی و مایل توابع زیر را در صورت وجود بیابید؟

۱) $y = x - \sqrt{x^2 - 8x + 5}$

$y = x - |x - 4|$
- $y = 4$ مجانب افقی $(x \to +\infty)$
- $y = 2x - 4$ مجانب مایل $(x \to -\infty)$

۲) $y = \sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + 2x}$

$y = |x - 1| - |x + 1|$
- $y = -2$ مجانب افقی $(x \to +\infty)$
- $y = 2$ مجانب افقی $(x \to -\infty)$

۳) $y = \sqrt{4x^2 - 24x + 7} - x$

$y = 2|x - 3| - x$
- $y = x - 6$ مجانب مایل $(x \to +\infty)$
- $y = -3x + 6$ مجانب مایل $(x \to -\infty)$

نکته: در تابع $y = ax + b \pm \sqrt{mx^2 + nx + p}$ داریم:

$$\begin{cases} m = a^2 & \Rightarrow \text{تابع یک مجانب افقی و یک مجانب مایل دارد.} \\ m \neq a^2 & \Rightarrow \text{تابع دو مجانب مایل دارد.} \end{cases}$$

نکته: معادله‌ی خط مجانب مایل نمودار $y = \sqrt{(x+a)^2 + b}$ به صورت $y = |x + a|$ است.

روش تقاطع برای تعیین مجانب مایل: در این روش، فرض می‌کنیم خطوط $y = ax + b$ مجانب مایل تابع $y = f(x)$ باشند، مجانب مایل را با معادله‌ی خود تابع تلاقی (قطع) داده و سپس معادله‌ی تلاقی را (که معادله‌ای از درجه‌ی دوم، سوم و ... است) برحسب قوای (توانهای) نزولی x مرتب می‌کنیم. چون معادله‌ی تلاقی باید ریشه‌ی مضاعف ∞ داشته باشد، لذا دو ضریب پرتوان معادله‌ی تلاقی را (دو ضریب جملاتی که بالاترین درجه را دارند) مساوی صفر قرار می‌دهیم، به این ترتیب a و b و لذا معادله‌ی مجانب مایل مشخص می‌شود.

مثال: مجانب مایل منحنی $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2}$ را به روش تلاقی تعیین کنید؟

$$\begin{cases} y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2} \Rightarrow \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2} = ax + b \\ y = ax + b \end{cases}$$

پس از به توان ۳ رساندن و خلاصه کردن $\Rightarrow (1 - a^3)x^3 - 3(1 + a^2 b)x^2 + \ldots = 0$

$$\begin{cases} 1 - a^3 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ 1 + a^2 b = 0 \Rightarrow b = -1 \end{cases} \Rightarrow y = x - 1$$

تذکر مهم: اگر از این روش، در توابع رادیکالی با فرجه‌ی زوج استفاده کنیم، مجانبهای مایلی که بدین روش به دست می‌آیند وقتی قابل قبولند که حداقل یک دسته از بی‌نهایت‌های تابع و متغیر (شرط لازم مجانب مایل) در آن صدق کنند.

مثال: معادله‌ی مجانب مایل تابع $y = x\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$ را بیابید؟

حل: بینهایت‌های تابع و متغیر عبارتند از: (*) $\begin{cases} x \to +\infty \\ y \to +\infty \end{cases}$, $\begin{cases} x \to -\infty \\ y \to -\infty \end{cases}$

$$\begin{cases} y = x\sqrt{\frac{x-2}{x+2}} \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow ax + b = x\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$$

پس از به توان ۲ رساندن و خلاصه کردن $\Rightarrow (a^2 - 1)x^3 + (2a^2 + 2ab + 2)x^2 + \ldots = 0$

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ 2a^2 + 2ab + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow y = x - 2 \text{ قابل قبول} \\ \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow y = -x + 2 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

خط $y = -x + 2$ غیرقابل قبول است زیرا هیچ کدام از بی‌نهایت‌های تابع و متغیر فوق (*) در آن صدق نمی‌کنند.

نکته: مجانب مایل توابع به شکل $y = x\sqrt[n]{\frac{x+b}{x+a}}$ را می‌توان از فرمول $y = x + \frac{b-a}{n}$ به دست آورد.

مثال: مجانب مایل تابع $y = x\sqrt{\frac{x-۲}{x+۲}}$ **را بیابید؟**

$y = x + \frac{-۲-۲}{۲} \Rightarrow y = x - ۲$

***نکته:* روش ترکیبی تقسیم و هم ارزی رایکالها:** به کمک این روش نیز می‌توان مجانبهای مایل برخی از توابع را به دست آورد.

مثال: معادلات مجانبهای مایل منحنی $y = \sqrt{\frac{x^۳+۲}{x+۳}}$ **را بیابید؟**

حل: شرط لازم مجانب مایل $\begin{cases} x \to \pm\infty \\ y \to +\infty \end{cases}$، اکنون صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم.

۱	۰	۰	۲	-۳
	-۳	۹	-۲۷	
۱	-۳	۹	-۲۵	

$\begin{cases} \text{خارج قسمت} = x^۲ - ۳x + ۹ \\ \text{باقیمانده} = -۲۵ \end{cases}$

$\Rightarrow y = \sqrt{x^۲ - ۳x + ۹ - \frac{۲۵}{x+۳}} \sim |x - \frac{۳}{۲}|$

$\Rightarrow y = \pm(x - \frac{۳}{۲})$ معادلات مجانبهای مایل منحنی

***نکته:* مجانب‌های توابع و رابطه‌های ضمنی:**

الف) برای تعیین مجانبهای افقی در توابع و رابطه‌های ضمنی، ابتدا معادله‌ی داده شده را برحسب توانهای نزولی x مرتب کرده، سپس ضریب جمله‌ی پرتوان آنرا مساوی صفر قرار می‌دهیم.

ب) برای تعیین مجانبهای قائم در توابع و رابطه‌های ضمنی، ابتدا معادله‌ی داده شده را برحسب توانهای نزولی y مرتب کرده، سپس ضریب جمله‌ی پرتوان آنرا مساوی صفر قرار می‌دهیم.

تست: مجانبهای قائم و افقی منحنی نمایش $y^۳(x-۲) = x^۴(y-۳)$ **کدامند؟**

۱) $\begin{cases} x = ۲ \\ y = -۳ \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} x = ۲ \\ y = ۳ \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} x = -۲ \\ y = -۳ \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} x = -۲ \\ y = ۳ \end{cases}$

حل:

$y^۳$ ضریب $= ۰ \Rightarrow x = ۲$ مجانب قائم

$x^۴$ ضریب $= ۰ \Rightarrow y = ۳$ مجانب افقی

ج) برای تعیین مجانب مایل چنین توابعی، فرض می‌کنیم خط $y = ax + b$ در صورت وجود، معادله‌ی مجانب مایل منحنی باشد، این معادله را با معادله‌ی منحنی تلاقی داده و ضرائب دو جمله‌ای که دارای بزرگترین درجه‌ها می‌باشند را، مساوی صفر قرار می‌دهیم، تا a و b و لذا مجانب مایل تابع (در صورت وجود) به دست آیند.

مثال: مجانبهای منحنی $x^۲y - x^۲ + ۵xy^۲ + ۴ = ۰$ **را بیابید؟**

$(y-۱)x^۲ + ۵xy^۲ + ۴ = ۰ \Rightarrow y - ۱ = ۰ \Rightarrow y = ۱$ مجانب افقی

$۵xy^۲ + x^۲y + ۴ - x^۲ = ۰ \Rightarrow ۵x = ۰ \Rightarrow x = ۰$ مجانب قائم

$$\begin{cases} y = ax + b \\ x^{۲}y - x^{۲} + ۵xy^{۲} + ۴ = ۰ \end{cases} \Rightarrow x^{۲}(ax+b) - x^{۲} + ۵x(ax+b)^{۲} + ۴ = ۰$$

$$(a + ۵a^{۲})\, x^{۳} + (b + ۱۰ab - ۱)x^{۲} + \dots = ۰$$

$$\begin{cases} a + ۵a^{۲} = ۰ \\ \\ b + ۱۰ab - ۱ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۰ \quad (۱) \\ a = -\frac{۱}{۵} \quad (۲) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} a = ۰ \Rightarrow b = ۱ \quad (۱) \\ a = \frac{-۱}{۵} \Rightarrow b = -۱ \quad (۲) \end{cases} \end{cases}$$

لذا مجانب مایل این منحنی به ازاء (۲) به دست می‌آید که عبارتست از: $y = ax + b = -\frac{۱}{۵}x - ۱$ و البته از (۱) مجانب افقی به دست می‌آید، زیرا $y = ax + b = ۰x + ۱ \Rightarrow y = ۱$

نکته: برای تعیین شیب مجانبهای مایل توابع و رابطه‌های ضمنی، ابتدا در معادله‌ی داده شده به جای y، ax قرار داده، معادله را برحسب توانهای نزولی x مرتب کرده، سپس طرفین را بر بزرگترین جمله‌ی شامل x، تقسیم نموده حد می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم تا a به دست آید.

مثال: ضریب زاویه‌ی مجانب مایل منحنی $x^{۳} + y^{۳} + ۶xy = ۰$ را بیابید؟

$$y = ax \overset{\text{در معادله}}{\Rightarrow} x^{۳} + a^{۳}x^{۳} + ۶ax^{۲} = ۰ \xrightarrow{\text{تقسیم بر } x^{۳}} ۱ + a^{۳} + \frac{۶a}{x} = ۰$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(۱ + a^{۳} + \frac{۶a}{x}\right) = ۰ \Rightarrow ۱ + a^{۳} + ۰ = ۰ \Rightarrow a = -۱$$

نکته: می‌دانیم $\frac{(x-\alpha)^{۲}}{a^{۲}} - \frac{(y-\beta)^{۲}}{b^{۲}} = ۱$ معادله‌ی یک هذلوی افقی است، برای یافتن معادلات مجانبهای مایل این هذلولی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

جذر کسر اول $\pm$ جذر کسر دوم $= ۰$

$$\frac{x-\alpha}{a} \pm \frac{y-\beta}{b} = ۰ \ \text{پس از خلاصه کردن} \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}(x-\alpha) + \beta$$

توجه داشته باشید که در هذلولی افقی، شیب مجانبهای مایل برابر $\pm\frac{b}{a}$ است.

نکته: اگر به همین روش در مورد هذلولی قائم $\frac{(y-\beta)^{۲}}{a^{۲}} - \frac{(x-\alpha)^{۲}}{b^{۲}} = ۱$، عمل کنیم معادلات مجانبهای مایل‌اش، به دست می‌آیند. در این حالت شیب مجانبهای مایل برابر $\pm\frac{a}{b}$ است.

مثال: معادلات مجانبهای مایل هذلولی $۹x^{۲} - ۴(y-۱)^{۲} = ۳۶$ را بیابید؟

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر ۳۶}} \frac{x^{۲}}{۴} - \frac{(y-۱)^{۲}}{۹} = ۱ \Rightarrow \frac{x}{۲} \pm \frac{y-۱}{۳} = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{۳}{۲}x + ۱ \\ y = -\frac{۳}{۲}x + ۱ \end{cases} \quad \text{معادلات مجانبهای مایل}$$

نکته: معادلهٔ $(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=k$ $(k\neq \circ)$ معادله‌ی یک هذلولی است و مجانبهای مایلش عبارتند از:
$$\begin{cases} ax+by+c=\circ \\ a'x+b'y+c'=\circ \end{cases}$$

نکته: تابع هموگرافیک $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq\circ \;, ad-bc\neq\circ)$، همواره دارای دو مجانب است یکی افقی به معادله‌ی $y=\dfrac{a}{c}$ (حد بینهایت تابع) و دیگری قائم به معادله‌ی $x=\dfrac{-d}{c}$ (ریشه‌ی مخرج) ضمناً محل برخوردشان، مرکز تقارن تابع می‌باشد.

تذکر: تابع هموگرافیک نوعی هذلولی مایل است.

مجانبهای توابع مثلثاتی:

توابع مثلثاتی محض که متناوب باشند، فاقد مجانب مایل و افقی‌اند، ولی اگر کسری باشند، فقط احتمال وجود مجانب قائم وجود دارد که ریشه یا ریشه‌های مخرج می‌باشند.

مثال: مجانبهای تابع $y=\dfrac{\cos x+1}{2\sin x-1}$ را در فاصله‌ی $[\circ,2\pi]$ بیابید؟

$2\sin x-1=\circ \quad \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}$ مجانبهای قائم

مثال: مجانبهای تابع $y=\dfrac{\tan x}{2\cos x-1}$ را در بازه‌ی $[\circ,2\pi]$ بیابید؟

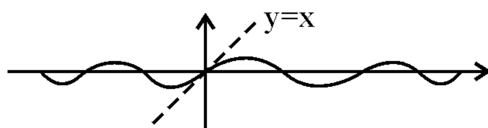
$$y=\frac{\sin x}{\cos x(2\cos x-1)} \Rightarrow \begin{cases} \cos x=\circ \Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2} \;,\dfrac{3\pi}{2} \\ \cos x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{3} \;,\dfrac{5\pi}{3} \end{cases}$$

تذکر: در بعضی از توابع، ممکن است عبارات مثلثاتی و جبری با هم وجود داشته باشند، مثلاً در تابع $y=\dfrac{x+1}{x-\sin x}$ اگر بخواهیم مجانبها را تعیین کنیم، اولاً داریم:

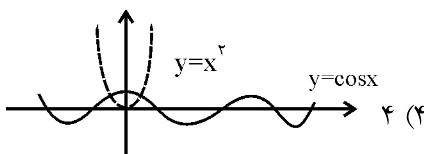
$\lim_{x\to\pm\infty} y=1$، لذا خط $y=1$ مجانب افقی تابع است.

برای تعیین مجانب قائم، بایستی ریشه‌های معادله‌ی $x-\sin x=\circ$ را به دست آوریم، بدین منظور نمودار توابع $y=x$ و $y=\sin x$ را رسم کرده، تعداد نقاط برخوردشان، ریشه‌های معادله‌ی $x-\sin x=\circ$ می‌باشند.

لذا خط $x=\circ$ (تنها ریشه‌ی معادله‌ی $x-\sin x=\circ$) تنها مجانب قائم معادله می‌باشد.



تست: تابع $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-\cos x}$ چند مجانب دارد؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: با توجه به شکل ۲ قائم دارد. ضمناً $y=1$ مجانب افقی تابع می‌باشد. لذا تابع ۳ تابع مجانب دارد.

نکته: مجانب مایل تابع معکوس، معکوس مجانب مایل خود تابع می‌باشد.

تست: اگر خط $y = ۳x + ۴$ مجانب مایل تابع $y = f(x)$ باشد، مجانب مایل تابع $y = f^{-۱}(x)$ کدام است؟

۱) $y = ۳x + ۴$ ۲) $y = ۴x + ۳$ ۳) $y = \frac{x}{۳} - \frac{۴}{۳}$ ۴) $y = \frac{x}{۳} + \frac{۴}{۳}$

حل: $y = ۳x + ۴ \Rightarrow x = \frac{y - ۴}{۳} \Rightarrow y = \frac{x - ۴}{۳} = \frac{x}{۳} - \frac{۴}{۳}$

تست: معادله‌ی مجانبهای تابع معکوس تابع $y = \frac{x + ۱}{\sqrt{x^۲ + ۲}}$ کدامند؟

۱) $x = \pm ۱$ ۲) $y = \pm ۱$ ۳) $x = ۰$ و $x = ۱$ ۴) $y = ۱$ و $y = ۲$

حل: $y = \frac{x}{|x|} \Rightarrow y = \pm ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$

تست: معادله‌ی مجانب مایل تابع معکوس تابع $y = ۳x + ۱ - \sqrt{\frac{x + ۱}{x + ۲}}$ کدام است؟

۱) $y = \frac{۱}{۳}x$ ۲) $y = \frac{۱}{۲}x$ ۳) $y = ۳x$ ۴) $y = ۳x - ۱$

حل: $x \to \pm \infty \to y = ۳x + ۱ - ۱ \to y = ۳x \to y = \frac{۱}{۳}x$

تذکر: نکته‌ی فوق برای مجانبهای افقی و قائم نیز صحیح است. یعنی اگر خط $x = a$ مجانب قائم تابع $y = f(x)$ باشد، آنگاه خط $y = a$ مجانب افقی تابع $y = f^{-۱}(x)$ است و اگر خط $y = a$، مجانب افقی تابع $y = f(x)$ باشد، آنگاه خط $x = a$ مجانب قائم تابع $y = f^{-۱}(x)$ خواهد بود.

مثال: مجانبهای افقی تابع $y = \text{Arctan}x$ را بیابید؟

روش اول: چون مجانبهای قائم تابع $y = \tan x$ در فاصله‌ی $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ عبارتند از: $x = \frac{-\pi}{۲}$ و $x = \frac{\pi}{۲}$ لذا مجانبهای افقی تابع معکوس یعنی: $y = \tan^{-۱}x = \text{Arctan}x$ عبارتند از: $y = \frac{-\pi}{۲}$ و $y = \frac{\pi}{۲}$

روش دوم:

$$\begin{cases} x \to +\infty \Rightarrow y = \lim_{x \to +\infty} \text{Arctan}\,x = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow y = \frac{\pi}{۲} \\ x \to -\infty \Rightarrow y = \lim_{x \to -\infty} \text{Arctan}x = \frac{-\pi}{۲} \Rightarrow y = \frac{-\pi}{۲} \end{cases}$$ مجانب افقی

تست: نمودار تابع $y = ۵^{\frac{۳}{x}}$ چند مجانب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۰

حل:

$x \to ۰^+ \Rightarrow y \to +\infty \Rightarrow x = ۰$ قائم

$x \to +\infty \Rightarrow y \to ۱ \Rightarrow y = ۱$ افقی

← ۲ مجانب دارد

مثال: مجانب افقی تابع $y = e^{x - ۱}$ را بیابید؟

روش اول: $y = e^{x - ۱} \Rightarrow x - ۱ = \text{Ln}y \Rightarrow x = ۱ + \text{Ln}y \Rightarrow y = ۱ + \text{Ln}x$

$y \to -\infty \Rightarrow ۱ + \text{Ln}x \to -\infty \Rightarrow x \to ۰^+ \Rightarrow x = ۰$ مجانب قائم

چون $x = ۰$ مجانب قائم منحنی $y = f^{-۱}(x)$ است پس $y = ۰$ مجانب افقی $y = f(x)$ است.

روش دوم: $x \to -\infty \Rightarrow y = \lim_{x \to -\infty} e^{x - ۱} = e^{-\infty} = ۰ \Rightarrow y = ۰$ مجانب افقی

تست: مجانب قائم تابع $y = x\sqrt[x]{e}$ کدام است؟

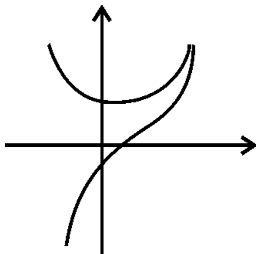
۱) $x=0$ ۲) $x=1$ ۳) $x=e$ ۴) $x=-1$

$y = xe^{\frac{1}{x}} \Rightarrow D_f = R - \{0\}$

$x \to 0^+ \Rightarrow y = 0 \times \infty \Rightarrow y = \text{حد}\ \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\infty} = \infty \Rightarrow x = 0$ مجانب قائم

نکته: مجانب منحنی: شرط لازم و کافی برای آنکه دو منحنی $y_1 = f(x)$ و $y_2 = g(x)$ مجانب یکدیگر باشند آنستکه:

$\lim_{x\to\pm\infty} |y_2 - y_1| = 0$ به شکل توجه کنید:



مثال: نشان دهید توابع $y = \dfrac{1}{x}$ و $y = \dfrac{4-\sqrt{x}}{x+1}$ مجانب یکدیگرند.

$\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{4-\sqrt{x}}{x+1}\right) = 0$

مثال: ثابت کنید منحنی‌های $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ و $y = \dfrac{x^2+k^2}{x}$، به ازاء جمیع مقادیر k، مجانب یکدیگرند.

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2+k^2}{x} - \dfrac{x^2+1}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{k^2-1}{x} = 0$

مجانب توابع پارامتری:

هر تابع به صورت $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ (که در آن t پارامتر یا متغیر است) را یک تابع پارامتری می‌گویند. در چنین حالتی، ابتدا مقادیری از پارامتر را مشخص می‌کنیم که به ازاء آنها x یا y یا هر دو بی‌نهایت ($\pm\infty$) شوند و در هر حالت بررسی می‌کنیم که تابع چه نوع مجانبی دارد برای درک بهتر مطلب به نکات زیر توجه کنید.

الف) t را به سمت $\pm\infty$ و به سمت مقادیری میل می‌دهیم به طوریکه x به $\pm\infty$ میل کند، این مقادیر t را در $y = g(t)$ قرار داده تا، مجانب‌های افقی تابع در صورت وجود به دست آیند.

ب) t را به سمت $\pm\infty$ و به سمت مقادیری میل می‌دهیم به طوریکه y به $\pm\infty$ میل کند، این مقادیر t را در $x = f(t)$ قرار داده تا مجانبهای قائم تابع در صورت وجود به دست آیند.

ج) t را به سمت $\pm\infty$ و به سمت مقادیری میل می‌دهیم که x و y هر دو به سمت $\pm\infty$ میل کنند، در این صورت شیب و عرض از مبدأ مجانبهای مایل تابع را به کمک فرمولهای $a = \lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ و $b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax)$ به دست می‌آوریم.

تذکر: لازم به ذکر است که در این گونه توابع، می‌توان پارامتر t را بین x و y حذف کرده تا معادله‌ی دکارتی تابع به دست آید و سپس به روشهای بیان شدهٔ قبلی معادله‌ی مجانبهای منحنی را بیابیم.

مثال: مجانبهای منحنی زیر را بیابید؟

$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$

روش اول:

$t \to +\infty \to x \to \pm\infty \to y = \frac{۱}{\pm\infty} \to y = ۰$ مجانب افقی

$t \to ۰ \to y \to \pm\infty \to x = ۰$ مجانب قائم

این تابع مجانب مایل ندارد.

روش دوم:
$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{۱}{t} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{۱}{x} \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ & \text{مجانب قائم} \\ y = ۰ & \text{مجانب افقی} \end{cases}$$

مثال: نقطه‌ی $A\begin{cases} x = \frac{t}{t-۲} \\ y = \frac{۳t}{t-۳} \end{cases}$ **مفروض است، مجانب افقی مکان هندسی نقطه‌ی A وقتی که t تغییر کند را بیابید؟**

$t \to ۲ \to x \to \infty \to y = \frac{۶}{۲-۳} = -۶$ مجانب افقی

مثال: مجانب‌های منحنی پارامتری زیر را بیابید؟

$$\begin{cases} x = \frac{۲t}{۱-t^۲} \\ y = \frac{t+۱}{t-۱} \end{cases}$$

$$t \to -۱ \Rightarrow \begin{cases} x \to \infty \\ y = \frac{-۱+۱}{-۱-۱} = ۰ \Rightarrow y = ۰ & \text{مجانب افقی} \end{cases}$$

$$t \to ۱ \Rightarrow \begin{cases} x \to \infty \\ y \to \infty \end{cases}$$

در این حالت احتمال وجود مجانب مایل هست لذا فرض می‌کنیم خط $y = ax + b$ در صورت وجود معادله‌ی مجانب مایل منحنی باشد در این صورت داریم:

$$\begin{cases} a = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{t \to ۱} \frac{\frac{t+۱}{t-۱}}{\frac{۲t}{۱-t^۲}} = \lim\limits_{t \to ۱} \frac{-(t+۱)^۲}{۲t} = -۲ \Rightarrow a = -۲ \\ b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax) = \lim\limits_{t \to ۱} (\frac{t+۱}{t-۱} + ۲ \times \frac{۲t}{۱-t^۲}) = \lim\limits_{t \to ۱} \frac{(t-۱)^۲}{t^۲-۱} \end{cases}$$

$$= \lim\limits_{t \to ۱} \frac{t-۱}{t+۱} = ۰ \Rightarrow b = ۰ \Rightarrow y = ax + b = -۲x + ۰ \Rightarrow y = -۲x$$ مجانب مایل

مثال: مجانب مایل منحنی پارامتری $\begin{cases} x = \sqrt{t^۲-۱} \\ y = \sqrt{t^۲+۱} \end{cases}$ **را بیابید؟**

$$t \to \pm\infty \Rightarrow \begin{cases} x \to +\infty \\ y \to +\infty \end{cases}$$

پس احتمال وجود مجانب مایل هست.

$$a = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{t \to \pm\infty} \frac{\sqrt{t^۲+۱}}{\sqrt{t^۲-۱}} = ۱ \Rightarrow a = ۱$$

$$b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = \lim\limits_{t \to \pm\infty} (\sqrt{t^۲+۱} - \sqrt{t^۲-۱})$$

$$=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{۲}{\sqrt{t^{۲}+۱}+\sqrt{t^{۲}-۱}}=۰\Rightarrow b=۰\Rightarrow y=ax+b=x+۰\Rightarrow y=x$$ مجانب مایل

راه حل دوم: در این روش، ابتدا شکل دکارتی معادله (یعنی فرم $y = f(x)$) را با حذف پارامتر t، بین x و y به دست آورده و سپس مجانب مایل تابع را از روی فرم دکارتی معادله می‌یابیم.

$$\begin{cases}x=\sqrt{t^{۲}-۱}\Rightarrow x^{۲}=t^{۲}-۱\Rightarrow t^{۲}=x^{۲}+۱\\ y=\sqrt{t^{۲}+۱}\end{cases}$$

$$y=\sqrt{x^{۲}+۱+۱}=\sqrt{x^{۲}+۲}$$

هم ارزی $\Rightarrow y=|x+\frac{۰}{۲}|=|x|$ $\begin{cases}y=x & \text{مجانب مایل قابل قبول}\\ y=-x\end{cases}$

$y = -x$ غیرقابل قبول است زیرا، x و y هر دو مثبت‌اند.

تست ۱:

۱ـ درکدام تابع، خط $x=۰$ مجانب قائم منحنی است؟

۱) $y=\frac{x^{۲}}{x}$ ۲) $y=\frac{\sqrt{x-۱}}{x}$ ۳) $y=\frac{x}{x}$ ۴) $y=\frac{x}{x^{۳}}$

۲ـ به ازاء چه مقادیری از m، منحنی $y=\frac{x-۱}{x^{۲}-mx+۴}$، دارای دو مجانب قائم و یک مجانب افقی است؟

۱) $|m|>۴$ ۲) $|m|<۴$ ۳) $m>۴$ ۴) $(-\infty,-۴)\cup(۴,+\infty)-\{۵\}$

۳ـ هرگاه تابع $y=\frac{x}{x^{۲}+mx+۱}$، فقط یک مجانب داشته باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m<۲$ ۲) $|m|<۲$ ۳) $m>۲$ ۴) $|m|>۲$

۴ـ هرگاه خط $y=۲x+۱$، هنگامیکه $x\to-\infty$ میل می‌کند، مجانب مایل منحنی نمایش تابع $y=ax+b+\sqrt{x^{۲}-۸x}$ باشد، $a-b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۶ ۴) ۱-

۵ـ ضریب زاویه‌ی مجانب مایل منحنی $y=x\text{Arctan}x$، کدام است؟

۱) $\pm\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\pm\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\pm\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\pm\frac{\pi}{۲}$

۶ـ تابع $y=|x-۱|+\frac{۲}{|x|-۲}$، چند مجانب دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۱

۷ـ عرض از مبدأ مجانب مایل تابع $y=\frac{x^{۲}+۳}{x-۱}$ کدام است؟

۱) ۳- ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۳

۸ـ مجانب مایل شاخه‌ی $+\infty$ تابع $y=\sqrt{\frac{x^{۳}-۷}{x-۲}}$ کدام است؟

۱) $y=x$ ۲) $y=x+۱$ ۳) $y=x-۱$ ۴) $y=x+\frac{۱}{۲}$

۹ـ مجانب مایل تابع $y=۲x-۱+\frac{x^{۲}}{x-۱}$ کدام است؟

۱) $y=۲x-۱$ ۲) $y=۳x+۲$ ۳) $y=۳x$ ۴) $y=۳x-۲$

۱۰ـ هرگاه خطوط $x+۱=۰$ و $۲x=۴$، مجانبهای قائم منحنی نمایش تابع $y=\frac{x}{x^{۲}+ax+b}$ باشند، a و b عبارتند از:

۱) $\begin{cases}a=-۱\\b=۲\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}a=۱\\b=-۲\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}a=۱\\b=۲\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}a=-۱\\b=-۲\end{cases}$

۱ـ (۴) $\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

۲ـ (۴) $\Delta = m^2 - 16 > 0 \Rightarrow |m| > 4$, مجانب افقی $y = 0$

ضمناً به ازاء $m=5$، فقط یک مجانب قائم داریم، زیرا در این حالت $y = \frac{x-1}{(x-1)(x-4)}$ بوده و $x = 1$ مجانب قائم نخواهد بود (زیرا این ریشه که ریشه‌ی ساده‌ی مخرج است، ریشه‌ی صورت نیز هست) در واقع در این حالت داریم:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-4)} = -\frac{1}{3}$$

۳ـ (۲) $\Delta < 0 \Rightarrow m^2 - 4 < 0 \Rightarrow |m| < 2$

۴ـ (۳) هم ارزی $\Rightarrow y = ax + b + |x-4| = (a-1)x + b + 4$

ضمناً توجه داشته باشید که تابع داده شده یک مجانب دارد (مجانب افقی $y = 0$)

$$\begin{cases} y = (a-1)x + b + 4 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 1 = 2 \\ b + 4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a - b = 6$$

۵ـ (۴) $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x \text{Arctan} x}{x} = \text{Arctan}(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$

۶ـ (۳) مجانبهای قائم $|x| - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$, مجانبهای مایل $\begin{cases} y = x - 1 & ,(x \to +\infty) \\ y = -x + 1 & ,(x \to -\infty) \end{cases}$

۷ـ (۳) $y = \frac{x^2 - 1 + 4}{x - 1} = x + 1 + \frac{4}{x-1} \Rightarrow y = x + 1$ مجانب مایل $\Rightarrow$ عرض از مبدأ $= 1$

۸ـ (۲) $y = \sqrt{\frac{x^3 - 8 + 1}{x - 2}} = \sqrt{x^2 + 2x + 4 + \frac{1}{x-2}} \sim |x + 1|_{x \to +\infty} = x + 1$

۹ـ (۳) $y = 2x - 1 + \frac{x^2 - 1 + 1}{x - 1} = 2x - 1 + x + 1 + \frac{1}{x-1} = 3x + \frac{1}{x-1} \Rightarrow y = 3x$ مجانب مایل

۱۰ـ (۴) $x^2 + ax + b = (x+1)(x-2)$

$$x^2 + ax + b = x^2 - x - 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

بسیار کسان هستند که نمی‌دانند که نمی‌دانند. «سقراط»

تست ۲:

۱ـ هرگاه تابع $y=\frac{ax^{3}+bx^{2}+cx-x^{2}}{2x+5}$، دارای مجانبی افقی به معادله‌ی $y=-2$ باشد، $a+b+c$ برابر است با:

۱) -4 ۲) -3 ۳) -2 ۴) 1

۲ـ هرگاه دو منحنی $y=ax-\sqrt{x^{2}-2}$ و $y=3x-\sqrt{x^{2}+1}$ وقتی که $x\to+\infty$ میل می‌کند، دارای مجانب مشترک باشند، a کدام است؟

۱) 3 ۲) 2 ۳) 1 ۴) -1

۳ـ هرگاه خط $y=2x$ هنگامیکه $x\to+\infty$ میل می‌کند مجانب منحنی $y=\frac{x^{2}}{(a-1)\sqrt{x^{2}+1}}$ باشد، a چقدر است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۴ـ تابع $y=\mathrm{Arctan}\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^{2}+1}}$ چند مجانب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچی

۵ـ تابع $y=\frac{1}{\sin 4x}$ در بازه‌ی $[0,2\pi]$ چند مجانب دارد؟

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۵

۶ـ عرض از مبدأ مجانب مایل منحنی تابع $y=x\mathrm{Arccos}\frac{1}{x}$ کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) 2 ۴) -2

۷ـ هرگاه خطوط $x+3=0$ و $y-x=1$، معادله‌ی مجانبهای منحنی نمایش تابع $y=\frac{ax^{2}+bx+1}{x+c}$ باشند، a و b و c برابرند با:

۱) $\begin{cases}a=-1\\b=-4\\c=3\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}a=1\\b=4\\c=3\end{cases}$

۳) $\begin{cases}a=-1\\b=4\\c=3\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}a=1\\b=-4\\c=3\end{cases}$

۸ـ تابع $y=\frac{x^{2}+2|x|}{x^{2}-|x|}$ چند مجانب دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) هیچی

۹ـ هرگاه خط $y=x+2$، مجانب مایل تابع $y=\frac{ax^{2}+bx+1}{x+1}$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

۱۰ـ تابع $y=\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$، در بازه‌ی $[0,2\pi]$ چند مجانب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۱ـ (۲)
$$y=\frac{ax^۳+(b-۱)x^۲+cx}{۲x+۵}$$
$$\begin{cases}a=۰\\ b-۱=۰\Rightarrow b=۱\end{cases}\Rightarrow y=\frac{cx}{۲x+۵}\Rightarrow\frac{c}{۲}=-۲\Rightarrow c=-۴\Rightarrow a+b+c=-۳$$

۲ـ (۱)
$$\text{هم ارزی}\Rightarrow\begin{cases}y=ax-|x|\\ y=۳x-|x|\end{cases},(x\to+\infty)\Rightarrow\begin{cases}y=(a-۱)x\\ y=۲x\end{cases}\Rightarrow a-۱=۲\Rightarrow a=۳$$

۳ـ (۴)
$$y=\frac{x^۲}{(a-۱)|x|}=_{x\to+\infty}\frac{۱}{a-۱}x\Rightarrow\frac{۱}{a-۱}=۲\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

۴ـ (۲)
$$\lim_{x\to\pm\infty}\text{Arctan}\frac{\sqrt{۳}x}{|x|}=\text{Arctan}(\pm\sqrt{۳})\Rightarrow y=\pm\frac{\pi}{۳}$$

۵ـ (۱)
$$\sin۴x=۰\Rightarrow۴x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}\Rightarrow x=۰,\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۴},\pi,\frac{۵\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۲},\frac{۷\pi}{۴},۲\pi$$

۶ـ (۲)
$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\text{Arccos}\frac{۱}{x}}{x}=\text{Arccos}\,۰=\frac{\pi}{۲}$$
$$h=\lim_{x\to\pm\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}(x\text{Arccos}\frac{۱}{x}-\frac{\pi}{۲}x)$$
$$=\lim_{x\to\pm\infty}(-x(\frac{\pi}{۲}-\text{Arccos}\frac{۱}{x}))=\lim_{x\pm\infty}(-x\,\text{Arcsin}\frac{۱}{x})\sim\lim_{x\to\pm\infty}(-x\times\frac{۱}{x})=-۱$$

۷ـ (۲)
$x+c=۰\Rightarrow c=۳$

```
ax۲+ bx + ۱ | x + ۳
-ax۲- ۳ax     ax + b - ۳a
---------
 (b - ۳a)x + ۱
- (b - ۳a)x - ۳b + ۹a
---------
۱ - ۳b + ۹a
```

$$\Rightarrow\begin{cases}y=ax+b-۳a\\ y=x+۱\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ b-۳a=۱\Rightarrow b=۴\end{cases}$$

۸ـ (۲)
$y=۱$ مجانب افقی و $x^۲-|x|=۰\Rightarrow|x|(|x|-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰ & \text{غیرقابل قبول}\\ x=\pm۱\end{cases}$

۹ـ (۴)

```
ax۲+ bx + ۱ | x + ۱
-ax۲- ax      ax + b - a
---------
 (b - a)x + ۱
- (b - a)x - b + a
---------
 ۱ - b + a
```

$$\Rightarrow\begin{cases}y=ax+(b-a)\\ y=x+۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۱\\ b-a=۲\Rightarrow b=۳\end{cases}\Rightarrow a+b=۴$$

۱۰ـ (۲)
$$\sin۲x=۰\Rightarrow۲x=k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\Rightarrow x=۰,\frac{\pi}{۲},\pi,\frac{۳\pi}{۲},۲\pi$$
$x=۰$ و $x=\pi$ و $x=۲\pi$ قابل قبول نیستند چون صورت کسر را صفر می‌کنند.

تست ۳:

۱ـ مجانبهای قائم منحنی نمایش تابع $y=\frac{\sqrt{\cos x}}{2\sin x-1}$ در فاصله‌ی $[0,2\pi]$ عبارتند از:

۱) $x=\frac{\pi}{3}$ ۲) $\begin{cases}x=\frac{\pi}{3}\\x=\frac{2\pi}{3}\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}\\x=\frac{5\pi}{6}\end{cases}$ ۴) $x=\frac{\pi}{6}$

۲ـ در ازاء چه مقداری از m تابع $y=mx+2-\sqrt{2x^2-4x}$ یک مجانب افقی و یک مجانب مایل دارد؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) -1

۳ـ تابع $y=\frac{2}{(x-1)(x-2)...(x-n)}$ چند مجانب دارد؟

۱) n ۲) n+۱ ۳) n−۱ ۴) n−۲

۴ـ در تابع $y=\frac{x^n}{x^{n-1}+x^{n-2}+...+x+1}\quad , \quad (n\in N)$

۱) خط $y=1$ مجانب افقی است. ۲) خط $y=x+1$ مجانب مایل است.

۳) خط $y=x$ مجانب مایل است. ۴) خط $y=x-1$ مجانب مایل است.

۵ـ هرگاه خط $y=mx+h$ مجانب مایل منحنی نمایش تابع $y=4(1+\frac{x}{4}+\frac{4}{x})$ باشد، $m+h$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۵

۶ـ منحنی تابع به معادله‌ی $y=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}$ مفروض است این منحنی چه مجانبهائی دارد؟

۱) سه قائم و یک افقی ۲) یک قائم و یک افقی ۳) دو قائم و یک افقی ۴) یک قائم

۷ـ منحنی $y=\frac{|x|}{|x|-1}$ چند مجانب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸ـ هرگاه مجانبهای منحنی $y=mx+\sqrt{9x^2-6x}$ برهم عمود باشند، m کدام است؟

۱) $m=\pm2\sqrt{2}$ ۲) $m=\pm\sqrt{2}$ ۳) $m=\pm2$ ۴) $m=\pm1$

۹ـ فاصله‌ی نقاط منحنی نمایش تابع $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$ از خط $y=x+h$ وقتی که $x\to+\infty$ میل می‌کند، به صفر میل می‌کند، h کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) -3 ۳) -1 ۴) ۳

۱۰ـ تابع $y=\frac{2}{\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor}$ چند مجانب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) هیچ

۱ـ (۴) $۲\sin x - ۱ = ۰ \Rightarrow \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{۶} & \text{قابل قبول} \\ x = \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$

$x = \frac{۵\pi}{۶}$ غیرقابل‌قبول است. زیرا، در همسایگی‌اش زیرا رادیکال صورت منفی می‌شود.

۲ـ (۳) ***یادآوری:*** در تابع $y = mx + n + \sqrt{ax^۲ + bx + c}$، هرگاه $m^۲ = a$ باشد، تابع یک مجانب افقی و یک مجانب مایل دارد.

$m^۲ = ۲ \Rightarrow m = \pm\sqrt{۲}$

۳ـ (۲) مجانبهای قائم $\begin{cases} x = ۱ \\ x = ۲ \\ \vdots \\ x = n \end{cases}$, مجانب افقی $y = ۰$

۴ـ (۴) $y = \frac{x^n - ۱ + ۱}{x^{n-۱} + x^{n-۲} + ... + x + ۱} = x - ۱ + \frac{۱}{x^{n-۱} + x^{n-۲} + x ... + x + ۱} \Rightarrow y = x - ۱$ مجانب مایل

۵ـ (۴) $y = ۴ + \frac{۱۶}{x} + x \Rightarrow y = x + ۴ + \frac{۱۶}{x} \Rightarrow y = x + ۴$

$\Rightarrow \begin{cases} m = ۱ \\ h = ۴ \end{cases} \Rightarrow m + h = ۵$

۶ـ (۲) $\begin{cases} x = ۰ & \text{غیرقابل قبول} \\ x = ۱ & \text{غیرقابل قبول} \\ x = ۲ & \text{مجانب قائم} \end{cases}$ مجانب افقی $y = ۰$

در همسایگی $x = ۰$ و $x = ۱$ زیر رادیکال آخر، منفی می‌شود.

۷ـ (۳) مجانبهای قائم $x = \pm ۱$ و مجانب افقی $y = ۱$

۸ـ (۱) هم ارزی $y = mx + ۳\left|x - \frac{۱}{۳}\right| \Rightarrow \begin{cases} y = (m+۳)x - ۱ \\ y = (m-۳)x + ۱ \end{cases} \Rightarrow (m+۳)(m-۳) = -۱ \Rightarrow m^۲ = ۸ \Rightarrow m = \pm ۲\sqrt{۲}$

۹ـ (۳) هم ارزی $\Rightarrow y = x - ۱$ مجانب مایل $\Rightarrow h = -۱$

۱۰ـ (۴) $x \in Z \Rightarrow y = \frac{۲}{\text{مطلق}} =$ تعریف نشده. مجانب ندارد.

$x \notin Z \Rightarrow y = -۲$ خط راست. مجانب ندارد.

توجه داشته باشید که خط راست، مجانب ندارد.

زندگی دریائی پرتلاطم است و کسی از آن به موفقیت می‌گذرد که ناخدایش عقل باشد. «ژان ژاک روسو»

تست ۴:

۱ـ معادلات مجانبهای تابع معکوس تابع $y=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$ کدامند؟

۱) $x=\pm 1$ ۲) $y=\pm 1$ ۳) $x=0$ و $x=1$ ۴) $y=1$ و $y=2$

۲ـ مجانب مایل تابع معکوس تابع $y=3x+1-\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$ کدام است؟

۱) $y=\frac{1}{3}x$ ۲) $y=\frac{1}{2}x$ ۳) $y=3x$ ۴) $y=3x-1$

۳ـ تابع $y=\frac{\log x}{2^x}$ چند مجانب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

۴ـ معادله‌ی مجانب مایل تابع $y^3=6x^2+x^3$ کدام است؟

۱) $y=x+1$ ۲) $y=x+2$ ۳) $y=x-1$ ۴) $y=x-2$

۵ـ مجانبهای تابع $yx-y-x-2=0$ کدامند؟

۱) $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}x=-2\\y=-3\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}x=-2\\y=3\end{cases}$

۶ـ تابع $y=Ln(x^2-9)$ چند مجانب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) هیچ

۷ـ ضریب زاویه‌ی مجانب مایل منحنی $x^3+3xy+y^3=0$، کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۳ ۴) -3

۸ـ مجانبهای تابع $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$ عبارتند از:

۱) $y=\pm x$ ۲) $y=\pm\frac{3}{2}x$ ۳) $y=\pm\frac{2}{3}x$ ۴) $y=\pm\frac{3}{2}+1$

۹ـ کدام خط مجانب مایل منحنی $(5x-3y)(5x+3y-1)=10$ است؟

۱) $y=\frac{5}{3}x$ ۲) $y=\frac{3}{5}x$ ۳) $5x+3y-1=0$ ۴) هردو گزینه‌ی ۱ و ۳

۱۰ـ مجانب مایل منحنی پارامتری $\begin{cases}x=\frac{t^3}{t^2+1}\\y=\frac{t^2}{t+1}\end{cases}$ کدام است؟

۱) $y=x+1$ ۲) $y=x-1$ ۳) $y=x$ ۴) $y+x=0$

۱ـ (۱) مجانب‌های قائم تابع معکوس $x=\pm 1 \Rightarrow$ مجانبهای افقی تابع $y=\pm 1 \Rightarrow y=\frac{x}{|x|}$ هم ارزی

۲ـ (۱) $x \to \pm\infty \Rightarrow y = 3x + 1 - 1 \Rightarrow y = 3x \Rightarrow x = \frac{1}{3}y \Rightarrow y = \frac{1}{3}x$

۳ـ (۲) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log x}{2^x} = 0 \Rightarrow y = 0$ مجانب افقی

$x \to 0^+ \Rightarrow y \to -\infty \Rightarrow x = 0$ مجانب قائم

۴ـ (۲) $y = \sqrt[3]{x^3 + 6x^2} \Rightarrow x \to \pm\infty \Rightarrow y = x + 2$ هم ارزی

۵ـ (۱) $y(x-1) = x + 2 \Rightarrow y = \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow y = 1 \quad , x = 1$

۶ـ (۲)

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^+} Ln(x^2-9) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to (-3)^-} (x^2-9) = -\infty \end{cases}$$

۷ـ (۲)

$$\begin{cases} y = mx \\ x^3 + 3xy + y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 + 3mx^2 + m^3x^3 = 0 \Rightarrow (1+m^3)x^3 + 3mx^2 = 0 \Rightarrow 1 + m^3 = 0 \Rightarrow m = -1$$

۸ـ (۲) $\frac{x}{2} \pm \frac{y}{3} = 0 \Rightarrow y = \pm \frac{3}{2}x$

یادآوری: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$، معادله‌ی یک هذلولی است که دارای دو مجانب مایل به معادلات $\frac{x-\alpha}{a} \pm \frac{y-\beta}{b} = 0$ دارد.

۹ـ (۴)

$$\begin{cases} 5x - 3y = 0 \\ 5x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$$

یادآوری: معادله‌ی $(ax + by + c)(a'x + b'y + c') = k \neq 0$، معادله‌ی یک هذلولی است که مجانبهایش عبارتند از:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

۱۰ـ (۲)

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{\frac{t^2}{t+1}}{\frac{t^3}{t^2+1}} = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{t^4 + t^2}{t^4 + t^3} = 1$$

$$h = \lim_{x \to \pm\infty} (y - mx) = \lim_{t \to \pm\infty} \left(\frac{t^2}{t+1} - \frac{t^3}{t^2+1}\right) = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{t^4 + t^2 - t^4 - t^3}{(t+1)(t^2+1)} \sim \lim_{t \to \pm\infty} \frac{-t^3}{t^3} = -1 \Rightarrow y = x - 1$$

تا وقتی زندگی هست، امید هم باید باشد. «سروانتس»

فصل هفدهم

مشتق

تعریف مشتق: فرض کنید تابع f در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده باشد، مشتق تابع f در نقطه‌ی a که آنرا با $f'(a)$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تذکر: اگر حد فوق وجود داشته باشد،گوئیم f در a مشتق دارد یا مشتق‌پذیر است. و اگر به هر دلیلی، حد فوق موجود نباشد، گوئیم f در a مشتق‌ناپذیر است.

تعریف دیگر مشتق: در تعریف فوق، اگر فرض کنیم $x=a+h$ آنگاه $h=x-a$ و $h\to ۰$ میل می‌کند، بنابراین تعریف فوق به صورت $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ در می‌آید.

تذکر ۱: مشتق تابع $y=f(x)$ را در نقطه‌ی دلخواه x با هر یک از نمادهای $f'(x)$، $\frac{dy}{dx}$، y' نمایش می‌دهند.

مثال: هرگاه $f(x)=x^۲+۳x$، $f'(۱)$ را حساب کنید؟

$$f'(۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۱+h)^۲+۳(۱+h)-۴}{h}=\frac{۰}{۰}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{h^۲+۵h}{h}=\lim_{h\to ۰}(h+۵)=۵$$

مثال: هرگاه $f(x)=\sqrt[۳]{x}+۱۰$، $f'(۸)$ را حساب کنید؟

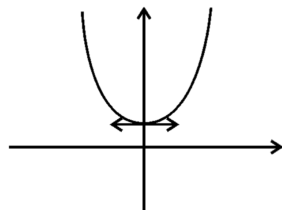
$$f'(۸)=\lim_{x\to ۸}\frac{f(x)-f(۸)}{x-۸}=\lim_{x\to ۸}\frac{(\sqrt[۳]{x}+۱۰)-۱۲}{x-۸}=\frac{۰}{۰}$$

$$=\lim_{x\to ۸}\frac{(\sqrt[۳]{x}-۲)(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)}{(x-۸)(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)}=\lim_{x\to ۸}\frac{(x-۸)}{(x-۸)(\sqrt[۳]{x^۲}+۲\sqrt[۳]{x}+۴)}=\frac{۱}{۱۲}$$

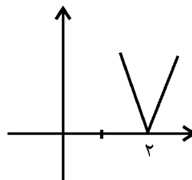
***تذکر ۲:* تعبیر هندسی مشتق تابع**: هرگاه تابع f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشد (یعنی $f'(a)$ موجود باشد)، در این صورت $f'(a)$، همان شیب خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی به طول a و به عرض $f(a)$، واقع بر منحنی f است. بنابراین از لحاظ نموداری، زمانی تابع f در نقطه‌ی a روی آن مشتق‌پذیر است که بتوان در نقطه‌ی a خطی بر منحنی مماس کرد و این مماس عمودی نباشد. چرا که اگر عمودی باشد، شیب خط ∞ شده و تابع در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر نخواهد شد.

مثال: با رسم شکل مشتق‌پذیری یا ناپذیری تابع داده شده را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید؟

۱) $y = x^۲ + ۱$, $a = ۰$ $\Rightarrow f'(a) = ۰$

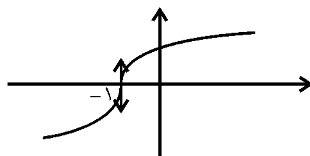


۲) $y = |x - ۲|$, $a = ۲$ موجود نیست $= f'(a)$



(زیرا در نقطه‌ی به طول ۲، نمی‌توان خطی بر تابع $y = |x|$ مماس کرد.)

۳) $y = \sqrt[۳]{x + ۱}$, $a = -۱$ $\Rightarrow f'(۱) = +\infty$



قضیه: هرگاه تابع f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشد، حتماً در نقطه‌ی a پیوسته نیز هست ولی عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست به عنوان مثال تابع $y = |x|$ در $x = ۰$ پیوسته است ولی در این نقطه مشتق‌ناپذیر است.

نکته مهم: **(عکس نقیض قضیه‌ی فوق)**: هرگاه تابع f در نقطه‌ی a پیوسته نباشد، در این صورت در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر هم نخواهد بود، بنابراین پیوستگی تابع f در یک نقطه، شرط لازم برای مشتق‌پذیری آن تابع در آن نقطه است، ولی این شرط کافی نیست. به عنوان مثال چون تابع $y = \lfloor x \rfloor$ در نقاط صحیح ناپیوسته است، لذا در همین نقاط مشتق‌پذیر هم نیست.

تعریف مشتق راست: هرگاه حد زیر موجود باشد:

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to ۰^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

گویند تابع f در نقطه‌ی a، از راست مشتق‌پذیر است و مقدار حد را با $f'_+(a)$ نمایش داده و این مقدار را مشتق راست تابع f در نقطه‌ی a می‌گویند.

تعریف مشتق چپ: هرگاه حد زیر موجود باشد.

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to ۰^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

گویند تابع f در نقطه‌ی a، از چپ مشتق‌پذیر است و مقدار حد را با $f'_-(a)$ نمایش داده مقدارش را، مشتق چپ تابع f در نقطه‌ی a می‌گویند.

قضیه: تابع f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر است اگر و فقط اگر که f در نقطه‌ی a، هم از راست و هم از چپ مشتق‌پذیر باشد.

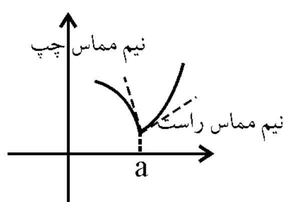
تذکر ۱: هرگاه حداقل یکی از دو مشتق چپ یا راست تابع در نقطه‌ی a موجود نباشند، f در a مشتق‌پذیر نخواهد بود.

تذکر ۲: هرگاه تابع f در نقطه‌ی a از راست مشتق‌پذیر باشد و یا بخواهد مشتق‌پذیر باشد باید، در نقطه‌ی a از راست پیوسته نیز باشد و به همین ترتیب برای مشتق چپ، اما عکس این مطلب در حالت کلی، درست نیست.

تذکر ۳: مشتق راست هر تابع در هر نقطه در صورت وجود، همان شیب نیم مماس راست تابع در آن نقطه است و مشتق چپ

هر تابع در هر نقطه در صورت وجود، همان شیب نیم مماس چپ تابع در آن نقطه است.

تست: با توجه به شکل مقابل، کدام حکم زیر درست است؟

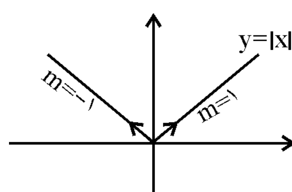


۱) $\begin{cases} f'_+(a) > 0 \\ f'_-(a) > 0 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} f'_+(a) > 0 \\ f'_-(a) < 0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f'_+(a) < 0 \\ f'_-(a) > 0 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} f'_+(a) < 0 \\ f'_-(a) < 0 \end{cases}$

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۲ می‌باشد زیرا شیب نیم مماس راست مرسوم در نقطه a، مثبت و شیب نیم مماس چپ مرسوم در نقطه‌ی a، منفی است.

مثال: با توجه به نمودار تابع $y = |x|$، مشتق پذیری این تابع را در نقاط مثبت، منفی و ۰ بررسی کنید؟



در هر نقطه مثبت، شیب خط مماس ۱ است پس مشتق تابع در این نقاط، ۱ است.

در هر نقطه منفی، شیب خط مماس ۱- است پس مشتق تابع در این نقاط، ۱- است.

ضمناً این تابع در نقطه‌ی ۰، مشتق‌پذیر نیست زیرا مشتق راست در این نقطه (شیب نیم مماس راست) برابر ۱ و مشتق چپ در این نقطه (شیب نیم مماس چپ) برابر (۱-) است.

نقاطی که یک تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر نیست.

۱) اگر $a \notin D_f$، تابع در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر نخواهد بود.

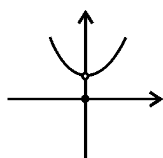
در شکل مقابل f در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست.

مثال: تابع $y = \frac{1}{x-1}$ در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست.

۲) هرگاه $a \in D_f$ باشد ولی f در a حد نداشته باشد، f در a مشتق‌پذیر نیست. در شکل f در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست.

مثال: تابع $y = [x]$ در نقطه‌ی $x = 2$ مشتق‌پذیر نیست.

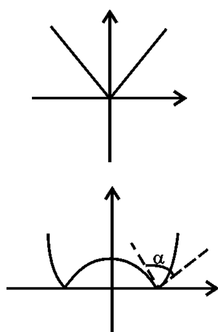
۳) هرگاه $a \in D_f$ و f در a حد داشته باشد، اما در این نقطه پیوسته نباشد در این صورت f در a مشتق‌پذیر نخواهد بود.



در شکل مقابل f در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ,(x \neq 0) \\ 0 & ,(x = 0) \end{cases}$ **در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.**

۴) هرگاه تابع f در نقطه‌ی a پیوسته باشد ولی مشتقات چپ و راست تابع f در این نقطه نابرابر بوده و حداقل یکی از آنها بی‌نهایت نباشد، باز هم تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نخواهد بود.



(این نقطه را نقطه‌ی **زاویه دار** یا **گوشه دار** تابع f می‌گویند)

در شکل مقابل f در $x = 0$ مشتق‌پذیر نیست.

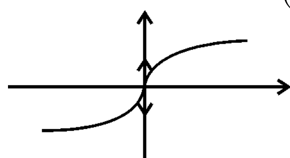
مثال: تابع $y = |x|$ در $x = 0$ و یا تابع $y = |x^2 - 1|$ در نقاط ۱ و ۱-

در این حالت زاویه‌ی بین دو نیم مماس از فرمول زیر محاسبه می‌شود.

$$\tan\alpha = \left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right| \qquad ,(m = f'_-(a), m' = f'_+(a))$$

۵) هرگاه تابع f در نقطه‌ی a پیوسته باشد ولی مشتقات چپ و راست تابع در این نقطه هر دو $+\infty$ و یا هر دو $-\infty$ باشند، در این صورت تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نخواهد بود. در این حالت گوئیم تابع در نقطه‌ی a، مشتق نامتناهی دارد.

ضمناً خط مماس بر منحنی در این نقطه، موازی محور yها بوده و معادله‌ی این خط مماس به صورت $x = a$، با شیب بی‌نهایت خواهد بود (این نقطه را نقطه‌ی **عطف** تابع f می‌گویند.)

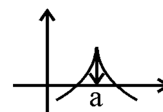


مثال: تابع $y = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$

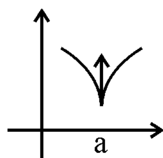
$$f'_-(a) = f'_+(a) = +\infty$$

۶) هرگاه تابع f در نقطه‌ی a پیوسته باشد ولی مشتقات چپ و راست تابع در بی‌نهایت نابرابر باشند یکی $+\infty$ و دیگری $-\infty$، تابع f باز هم در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر نخواهد بود.

(این نقطه را نقطه‌ی بازگشت منحنی می‌گویند) تابع در نقطه‌ی بازگشت، Max و Min دارد.



$$\begin{cases} f'_-(a) = +\infty \\ f'_+(a) = -\infty \end{cases}$$



$$\begin{cases} f'_-(a) = -\infty \\ f'_+(a) = +\infty \end{cases}$$

مثال: نقطه‌ی به طول $x = 0$ برای تابع $y = \sqrt{|x|}$، نقطه‌ی بازگشت است.

۷) هرگاه تابع f در نقطه‌ی a پیوسته باشد ولی مشتق تابع در این نقطه، در یک فاصله نوسان کند، باز هم تابع در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر نخواهد بود.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{\pi}{x} & ,(x \neq 0) \\ 0 & ,(x = 0) \end{cases}$ **در نقطه‌ی $x = 0$، در واقع داریم:**

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x\sin\frac{\pi}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \sin\frac{\pi}{x} = \text{وجود ندارد}$$

مثال: مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & ,(x \geq 1) \\ x^3 & ,(x < 1) \end{cases}$ **را در $x = 1$ بررسی کنید؟**

این تابع در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا در این نقطه پیوسته نیست.

مثال: مشتق‌پذیری تابع $y=\sqrt[3]{x-2}$ را در نقطه‌ی $x=2$ بررسی کنید؟

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x-2}-0}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}=+\infty$$

لذا f در $x=2$ مشتق‌پذیر نیست، در واقع نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}2\\0\end{vmatrix}$ برای تابع فوق، نقطه‌ی عطف است.

نکته‌ی مهم: هرگاه تابع f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشد، همواره دو شرط زیر برقرارند.

۱) f در نقطه‌ی a پیوسته است یعنی حد چپ و راست و مقدار تابع در نقطه‌ی a، هر سه موجود و مساویند.

۲) f در نقطه‌ی a، مشتق چپ و راست برابر دارد.

مثال: به ازاء چه مقادیری از a و b، تابع $f(x)=\begin{cases}ax^2+3 & ,(x\ge 1)\\ \frac{b}{x} & ,(x<1)\end{cases}$ **در نقطه‌ی $x=1$ مشتق‌پذیر است؟**

حل: اولاً پیوستگی ← $a+3=b \quad (1)$

ثانیاً:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax^2+3-a-3}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(a(x+1))=2a$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{b}{x}-(a+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{b}{x}-b}{x-1}$$

(به جای $a+3$ از پیوستگی تابع، b قرار داده‌ایم)

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{-b(x-1)}{x(x-1)}=-b \Rightarrow 2a=-b \Rightarrow \begin{cases}a-b=-3\\2a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=2\end{cases}$$

فرمولهای مشتقگیری

۱) $y=c \Rightarrow y'=0$

۲) $y=x \Rightarrow y'=1$

۳) $y=u\pm v \Rightarrow y'=u'\pm v'$

۴) $y=uv \Rightarrow y'=u'v+v'u$

۵) $y=cu \Rightarrow y'=cu'$

۶) $y=uvw \Rightarrow y'=u'vw+v'uw+w'uv$

۷) $y=\frac{u}{c} \Rightarrow y=\frac{1}{c}u \Rightarrow y'=\frac{1}{c}u'=\frac{u'}{c}$

مثال ← $y=\frac{x^3+15x-17}{10} \Rightarrow y'=\frac{3x^2+15}{10}$

۸) $y=\frac{u}{v} \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

۹) $y=\frac{c}{u} \Rightarrow y'=\frac{-c}{u^2}$

مثال ← $y=\frac{2}{x} \Rightarrow y'=\frac{-2}{x^2}$

مثال → $y=\frac{۳}{x^{۹}+۱} \Rightarrow y'=\frac{-۳\times ۹x^{۸}}{(x^{۹}+۱)^{۲}}$

۱۰) $y=\frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^{۲}}$

۱۱) $y=x^{n} \Rightarrow y'=nx^{n-۱}$

مثال → $y=\frac{۱}{x^{۷}}=x^{-۷} \Rightarrow y'=-۷x^{-۸}=\frac{-۷}{x^{۸}}$

۱۲) $y=u^{n} \Rightarrow y'=nu'u^{n-۱}$

مثال → $y=(x^{۲}+x)^{۷} \Rightarrow y'=۷(x^{۲}+x)^{۶}(۲x+۱)$

۱۳) $y=\frac{ax^{۲}+bx+c}{a'x^{۲}+b'x+c'} \Rightarrow y'=\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x^{۲}+۲\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} x+\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(a'x^{۲}+b'x+c')^{۲}}$

تذکر: نماد | |، نمایش دترمینان است.

۱۴) $y=\sqrt{x} \Rightarrow y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

۱۵) $y=\sqrt{u} \Rightarrow y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$

مثال → $y=\sqrt{x^{۷}} \Rightarrow y'=\frac{۷x^{۶}}{۲\sqrt{x^{۷}}}$

۱۶) $y=\sqrt[m]{x^{n}} \Rightarrow y'=\frac{n}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}}$

مثال → $y=\sqrt[۷]{x^{۵}} \Rightarrow y'=\frac{۵}{۷\sqrt[۷]{x^{۲}}} \Rightarrow y'\neq\frac{۵x^{۴}}{۷\sqrt[۷]{x^{۲}}}$ ← بچه‌ها مواظب باشید

۱۷) $y=\sqrt[m]{u^{n}} \Rightarrow y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

تذکر: $y=\sqrt[m]{u^{n}} \Rightarrow y'\neq\frac{nu'u^{n-۱}}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

مثال → $y=\sqrt[۵]{۱۶x^{۳}} \Rightarrow y=\sqrt[۵]{(۱۶x^{۳})^{۱}} \Rightarrow y'=\frac{۱\times ۴۸x^{۲}}{۵\sqrt[۵]{(۱۶x^{۳})^{۴}}}$

مشتق تابع مرکب

۱۸) $y=(fog)(x) \Rightarrow y'=g'(x)\times f'(g(x))$

$y=(gof)(x) \Rightarrow y'=f'(x)\times g'(f(x))$

$y=(fof)(x) \Rightarrow y'=f'(x)\times f'(f(x))$

$y=(gog)(x) \Rightarrow y'=g'(x)\times g'(g(x))$

$y = (hogof)(x) \Rightarrow y' = f'(x) \times g'(f(x)) \times h'((gof)(x))$

مثال: هرگاه $f(x) = x^۳ + x$ و $g(x) = x^۲ + ۵$، مشتق gof را از دو روش حساب کنید؟

روش اول: $(gof)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = (۳x^۲ + ۱) \times ۲(x^۳ + x)$

روش دوم: ابتدا gof را حساب کرده سپس از آن مشتق می‌گیریم.

$y = (gof)(x) = (x^۳ + x)^۲ + ۵$

$y' = (gof)'(x) = ۲(۳x^۲ + ۱)(x^۳ + x)$

تست: هرگاه $f(۰) = ۲$ ، $f'(۰) = ۵$، $g'(۲) = ۱۰$، حاصل $(gof)'(۰)$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۵۰ ۳) ۲۰ ۴) ۱۰۰

$(gof)'(۰) = f'(۰) \times g'(f(۰)) = ۵ \times g'(۲) = ۵ \times ۱۰ = ۵۰$

مثال: هرگاه $f(x) = \frac{۱ - x^۲}{۱ + x^۲}$ و $g(x) = \tan ۲x$، مقدار مشتق تابع fog را در $x = \frac{\pi}{۱۶}$ بیابید؟

$(fog)(x) = \frac{۱ - \tan^۲ ۲x}{۱ + \tan^۲ ۲x} = \cos ۴x \Rightarrow (fog)'(x) = -۴\sin ۴x \Rightarrow (fog)'(\frac{\pi}{۱۶}) = -۴\sin\frac{\pi}{۴} = -۲\sqrt{۲}$

۱۹) $y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$

مثال $\rightarrow y = f(x^۳) \Rightarrow y' = ۳x^۲ f'(x^۳)$

$y = f(f(\sqrt{x})) \Rightarrow y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \times f'(\sqrt{x}) \times f'(f\sqrt{x}))$

مثال، هرگاه $f(x) = x^۲ + x - ۱$، مشتق $y = f(\sqrt{x})$ را از دو روش حساب کنید؟

روش اول: $y = f(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \times f'(\sqrt{x}) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۲\sqrt{x} + ۱) = ۱ + \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

روش دوم: $y = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^۲ + \sqrt{x} - ۱ = x + \sqrt{x} - ۱ \Rightarrow y' = (f(\sqrt{x}))' = ۱ + \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

تذکر مهم: توجه داشته باشید که $f'(\sqrt{x})$ با $(f(\sqrt{x}))'$ فرق دارد.

۲۰) $\begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases} \Rightarrow y'_x = y'_u \times u'_x$

در واقع داریم: $y = f(u) = f(g(x)) \Rightarrow y'_x = g'(x) \times f'(g(x)) \Rightarrow y'_x = u'_x \times f'(u) = u'_x \times y'_u$

این قاعده را قاعده‌ی زنجیره‌ای در مشتق‌گیری گویند.

۲۱) $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

مثال $\rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[۳]{t} + ۱ \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{t^۲}}}{\frac{۱}{۲\sqrt{t}}} = \frac{۲\sqrt{t}}{۳\sqrt[۳]{t^۲}}$

۲۲) $f(x, y) = 0$ مشتق تابع ضمنی $\Rightarrow \begin{cases} y'_x = -\dfrac{f'_x}{f'_y} \\ x'_y = -\dfrac{f'_y}{f'_x} \end{cases}$

مثال $\rightarrow x^2 + y^2 = 4$

روش اول $\rightarrow y' = -\dfrac{2x}{2y} = -\dfrac{x}{y}$

روش دوم $\rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow 2yy' = -2x \Rightarrow y' = -\dfrac{x}{y}$

۲۳) $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$

۲۴) $y = \sin u \Rightarrow y' = u'\cos u$

۲۵) $y = \sin^n u \Rightarrow y' = n \times u' \times \sin^{n-1} u \times \cos u$

مثال $\rightarrow y = \sin^5(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = 5\sin^4(\sqrt{x}) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times \cos\sqrt{x}$

۲۶) $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$

۲۷) $y = \cos u \Rightarrow y' = -u'\sin u$

مثال $\rightarrow y = \cos(\sin x) \Rightarrow y' = -\cos x \sin(\sin x)$

۲۸) $y = \cos^n u \Rightarrow y' = -nu'\cos^{n-1} u \times \sin u$

۲۹) $y = \tan x \Rightarrow y' = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

۳۰) $y = \tan u \Rightarrow y' = u'(1 + \tan^2 u) = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'\sec^2 u$

۳۱) $y = \tan^n u \Rightarrow y' = nu'\tan^{n-1} u(1 + \tan^2 u) = ...$

۳۲) $y = -\text{Ln}|\cos x| + c$ یا $y = \text{Ln}|\sec x| + c \Rightarrow y' = \tan x$

۳۳) $y = \cot x \Rightarrow y' = -(1 + \cot^2 x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\text{cosec}^2 x$

۳۴) $y = \cot u \Rightarrow y' = -u'(1 + \cot^2 u) = \dfrac{-u'}{\sin^2 u} = -u'\text{cosec}^2 u$

۳۵) $y = \cot^n u \Rightarrow y' = -nu'\cot^{n-1} u \times (1 + \cot^2 u) = ...$

۳۶) $y = \text{Ln}|\sin x| + c$ یا $y = -\text{Ln}|\text{cosec} x| + c \Rightarrow y' = \cot x$

۳۷) $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow y' = \sec x . \tan x$

۳۸) $y = \text{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x} \Rightarrow y' = -\text{cosec} x . \cot x$

۳۹) $y = \text{Ln}|\sec x + \tan x| + c$ یا $y = \text{Ln}\left|\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + c \Rightarrow y' = \sec x$

۴۰) $y = \text{Ln}|\text{cosec} x - \cot x| + c$ یا $y = \text{Ln}\left|\tan\dfrac{x}{2}\right| + c \Rightarrow y' = \text{cosec} x$

نکته: توابع مثلثاتی که با co شروع شوند یعنی cos، cot، cosec، مشتقشان منفی دارد همچنین Arccos و Arccot

۴۱) $y = \sin x^{\circ} = \sin \frac{\pi}{180} x_{rad} \Rightarrow y' = \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{180} x_{rad} = \frac{\pi}{180} \cos x^{\circ}$

۴۲) $y = \text{Arcsin}x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

۴۳) $y = \text{Arcsin}u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

۴۴) $y = (\text{Arcsin}u)^n \Rightarrow y' = nu'(\text{Arcsin}u)^{n-1} \times \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

۴۵) $y = x\text{Arcsin}x + \sqrt{1-x^2} + c \Rightarrow y' = \text{Arcsin}x$

۴۶) $y = \text{Arccos}x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

۴۷) $y = \text{Arccos}u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

مثال ← $y = \text{Arccos}(\text{Arcsin}x) \Rightarrow y' = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-(\text{Arcsin}x)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(\text{Arcsin}x)^2}}$

۴۸) $y = (\text{Arccos}u)^n \Rightarrow y' = -nu'(\text{Arccos}u)^{n-1} \times \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

۴۹) $y = x\text{Arccos}x - \sqrt{1-x^2} + c \Rightarrow y' = \text{Arccos}x$

۵۰) $y = \text{Arctan}x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$

۵۱) $y = \text{Arctan}u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$

۵۲) $y = (\text{Arctan}u)^n \Rightarrow y' = nu'(\text{Arctan}u)^{n-1} \times \frac{1}{1+u^2}$

۵۳) $y = x\text{Arctan}x - \frac{1}{2}\text{Ln}(1+x^2) + c \Rightarrow y' = \text{Arctan}x$

۵۴) $y = \text{Arccot}x \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}$

۵۵) $y = \text{Arccot}u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$

۵۶) $y = (\text{Arccot}u)^n \Rightarrow y' = -nu'(\text{Arccot}u)^{n-1} \times \frac{1}{1+u^2}$

۵۷) $y = x\text{Arccot}x + \frac{1}{2}\text{Ln}(x^2+1) + c \Rightarrow y' = \text{Arccot}x$

۵۸) $y = \text{Arcsec}x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\mp 1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (+ اگر $0 < \text{Arcsec}x < \frac{\pi}{2}$) (− اگر $\frac{\pi}{2} < \text{Arcsec}x < \pi$)

۵۹) $y = \text{Arccose}x \Rightarrow y' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\mp 1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (− اگر $0 < \text{Arccosec}x < \frac{\pi}{2}$) (+ اگر $-\frac{\pi}{2} < \text{Arccosec}x < \pi$)

۶۰) $y = |x| = \begin{cases} x & ,(x \geq 0) \\ -x & ,(x < 0) \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 1 & ,(x > 0) \\ \text{موجود نیست} & ,(x = 0) \\ -1 & ,(x < 0) \end{cases}$

مثال → $y = |x| \Rightarrow \begin{cases} y'(20) = 1 \\ y'(-1000) = -1 \\ y'(0) = \text{موجود نیست} \end{cases}$

۶۱) $y = |u| = \begin{cases} u & ,(u \geq 0) \\ -u & ,(u < 0) \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} u' & ,(u > 0) \\ \text{باید بررسی شود} & ,(u = 0) \\ -u' & ,(u < 0) \end{cases}$

مثال: هرگاه $y = |x^2-1|$، مطلوبست:

الف) y'

ب) تعیین نقاطی که مشتق در آن نقاط موجود نیست.

ج) $f'(8)$، $f'(\frac{1}{2})$ و $f'(-70)$

$y = |x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & ,(x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1) \\ -x^2+1 & ,(-1 < x < 1) \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} 2x & ,(x < -1 \text{ یا } x > 1) \\ \text{موجود نیست} & ,(x = 1 \text{ یا } -1) \\ -2x & ,(-1 < x < 1) \end{cases}$

$\begin{cases} f'_+(1) = 2 \times 1 = 2 \\ f'_-(1) = -2 \times 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow$ $f'(1)$ موجود نیست.

به همین ترتیب $f'(-1)$ نیز موجود نیست.

$f'(8) = 2 \times 8 = 16$

$f'(\frac{1}{2}) = (-2)(\frac{1}{2}) = -1$

$f'(-70) = 2(-70) = -140$

۶۲) $y = \lfloor x \rfloor \Rightarrow y' = \begin{cases} 0 & ,(x \notin z) \\ \text{موجود نیست} & ,(x \in z) \end{cases}$

توضیح اینکه تابع $y = \lfloor x \rfloor$ در نقاط صحیح پیوسته نبوده و لذا مشتق‌پذیر هم نخواهد بود و در نقاط غیرصحیح، تابع، ثابت بوده و لذا مشتق آن در این نقاط صفر است.

مثال: تابع $y = \lfloor x \rfloor$ مطلوب $y'(\sqrt{۳})$, $y'(-\frac{۵}{۷})$, $y'(۰)$

$y'(\sqrt{۳}) = ۰$ و $y'(-\frac{۵}{۷}) = ۰$ و $y'(۰) =$ موجود نیست

مثال: تابع $y = \lfloor ۲x-۱ \rfloor$ مفروض است مطلوبست $y'(۵)$، $y'(\sqrt{۳})$، $y'(\frac{۷}{۲})$ و $y'(۰)$.

$y'(۵) =$ موجود نیست

$y'(\sqrt{۳}) = ۰$

$y'(\frac{۷}{۲}) =$ موجود نیست

$y'(۰) =$ موجود نیست

۶۳) $y = Lnx \Rightarrow y' = \frac{۱}{x}$

۶۴) $y = Lnu \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$

مثال ← $y = Ln(x^۲+x) \Rightarrow y' = \frac{۲x+۱}{x^۲+x}$

مثال ← $y = Ln(sinx) \Rightarrow y' = \frac{cosx}{sinx} = cotx$

۶۵) $y = \log_a^x \Rightarrow y' = \frac{۱}{xLna}$

مثال ← $y = \log_۲^x \Rightarrow y' = \frac{۱}{xLn۲}$

۶۶) $y = \log_a^u \Rightarrow y' = \frac{u'}{uLna}$

۶۷) $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

۶۸) $y = e^u \Rightarrow y' = u'e^u$

مثال ← $y = e^{e^x} \Rightarrow y' = e^x \times e^{e^x}$

۶۹) $y = a^x \Rightarrow y' = a^x Lna$

۷۰) $y = a^u \Rightarrow y' = u' a^u Lna$

مثال ← $y = ۳^{\sqrt{x}} \Rightarrow y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \times ۳^{\sqrt{x}} Ln۳$

۷۱) $y = x^x \Rightarrow y' = x^x(۱ + Lnx)$

۷۲) $y = u^v \Rightarrow y' = vu^{v-۱}u' + u^v v' Lnu) = u^v(\frac{u'v}{u} + v'Lnu)$

اثبات:

$y = u^v \Rightarrow Lny = Lnu^v \Rightarrow Lny = vLnu$

$\frac{y'}{y} = v'Lnu + \frac{u'}{u}v \Rightarrow y' = y(v'Lnu + \frac{u'}{u}v) \Rightarrow y' = u^v(v'Lnu + \frac{u'}{u}v)$

مثال: مشتق تابع $y = x^{۲x+۱}$ را به کمک Ln حساب کنید؟

$Lny = (۲x+۱)Lnx \Rightarrow \frac{y'}{y} = ۲Lnx + \frac{۱}{x}(۲x+۱)$

$$y' = y\,(۲\,Lnx + \frac{۲x+۱}{x}) = x^{۲x+۱}(۲Lnx + \frac{۲x+۱}{x})$$

۷۳) $y = \begin{bmatrix} u & v \\ w & x \end{bmatrix} \Rightarrow y' = \begin{bmatrix} u' & v' \\ w' & x' \end{bmatrix}$ مشتق ماتریس

۷۴) $y = \begin{vmatrix} U & V \\ W & X \end{vmatrix} = ux - vw \Rightarrow y' = u'x - x'u - v'w - w'v$ مشتق دترمینان

۷۵) $y = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow y' = f(x)$

۷۶) $y = \int_x^a f(t)\,dt \Rightarrow y' = -f'(x)$

۷۷) $y = \int_u^v f(t)\,dt \Rightarrow y' = v'f(v) - u'f(u)$

در واقع: $y' =$ (مشتق بالا) × (f(t) توی t بالا رو بگذار جای) − (مشتق پائین) × (f(t) توی t پائین رو بگذار جای)

مثال → $y = \int_{x^۲}^{\sqrt{x}} t\sin t\,dt \Rightarrow y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}.\sqrt{x}\sin\sqrt{x} - ۲x.x^۲\sin x^۲$

تعریف تابع مشتق: می‌دانیم مشتق هر تابع مانند $y = f(x)$ خود یک تابع جدید است، این تابع جدید را تابع مشتق تابع $y = f(x)$ گویند و دامنه‌ی تابع مشتق عبارتست از: مجموعه نقاطی جزء دامنه‌ی خود تابع به طوریکه تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر باشد. بنابراین: دامنه‌ی مشتق هر تابع $\subseteq$ دامنه‌ی آن تابع

مثال: در توابع زیر تابع مشتق و دامنه‌ی آنرا مشخص کنید.

۱) $\begin{matrix} y = x^۲ \\ D_f = R \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} y' = ۲x \\ D_{y'} = R \end{cases}$

تابع $y = ۲x$ را تابع مشتق تابع $y = x^۲$ می‌گویند.

۲) $\begin{matrix} y = Lnx \\ D_f = (۰, +\infty) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{۱}{x} \\ D_{y'} = (۰, +\infty) \end{cases}$

بچه‌ها مواظب باشید ← $D_{y'} \neq R - \{۰\}$

۳) $y = |x| \Rightarrow y' = \begin{cases} ۱ & ,(x > ۰) \\ \text{موجود نیست} & ,(x = ۰) \\ -۱ & ,(x < ۰) \end{cases}$

$D_f = R \qquad D_{y'} = R - \{۰\}$

۴) $\begin{matrix} y = Arcsinx \\ D_f = [-۱, ۱] \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}} \\ D_{y'} = (-۱, +۱) \end{cases}$

تذکر: دقت داشته باشید که در محاسبه‌ی دامنه‌ی مشتق هر تابع، حتماً بایستی به دامنه‌ی خود تابع نیز توجه کرد، زیرا همانطوریکه در بالا بیان شد دامنه‌ی مشتق هر تابع زیر مجموعه‌ای از دامنه‌ی خود آن است (مثال (۲) در بالا را مجدداً ملاحظه نمائید).

نکاتی بسیار مهم راجع به مشتق پذیری توابع

۱) توابع قدر مطلقی محض در ریشه‌های ساده‌ی داخل قدر مطلق، مشتق‌پذیر نیستند. این نقاط، نقاط زاویه‌دار منحنی می‌باشند.

مثال: دامنه‌ی مشتق توابع زیر را بیابید؟

۱) $y=|x| \Rightarrow D_{f'}=R-\{۰\}$

۲) $y=|x-۳| \Rightarrow D_{f'}=R-\{۳\}$

۳) $y=|x^۲-۱| \Rightarrow D_{f'}=R-\{\pm۱\}$

۴) $y=|x^۳-x| \Rightarrow D_{f'}=R-\{۰,\pm۱\}$

۵) $y=|x^۴-x^۲|=|x^۲(x-۱)(x+۱)| \Rightarrow D_{f'}=R-\{\pm۱\}$

۶) $y=|x-۱|-|x-۲|$ (تابع صندلی) $\Rightarrow D_{f'}=R-\{۱,۲\}$

۷) $y=|x^۳| \Rightarrow D_{f'}=R$

در واقع در مورد این تابع داریم:

$$y=\begin{cases}x^۳ & ,(x\geq ۰)\\ -x^۳ & ,(x<۰)\end{cases} \Rightarrow y'=\begin{cases}۳x^۲ & (x>۰)\\ ۰ & (x=۰)\\ -۳x^۲ & (x<۰)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f'_+(۰)=۳(۰)^۲=۰\\ f'_-(۰)=-۳(۰)^۲=۰\end{cases} \Rightarrow f'(۰)=۰$$

تست: تابع $y=|x^۲-۳|x|+۲|$، در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۳

حل: گزینه‌ی (۳) درست است.

$y=|x^۲-۳|x|+۲|=||x|^۲-۳|x|+۲|=|(|x|-۱)(|x|-۲)| \to$ ۵ ریشه ساده دارد $\to x=۰,\pm۱,\pm۲$

۲) اگر توابع قدر مطلقی، ضریب صفرکننده داشته باشند، به ازاء ریشه‌های داخل قدر مطلق، مشتق‌پذیر می‌باشند، به عبارت دیگر، در توابعی به صورت $g(x)=f(x)|x-a|$، اگر $g(a)=۰$ باشد، تابع در $x=a$ مشتق‌پذیر است.

مثال: تابع $y=|\pi^۲-x^۲|\sin x$ در نقاط $\pm\pi$ که ریشه‌های ساده‌ی داخل قدر مطلق می‌باشند مشتق‌پذیر است زیرا $y=\sin x$ در نقاط $\pm\pi$ صفر می‌شود.

۳) توابع به صورت $y=x|x|$، $y=x^۲|x|$،...، $y=x^n|x|$، $(n\in N)$ همگی در $x=۰$ مشتق‌پذیرند و مشتقشان در این نقطه، صفر است. (با وجود اینکه $x=۰$ ریشه‌ی ساده‌ی داخل همه‌ی قدر مطلقهاست)

۴) توابع به صورت $y=(x-a)|x-a|$ و $y=(x-a)^۲|x-a|$ و ... $y=(x-a)^n|x-a|$ در نقطه‌ی $x=a$ مشتق‌پذیرند و مشتقشان در این نقطه، صفر است (با وجود اینکه $x=a$ ریشه‌ی ساده‌ی داخل قدر مطلق است)

۵) توابع به صورت $y=g(x)\lfloor x\rfloor$ در ریشه‌هائی صحیح از $g(x)$ که حداقل ریشه‌ی مضاعف باشند (نه ریشه‌ی ساده)

مشتق‌پذیرند.

۶) توابع $y = \lfloor x \rfloor$ و $y = x\lfloor x \rfloor$ در کلیه‌ی نقاط صحیح، بالاخص در $x = 0$ مشتق ناپذیرند. البته $y = \lfloor x \rfloor$ در ۰ ناپیوسته بوده در حالیکه $y = x\lfloor x \rfloor$ در ۰ پیوسته است. توضیح اینکه این توابع در نقاط غیرصحیح مشتق‌پذیرند.

۷) توابع به صورت $y = x^2\lfloor x \rfloor$، $y = x^3\lfloor x \rfloor$ و ... $y = x^n\lfloor x \rfloor$ همگی در $x = 0$ مشتق‌پذیرند. البته فقط در عدد صحیح $x = 0$ مشتق‌پذیرند و در بقیه‌ی اعداد صحیح مشتق‌ناپذیرند، توضیح اینکه این توابع در نقاط غیرصحیح مشتق‌پذیرند.

۸) توابع به صورت $y = (x - k)\lfloor x \rfloor$ $(k \in z)$ در کلیه‌ی اعداد صحیح و بالاخص در عدد صحیح k، مشتق‌ناپذیرند.

۹) توابع به صورت $y = (x - k)^2\lfloor x \rfloor$، $y = (x - k)^3\lfloor x \rfloor$ و ... $y = (x - k)^n\lfloor x \rfloor$ $(k \in z)$ در عدد صحیح k مشتق پذیرند، البته فقط در عدد صحیح k مشتق‌پذیرند و در بقیه‌ی اعداد صحیح مشتق‌ناپذیرند توضیح اینکه این توابع در نقاط غیرصحیح مشتق‌پذیرند.

تست: کدام تابع در نقطه‌ی $x = 0$ مشتق‌پذیر است؟

۱) $y = |x|$ ۲) $y = \lfloor x \rfloor$ ۳) $y = x^2\lfloor x \rfloor$ ۴) $y = |x| + |x-1|$

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۳ می‌باشد.

تست: هرگاه تابع $f(x) = (x - 2)^n\lfloor x \rfloor$ در $x = 2$ مشتق‌پذیر باشد، n کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۳ یا ۲

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۱ می‌باشد.

۱۰) تابع $y = \lfloor x \rfloor$ در نقاط ... و $\pm\frac{3}{2}$ و $\pm\frac{2}{2}$ و $\pm\frac{1}{2}$ و ۰ مشتق‌پذیر نیست (چون پیوسته نیست)

۱۱) تابع $y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ در نقاط ... و ± 4 و ± 2 و ۰ مشتق‌پذیر نیست. (چون پیوسته نیست)

۱۲) تابع $y = \lfloor x^2 \rfloor$ در نقاط ... و $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{1}$ مشتق‌پذیر نیست. (چون پیوسته نیست)

۱۳) تابع $y = \lfloor x^3 \rfloor$ در نقاط ... و $\pm\sqrt[3]{2}, \pm\sqrt[3]{1}$ مشتق‌پذیر نیست. (چون پیوسته نیست)

۱۴) توابع به صورت $y = \lfloor x^{2n} \rfloor$ در $x = 0$ مشتق‌پذیرند. $(n \in N)$

۱۵) توابع به صورت $y = \left\lfloor (x-k)^{2n} \right\rfloor$ در $x = k$ $(k \in z)$ مشتق‌پذیرند.

۱۶) تابع $y = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ در نقاط ... و ۲۵ و ۱۶ و ۹ و ۴ و ۱ و ۰ و کلیه‌ی اعداد منفی مشتق‌پذیر نیست (چون پیوسته نیست)

۱۷) تابع $y = \lfloor \sqrt[3]{x} \rfloor$ در نقاط ... و ± 27 و ± 8 و ± 1 و ۰ مشتق‌پذیر نیست (چون پیوسته نیست)

تست: کدام تابع زیر در نقطه‌ی داده شده مشتق‌پذیر است؟

۱) $\begin{cases} y = x\lfloor x \rfloor \\ x = 0 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} y = \lfloor x^7 \rfloor \\ x = 0 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} y = \lfloor x^2 - 4x + 4 \rfloor \\ x = 2 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} y = (x-3)\lfloor x \rfloor \\ x = 3 \end{cases}$

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۳ می‌باشد. $y = \lfloor (x-۲)^۲ \rfloor$

تست: تابع $y = \lfloor x^۲ \rfloor$ در بازه‌ی (۴ و ۴-) در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۳۱ ۳) ۳۰ ۴) ۱۶

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۳ می‌باشد. در واقع تابع فوق در بازه‌ی (۴ و ۴-) در نقاط $\pm\sqrt{۱۵}, ..., \pm\sqrt{۲}, \pm\sqrt{۱}$ مشتق‌ناپذیر است.

تست: هرگاه تابع $y = (x^۲ + ax + b)\lfloor x \rfloor$ در نقطه‌ی $x = ۳$ مشتق‌پذیر باشد $b - a$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۳ ۳) ۳- ۴) ۱۵-

$x = ۳$ بایستی ریشه‌ی مضاعف سه جمله‌ای $x^۲ + ax + b$ باشد لذا

$$x^۲ + ax + b = (x-۳)^۲ = x^۲ - ۶x + ۹ \Rightarrow \begin{cases} a = -۶ \\ b = ۹ \end{cases} \Rightarrow b - a = ۱۵$$

۱۸) در توابع رادیکالی با فرجه‌ی فرد به صورت $y = \sqrt[۲n+۱]{(x-\alpha)^k}$ ،$(k , n \in N)$، هرگاه $k \geq ۲n + ۱$ باشد، تابع در $x = \alpha$ مشتق‌پذیر است و اگر $k < ۲n + ۱$ باشد، تابع در $x = \alpha$ مشتق‌پذیر نیست.

تست: تابع $y = \sqrt[۵]{x^۳(x-۱)^۶(x-۲)^۷}$ در چند نقطه مشتق‌پذیر نیست؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۰

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۱ می‌باشد و تابع داده شده فقط در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست.

۱۹) توابع $y = \sin x$ ،$y = \cos x$ ،$y = a^x$ $(a \neq ۱ , a > ۰)$ ،$y = \text{Arctan}x$ ،$y = \text{Arccot}x$ در R مشتق‌پذیرند.

۲۰) توابع $y = \tan x$، و $y = \cot x$ ،$y = \ln x$ ،$y = \log_a^x$ $(a \neq ۱ , a > ۰)$ در دامنه‌اشان مشتق‌پذیرند.

۲۱) توابع $y = \text{Arcsin}x$ و $y = \text{Arccos}x$ در بازه‌ی (۱+ ، ۱-) مشتق‌پذیرند.

۲۲) تابع $y = \text{sign}(x)$ در فاصله‌ی $(-\infty,۰) \cup (۰,+\infty)$ مشتق‌پذیر است.

۲۳) در توابع به فرم $f(x) = \begin{cases} x^n \sin\frac{۱}{x} & ,(x \neq ۰) \\ ۰ & ,(x = ۰) \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x^n \cos\frac{۱}{x} & ,(x \neq ۰) \\ ۰ & ,(x = ۰) \end{cases}$، با شرط $n \in N$ و

الف) اگر $n = ۱$ باشد، آن‌گاه هر دو تابع در $x = ۰$ پیوسته ولی مشتق‌ناپذیرند.

ب) اگر $n > ۱$ باشد، آن‌گاه هر دو تابع در $x = ۰$ هم پیوسته و هم مشتق‌پذیرند.

۲۴) در حالت کلی در توابع به فرم

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^n \sin\frac{۱}{x-a} & ,(x \neq a) \\ ۰ & ,(x = a) \end{cases}$$

و ،$(n \in N)$

$$g(x) = \begin{cases} (x-a)^n \cos\frac{۱}{x-a} & ,(x \neq a) \\ ۰ & ,(x = a) \end{cases}$$

الف) اگر $n = 1$ باشد، آن‌گاه هر دو تابع در $x = a$ پیوسته ولی مشتق‌ناپذیرند.

ب) اگر $n > 1$ باشد، آن‌گاه هر دو تابع در $x = a$ هم پیوسته و هم مشتق‌پذیرند.

تست: هرگاه $f(x) = \begin{cases} (x^3+ax+b)\sin\frac{1}{x-1} & ,(x \neq 1) \\ 0 & ,(x=1) \end{cases}$ **در $x = 1$ مشتق‌پذیر باشد، b، کدام است؟**

۱) ۲ ۲) -2 ۳) ۱ ۴) -1

حل: $x = 1$ بایستی حداقل ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $y = x^3 + ax + b = 0$ باشد لذا:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{در خود تابع} & \overset{x=1}{\Rightarrow} & 1+a+b=0 \\ y' = 3x^2+a=0 & \overset{x=1}{\Rightarrow} & 3+a=0 \Rightarrow a=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow b = 2$$

نکته: وایراشتراس ریاضی دان مشهور، تابع بسیار مهم $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ را کشف کرد، او فرض کرد که a یک عدد صحیح فرد و b یک عدد مثبت کوچکتر از واحد باشد، در این صورت به شرط اینکه $2ab > 3\pi + 2$ باشد سری فوق به ازاء تمام مقادیر x پیوسته است ولی به ازاء هیچ مقدار x، مشتق‌پذیر نیست.، در واقع وی تابعی کشف کرد که در سراسر R پیوسته است ولی در هیچ نقطه مشتق‌پذیر نیست، یادآوری می‌کنیم که دیریکله ریاضی دان فرانسوی تابعی کشف کرد که در هیچ نقطه‌ای حد نداشت و لذا در هیچ نقطه‌ای پیوسته هم نبود.

تعریف مشتق پذیری در یک بازه

الف) تابع f را در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر گوئیم هرگاه f در هر نقطهٔ $x \in (a,b)$ مشتق‌پذیر باشد.

ب) تابع f را در بازهٔ [a,b) مشتق‌پذیر گوئیم هرگاه در (a,b) مشتق‌پذیر بوده و ضمناً در نقطهٔ b از چپ مشتق‌پذیر باشد.

ج) تابع f را در بازهٔ (a,b] مشتق‌پذیر گوئیم هرگاه در (a,b) مشتق‌پذیر بوده و ضمناً در نقطهٔ a از راست مشتق‌پذیر باشد.

د) تابع f را در [a,b] مشتق‌پذیر گوئیم هرگاه:

۱) تابع در (a,b) مشتق‌پذیر باشد.

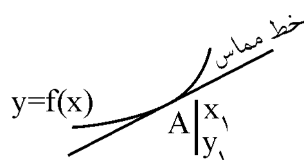
۲) در نقطهٔ a مشتق راست داشته باشد.

۳) در نقطهٔ b مشتق چپ داشته باشد.

مثال: تابع $y = \lfloor x \rfloor$ در کدامیک از بازه‌های (۲,۳) و [۲,۳) و (۲,۳] و [۲,۳] مشتق‌پذیر است؟

حل: تابع مزبور فقط در بازه‌های (۲,۳) و [۲,۳) مشتق‌پذیر است و در دو بازهٔ دیگر به دلیل عدم پیوستگی چپ در نقطهٔ ۳ مشتق‌پذیر نیست.

کاربردهای مشتق



۱ـ نوشتن معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای واقع بر منحنی:

اگر بخواهیم از نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x_۱\\y_۱\end{matrix}\right.$ واقع بر منحنی $y = f(x)$، معادلهٔ خط مماس بر این منحنی را بنویسیم، ضریب زاویهٔ خط مماس برابر است با مقدار مشتق تابع به ازاء طول یا عرض یا طول و عرض نقطهٔ تماس و معادلهٔ خط مماس عبارتست از:

$y - y_۱ = m(x - x_۱)$

مثال: معادلهٔ خط مماس بر منحنی $y = x^۲ + ۳x + ۱$ را در نقطه‌ای به طول ۰ واقع بر منحنی بنویسید؟

$A\left|\begin{matrix}x_۱ = ۰\\y_۱ = ۱\end{matrix}\right. \Rightarrow y = ۱ \Rightarrow y_۱ = ۱$

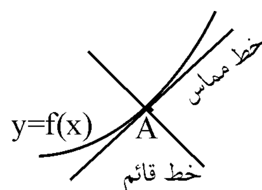
$y' = ۲x + ۳ \Rightarrow m = ۲(۰) + ۳ = ۳$ شیب خط مماس

$y - ۱ = ۳(x - ۰) \Rightarrow y = ۳x + ۱$

۲ـ نوشتن معادلهٔ خط قائم بر منحنی در نقطه‌ای واقع بر آن:

توضیح اینکه خط قائم بر منحنی در هر نقطه، خطی است که بر خط مماس بر منحنی در آن نقطه عمود شود. پس شیب (ضریب زاویهٔ) خط قائم برابر است با:

$m\ (\text{قائم}) = -\dfrac{۱}{m(\text{مماس})}$

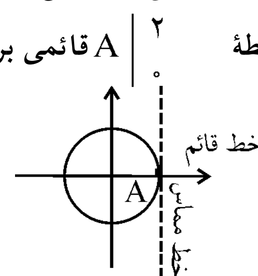


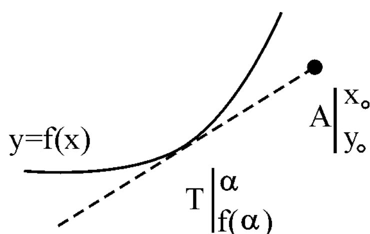
تذکر: منظور از مماس بر منحنی، یعنی خط مماس بر منحنی و منظور از قائم بر منحنی یعنی خط قائم بر منحنی

مثال: از نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}۲\\۰\end{matrix}\right.$ قائمی بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۴$ رسم کرده‌ایم. مطلوبست معادلهٔ این قائم؟

$y' = -\dfrac{x}{y} \Rightarrow$ مماس $m = -\dfrac{۲}{۰} =$ تعریف نشده $\Rightarrow$ قائم $m = ۰$

$y - ۰ = ۰(x - ۲) \Rightarrow y = ۰$





۳ـ نوشتن معادلهٔ خط مماس بر منحنی از نقطه‌ای خارج منحنی:

برای این منظور دو روش مختلف را می‌توانیم به کار ببریم.

روش اول: در این روش طول نقطهٔ تماس را α فرض می‌کنیم و آنرا در معادلهٔ $y = f(x)$ قرار داده، عرض آن را حساب می‌کنیم (همان $f(\alpha)$). حال از تابع مشتق گرفته در آن، طول نقطهٔ تماس (یعنی α را قرار داده) تا شیب خط مماس بر حسب α بدست آید. سپس معادلهٔ خط مماس را به صورت زیر می‌نویسیم. $T\left|\begin{matrix}x_۱ = \alpha\\y_۱ = f(\alpha)\end{matrix}\right.$

$y - f(\alpha) = f'(\alpha)\ (x - \alpha)$

چون این خط بایستی از نقطهٔ $A\left|\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix}\right.$ بگذرد لذا مختصات این نقطه بایستی در معادلهٔ خط مماس مذکور صدق کند، با قرار دادن x_0 و y_0 به جای y، α بدست می‌آید و به این ترتیب هم مختصات نقطهٔ تماس و هم معادله (یا معادلات) خط (یا خطوط) مماس بدست می‌آیند.

مثال: معادلهٔ خطوط مماس بر منحنی $y = x^2 + 1$ از نقطهٔ $A\left|\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}\right.$ را بنویسید؟

حل: چون در صورت مسأله گفته معادلهٔ خطوط مماس (و نگفته که معادلهٔ خط مماس) لذا می‌فهمیم که نقطهٔ خارج منحنی است زیرا از هر نقطهٔ روی یک منحنی حداکثر یک مماس می‌توان بر منحنی رسم کرد. (البته با قرار دادن مختصات A در معادله نیز می‌توان بسادگی فهمید که نقطهٔ A روی منحنی نیست)

حال فرض می‌کنیم α طول نقطه یا نقاط تماس باشد لذا:

$T\left|\begin{matrix} \alpha \\ \alpha^2 + 1 \end{matrix}\right.$ نقطه یا نقاط تماس

$y' = 2x \Rightarrow m_{\text{مماس}} = 2\alpha$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (\alpha^2 + 1) = 2\alpha(x - \alpha)$

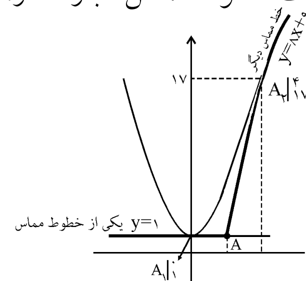
$A\left|\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}\right. \Rightarrow 2 - (\alpha^2 + 1) = 2\alpha(1 - \alpha) \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha = 0 \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 4 \end{cases}$

پس مختصات نقاط تماس عبارتند از:

$A_1\left|\begin{matrix} \alpha = 0 \\ \alpha^2 + 1 = 1 \end{matrix}\right. \qquad , A_2\left|\begin{matrix} \alpha = 4 \\ \alpha^2 + 1 = 17 \end{matrix}\right.$

و لذا معادلات خطوط مماس عبارتند از:

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \Rightarrow y - 1 = 0(x - 0) \Rightarrow y = 1 \\ f'(4) = 8 \Rightarrow y - 17 = 8(x - 4) \Rightarrow y = 8x - 15 \end{cases}$$



قبل از بیان روش دوم به نکتهٔ بسیار مهم زیر توجه کنید.

نکته: روشی برای تشخیص مماس بودن یک خط بر نمودار یک چند جمله‌ای:

خط $y = mx + n$ برنمودار تابع چند جمله‌ای $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ مماس است هرگاه معادلهٔ تلاقی حاصل از برخورد دو معادلهٔ فوق یعنی معادلهٔ $f(x) = mx + n$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد.

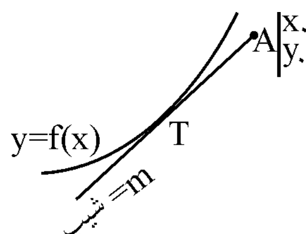
مثال: ثابت کنید خط $y = 3x - 1$ برمنحنی $y = x^2 + x$ مماس است؟

$$\begin{cases} y = x^2 + x \\ y = 3x - 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x = 3x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1$$

ریشهٔ مضاعف

چون معادلهٔ تلاقی یعنی معادلهٔ $x^2 - 2x + 1 = 0$ دارای ریشهٔ مضاعف $x = 1$ است (البته به آسانی نیز می‌توان دید که دلتای معادلهٔ فوق، صفر است) لذا خط داده شده برمنحنی داده شده در نقطهٔ $x = 1$ مماس است.

روش دوم:



در این روش که به روش بدون مشتق معروف است ابتدا ضریب زاویهٔ خط مماس را m فرض می‌کنیم و معادلهٔ خط AT را به صورت $y - y_\circ = m(x - x_\circ)$ می‌نویسیم. این معادله را با معادلهٔ منحنی در یک دستگاه قرار داده و طبق نکتهٔ فوق معادلهٔ تلاقی حاصل را مساوی صفر قرار می‌دهیم. مقدار m بدست می‌آید. ضمناً ریشهٔ مضاعف معادلهٔ تلاقی نیز طولهای نقاط تماس می‌باشد که با قرار دادن مقدار m در آنها طول این نقاط تماس بدست می‌آیند. این طولها را یا در معادلهٔ منحنی قرار داده و یا هر طول را در معادلهٔ خط مماس مربوطه قرار داده تا عرضهای نقاط تماس نیز بدست آیند.

مثال: معادلهٔ خطوط مماس بر منحنی $y = x^2 + 1$ را که از نقطهٔ $A\Big|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}$ رسم می‌شوند بدست آورید ضمناً مختصات نقاط مماس را بیابید؟

$$y - 1 = m(x - 2) \Rightarrow \begin{cases} y = mx - 2m + 1 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - mx + 2m = 0$$ معادله‌ی تلاقی

$$\Delta = m^2 - 8m = 0 \quad \begin{cases} m_1 = 0 \\ m_2 = 8 \end{cases}$$ شیب خطوط مماس

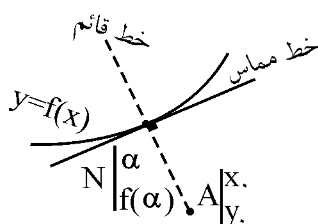
$$\begin{matrix} y = mx - 2m + 1 \overset{m=0}{\Rightarrow} \\ y = mx - 2m + 1 \overset{m=8}{\Rightarrow} \end{matrix} \begin{cases} y = 1 \\ y = 8x - 15 \end{cases}$$ معادلات خطوط مماس

حال مختصات نقاط تماس را بدست آوریم.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{m}{2}$$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ تلاقی

$$\begin{cases} x = \frac{m}{2} \overset{m_1=0}{\Rightarrow} A_1\Big|\begin{matrix}0\\y=1\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ \text{یا} \\ y = x^2 + 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases} \\ x = \frac{m}{2} \overset{m_2=8}{\Rightarrow} A_2\Big|\begin{matrix}4\\17\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} y = 8x - 15 \Rightarrow y = 17 \\ \text{یا} \\ y = x^2 + 1 \Rightarrow y = 17 \end{cases} \end{cases}$$

۴ـ نوشتن معادلهٔ خط قائم بر منحنی از نقطه‌ای خارج منحنی:



فرض می‌کنیم خط AN خطی باشد که از نقطهٔ A گذشته و بر منحنی $y = f(x)$ در نقطهٔ N عمود است. طول نقطهٔ N (پای قائم یا نقطهٔ تماس) را α فرض می‌کنیم لذا عرض آن $f(\alpha)$ خواهد بود.

حال شیب خط قائم یعنی AN را بدست می‌آوریم.

$$m_{\text{مماس}} = f'(\alpha) \Rightarrow m_{\text{قائم}} = \frac{-1}{f'(\alpha)}$$

اکنون معادلهٔ خط قائم را به صورت زیر می‌نویسیم: $y - f(\alpha) = \frac{-1}{f'(\alpha)}(x - \alpha)$

حال مختصات A یعنی x_0 و y_0 را در معادله قرار می‌دهیم تا α بدست آید و با معلوم شدن α، معادلهٔ خط قائم و مختصات پای قائم، معلوم خواهند شد.

مثال: از نقطهٔ $A \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right.$ قائم‌هائی بر منحنی $y = x^2 - 2x$ رسم کرده‌ایم. مطلوبست معادلهٔ این خطوط قائم؟

$N \left| \begin{matrix} \alpha \\ \alpha^2 - 2\alpha \end{matrix} \right.$ $\quad y' = 2x - 2 \Rightarrow m_{\text{مماس}} = 2\alpha - 2 \Rightarrow m_{\text{قائم}} = \frac{-1}{2\alpha - 2}$

$A \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right.$

$(*)\ y - (\alpha^2 - 2\alpha) = \frac{-1}{2\alpha - 2}(x - \alpha) \Rightarrow 0 - (\alpha^2 - 2\alpha) = \frac{-1}{2\alpha - 2}(1 - \alpha)$

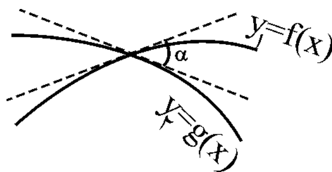
$\Rightarrow (\alpha - 1)(2\alpha^2 - 4\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \ ,\ \alpha = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ طول پای قائم‌ها

۱) $m_{\text{قائم}} = \frac{-1}{2\alpha - 2} \overset{\alpha = 1}{\Rightarrow} m_{\text{قائم}} = \frac{-1}{0} =$ تعریف نشده $\Rightarrow y - 0 =$ تعریف نشده $(x - 1) \Rightarrow \frac{y}{x-1} =$ تعریف نشده

معادله‌ی خط قائم اول $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

۲) $m_{\text{قائم}} = \frac{-1}{2\alpha - 2} \overset{\alpha = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\Rightarrow} m_{\text{قائم}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y - 0 = \frac{-\sqrt{2}}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{-\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ معادلهٔ خط قائم دوم

۳) $m_{\text{قائم}} = \frac{-1}{2\alpha - 2} \overset{\alpha = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\Rightarrow} m_{\text{قائم}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y - 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ معادلهٔ خط قائم سوم



زاویهٔ بین دو منحنی: زاویهٔ بین دو منحنی عبارتست از زاویهٔ بین مماس‌های مرسوم بر دو منحنی در نقطهٔ تلاقیشان برای یافتن زاویهٔ بین دو منحنی، ابتدا دو منحنی را در یک دستگاه با هم تلاقی داده تا طول نقطه یا نقاط برخورد دو منحنی (در صورت وجود) بدست آیند، سپس از دو منحنی مشتق گرفته و طول نقطهٔ تماس را در مشتق دو تابع قرار داده تا شیب خطوط مماس بر دو منحنی بدست آیند سپس از فرمول $\tan\omega = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|$، تانژانت زاویهٔ بین دو منحنی و سپس زاویهٔ بین دو منحنی را در صورت امکان بدست می‌آوریم.

مثال: زاویهٔ بین دو منحنی $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را بیابید؟

$\begin{cases} y_1 = \sin x \\ y_2 = \cos x \end{cases} \Rightarrow \sin x = \cos x \overset{\div \cos x}{\Rightarrow} \tan x = 1$

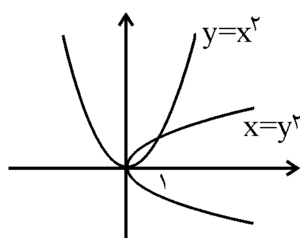
$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} y'_1 = \cos x \\ y'_2 = -\sin x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ m' = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \tan\omega = \left| \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱ + (\frac{\sqrt{۲}}{۲})(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})} \right| = ۲\sqrt{۲} \quad \Rightarrow w = \text{Arctan}\,۲\sqrt{۲}$$

نکته: اگر زاویهٔ بین دو منحنی در نقطهٔ تلاقیشان ۹۰° باشد می‌گویند این دو منحنی در نقطهٔ تلاقی مورد نظر بر هم عمودند و یا متعامدند.

مثال: ثابت کنید دو منحنی $y = x^۲$ و $x = y^۲$ در مبدأ مختصات متعامدند.

$$\begin{cases} y'_۱ = ۲x \\ y'_۲ = \dfrac{۱}{۲\sqrt{x}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = ۰ \\ m' = \text{تعریف نشده} \end{cases} \Rightarrow \tan\omega = \text{تعریف نشده} \quad \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{۲}$$



در واقع محور yها خط مماس بر منحنی $x = y^۲$ در مبدأ مختصات است و محور xها خط مماس بر منحنی $y = x^۲$ در مبدأ مختصات است که بر هم عمودند.

ذکات توانائی، دادگستری است. «حضرت علی»

زاویهٔ بین یک خط و یک منحنی:

چون خط مماس بر یک خط در نقطه‌ای از آن، بر روی خود خط منطبق می‌شود لذا زاویهٔ بین یک خط و یک منحنی عبارتست از زاویهٔ بین مماس مرسوم برمنحنی در نقطهٔ تقاطع با خط.

مثال: خط $x + y = ۴$ با منحنی $y = ۴ - \frac{x^۲}{۲}$ چه زاویه‌ای می‌سازد؟

$$\begin{cases} y = ۴ - \dfrac{x^۲}{۲} \\ y = ۴ - x \end{cases} \Rightarrow ۴ - \frac{x^۲}{۲} = ۴ - x \quad \Rightarrow x^۲ = ۲x \quad \Rightarrow x(x-۲) = ۰ \quad \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \end{cases}$$

$$y'_۱ = -x \overset{x=۰}{\Rightarrow} \begin{cases} m = ۰ \\ m' = -۱ \ \text{شیب خط} \end{cases} \Rightarrow \tan\omega = \left| \frac{۱}{۰} \right| = \text{تعریف نشده} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{۲}$$

لذا خط برمنحنی در مبدأ مختصات عمود است.

$$y'_۱ = -x \overset{x=۲}{\Rightarrow} \begin{cases} m = -۲ \\ m' = -۱ \ \text{شیب خط} \end{cases} \Rightarrow \tan\omega = \left| \frac{-۱}{۳} \right| \Rightarrow \omega = \text{Arctan}\,\frac{۱}{۳}$$

زاویهٔ بین خط و منحنی در نقطهٔ $x = ۲$

نکته: اگر یک خط بر یک منحنی مماس باشد، معادلهٔ تلاقی آنها ریشهٔ مضاعف دارد یعنی دلتای معادلهٔ تلاقی‌اشان صفر

است.

مثال: اگر خط $y = x - 1$ بر منحنی $y = mx^2$ مماس باشد مقدار m کدام است؟

$$\begin{cases} y = mx^2 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow mx^2 = x - 1 \quad \Rightarrow mx^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow \quad \Delta = 1 - 4m = 0 \quad \Rightarrow m = \frac{1}{4}$$

نکته: اگر یک منحنی بر محور xها مماس باشد، در این صورت دلتای منحنی بایستی صفر باشد. (در این حالت در نقطهٔ تماس هم y و هم y' هر دو صفرند)

مثال: هرگاه منحنی نمایش $y = (x - 2)(x^2 + ax + 1)$ بر محور xها مماس باشد، a را بیابید؟

باید معادله، ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، برای این منظور گوئیم یا باید $x^2 + ax + 1 = 0$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد یعنی: $\Delta = a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$ تا معادله به صورت $y = (x - 2)(x \pm 1)^2$ در آید و یا باید یکی از ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + ax - 1 = 0$، $x = 2$ باشد یعنی: $4 + 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$ تا معادله به صورت:

$y = (x - 2)(x^2 - \frac{5}{2}x + 1) = (x - 2)(x - 2)(x - \frac{1}{2}) = (x - 2)^2(x - \frac{1}{2})$ در آید و لذا a می‌تواند ± 2 و یا $-\frac{5}{2}$ باشد.

نکته: توابع مثلثاتی به صورت $\begin{cases} \sin ax = \pm 1 \\ \cos ax = \pm 1 \end{cases}$ ریشهٔ مضاعف دارند.

تست: هرگاه تابع $y = \frac{a\sin x + 2}{\cos x + 5}$ بر محور xها مماس باشد a برابر است با:

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ± 2 ۴) ۱ یا ۳

$a \sin x + 2 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{-2}{a} = \pm 1 \Rightarrow a = \pm 2$

تست: تابع $y = a\sin x + 3\cos x - 5$ بر محور xها مماس است، a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ± 8 ۴) ± 4

حل:

نکته: معادله‌ی $a\sin x + b\cos x = c$ با شرط $a^2 + b^2 = c^2$، ریشه‌ی مضاعف دارد.

باید معادله‌ی $y = 0$ یا $a\sin x + 3\cos x = 5$ ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، لذا: $a^2 + 9 = 25 \Rightarrow a = \pm 4$

نکته: هر معادله به فرم $f(x) = 0$ ($f(x)$ یک چند جمله‌ای است) زمانی دارای ریشه‌ی مضاعف است که ریشه‌ی مشتق تابع، در خود تابع صدق کند.

مثال: ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $x^4 + 4x + 3 = 0$ را بیابید؟

$$y = x^4 + 4x + 3 \quad \Rightarrow y' = 4x^3 + 4 = 0 \quad \Rightarrow x = -1 \quad \Rightarrow (-1)^4 + 4(-1) + 3 = 0$$

بنابراین ریشه‌ی مضاعف معادله، $x = -1$ می‌باشد.

تست: هرگاه نمودار تابع $y = x^6 + 6x + m + 2 = 0$ بر محور xها مماس باشد، m برابر است با:

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) -3 ۴) -4

$y' = 6x^5 + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow 1 - 6 + m + 2 = 0 \Rightarrow m = 3$

نکته: اگر دو منحنی برهم مماس باشند، مشتق آنها در نقطه‌ی تماس با هم برابر است.

تست: هرگاه دو منحنی $y = x^4 + x$ و $y = ax^3 + b$ بر یکدیگر در نقطه‌ی $x = -1$ مماس باشند، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) ۲ ۴) ۳−

$$\begin{cases} y = x^4 + x \Rightarrow y' = 4x^3 + 1 \Rightarrow y'(-1) = -3 \\ y = ax^3 + b \Rightarrow y' = 3ax^2 \Rightarrow y'(-1) = 3a \end{cases} \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1$$

مماس مشترک دو منحنی:

برای تعیین مماس مشترک دو منحنی y_1 و y_2 (در صورت وجود)، فرض می‌کنیم خط $y = ax + b$، مماس مشترک دو منحنی باشد، این خط را با هر یک از منحنی‌های y_1 و y_2 تلاقی (قطع) می‌دهیم، شرط جواب، وجود ریشه‌ی مضاعف می‌باشد ($\Delta = 0$)، از آنجا a و b و معادله‌ی مماس مشترک به دست می‌آیند.

مثال: مماس مشترک دو منحنی $y = x^2 + 1$ و $y = x^2 - 2x + 4$ را بیابید؟

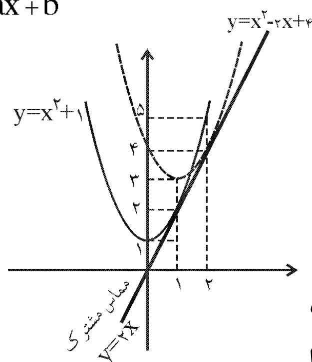
$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow x^2 + 1 = ax + b \Rightarrow x^2 - ax + 1 - b = 0 \overset{\Delta = 0}{\Rightarrow} 4b = 4 - a^2$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 4 \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = ax + b \Rightarrow x^2 - (a+2)x + 4 - b = 0 \overset{\Delta = 0}{\Rightarrow} a = 2$$

$$\Rightarrow b = 0$$

لذا معادله‌ی مماس مشترک دو منحنی عبارتست از $y = 2x$

به شکل توجه کنید:



وتر مشترک:

برای تعیین وتر مشترک دومنحنی به روش تستی، کافی است بین معادلات دو منحنی جملات درجه‌ی اول به بالا را حذف کنیم و در تشریحی، باید معادلات دو منحنی را تلاقی داده، نقاط تقاطع را به دست آورده و سپس معادله‌ی خط گذرنده از این نقاط را بنویسیم.

مثال: وتر مشترک دو منحنی $y = x^2 - 4x + 4$, $y = -x^2 + 2x$ را بیابید؟

حل: روش تستی

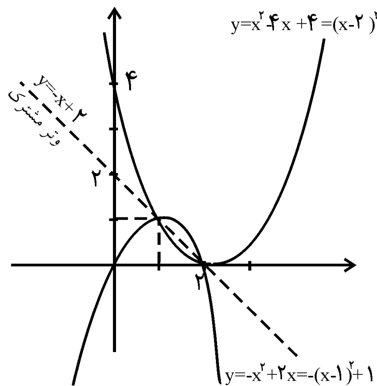
$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 4 \\ y = -x^2 + 2x \end{cases}$$
$$+ \quad 2y = -2x + 4 \Rightarrow y = -x + 2$$

روش تشریحی:

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 4 \\ y = -x^2 + 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -x^2 + 2x \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad A \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad B \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$$

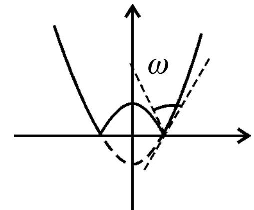
$$m = \frac{0 - 1}{2 - 1} = -1 \Rightarrow y - 0 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 2$$

به شکل توجه کنید.



زاویهٔ بین دو نیم مماس: برای محاسبهٔ زاویهٔ بین دو نیم مماس در یک نقطهٔ زاویه دار نیز از فرمول $\tan\omega$ استفاده می‌کنیم. در این حالت m و m' مشتقهای یکطرفه در نقطهٔ زاویه‌دار هستند.

مثال: زاویهٔ بین دو نیم مماس تابع زیر در نقطهٔ $x=۱$ چقدر است؟

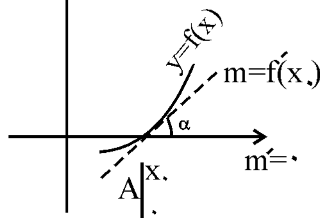


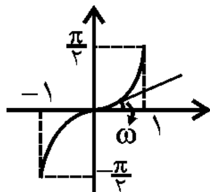
$$y=|x^۲-۱|=\begin{cases}x^۲-۱ & ,(x\le -۱ \text{ یا } x\ge ۱)\\ ۱-x^۲ & ,(-۱<x<۱)\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}۲x & ,(x<-۱ \text{ یا } x>۱)\\ -۲x & ,(-۱<x<۱)\end{cases}$$

$$\begin{cases}f'_+(۱)=۲\times۱=۲\\ f'_-(۱)=-۲\times۱=-۲\end{cases}\Rightarrow \tan\omega=\left|\frac{۲+۲}{۱-۴}\right|\Rightarrow \omega=\text{Arctan}\frac{۴}{۳}$$

نکته: روش محاسبهٔ زاویهٔ یک منحنی با محور طولها:

$$\tan\omega=\left|\frac{m-۰}{۱+۰}\right|=m=f'(x_۰)\Rightarrow \omega=\text{Arctan}\,m$$





مثال: زاویهٔ بین منحنی $y=\text{Arcsin}x$ با محور طولها را بیابید؟

$$y'=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}\Rightarrow f'(۰)=۱=m\Rightarrow \omega=\text{Arctan}\,۱=\frac{\pi}{۴}$$

نکته: با توجه به مشتق تابع معکوس یعنی $(f^{-۱})'=\frac{۱}{f'}$، نتیجه می‌شود که هرگاه ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x_۰\\y_۰\end{matrix}\right.$ برابر m باشد ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی تابع معکوس یعنی $f^{-۱}$ در نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}y_۰\\x_۰\end{matrix}\right.$ واقع بر منحنی $f^{-۱}$ برابر $\frac{۱}{m}$ است.

نکته: هرگاه منحنی نمایش f و $f^{-۱}$ روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم متقاطع باشند، برای تعیین زاویهٔ برخورد دو منحنی از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$\tan\omega=\left|\frac{m-m'}{۱+mm'}\right|=\left|\frac{m-\frac{۱}{m}}{۱+m.\frac{۱}{m}}\right|\Rightarrow \omega=\text{Arctan}\left|\frac{m^۲-۱}{۲m}\right|$$

مثال: زاویهٔ برخورد منحنی نمایش تابع $y=x+\sin x$ و منحنی وارونش در نقطهٔ تلاقیشان که روی نیمساز ربع اول و سوم واقع است را بیابید؟

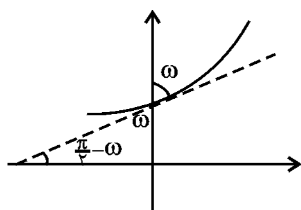
$$\begin{cases}y=x+\sin x\\ y=x\end{cases}\Rightarrow x+\sin x=x\Rightarrow \sin x=۰\Rightarrow x=\pi$$

$$y'=۱+\cos\pi=۱+\cos\pi=۰\Rightarrow m=۰\Rightarrow\frac{۱}{m}=\text{تعریف نشده}\Rightarrow \text{زاویه } \omega=\frac{\pi}{۲}$$

مثال: زاویهٔ برخورد منحنی تابع $y=xe^x$ و منحنی وارونش در نقطهٔ تاقی‌اشان که واقع بر خط $y=x$ است را بیابید؟

$$\begin{cases}y=xe^x\\ y=x\end{cases}\Rightarrow xe^x=x\Rightarrow x(e^x-۱)=۰\Rightarrow x=۰$$

$$y'=e^x+xe^x\overset{x=۰}{\Rightarrow} m=۱\Rightarrow m'=\frac{۱}{m}=۱\Rightarrow \omega=۰$$



لذا f و f^{-1} در مبدأ مختصات برهم مماس‌اند.

***نکته:* زاویهٔ بین یک منحنی با محور yها:** کافی است زاویهٔ منحنی با محور xها را حساب کرده و سپس از $\frac{\pi}{2}$ کم کنیم.

مثال: منحنی $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ محور yها (محور yها) را تحت چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

$x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}$ نقطهٔ برخورد منحنی با محور yها

$$y'=\frac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2} \overset{x=0}{\Rightarrow} m=1 \Rightarrow \omega'=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

تست: زاویه منحنی $y=\frac{x+1}{x^2+2}$ با محور yها کدام است؟

۱) $\text{Arctan}\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\text{Arctan}x2$

حل: $x=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$

$$y'=\frac{x^2+2-2x^2-2x}{(x^2+2)^2} \overset{x=0}{\Rightarrow} m=\frac{1}{2} \Rightarrow \omega'=\text{Arctan}\frac{1}{2} \Rightarrow \omega=\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\frac{1}{2} \Rightarrow \omega=\text{Arctan}2$$

یادآوری: $\text{Arctan}x+\text{Arctan}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}, \ (x>0)$

مشتقگیری سرعتی از توابع قدر مطلقی:

در این روش، در همسایگی نقطه‌ی داده شده، عبارت داخل قدر مطلق را تعیین علامت نموده، آنرا از داخل قدر مطلق بیرون آورده و سپس مشتق گرفته، عددگذاری می‌کنیم.

مثال:

۱) $y=|2x^3-7|$

$y'=(5) \Rightarrow y=2x^3-7 \Rightarrow y'=6x^2 \Rightarrow y'(5)=150$

۲) $y=|x-1|+|x-4|$

$y'(2) \Rightarrow y=x-1-x+4=3 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow y'(2)=0$

۳) $y=|x^2-5|+|x^3-x|$

$y'(2) \Rightarrow y=-x^2+5+x^3-x \Rightarrow y'=-2x+3x^2-1 \Rightarrow y'(2)=7$

۴) $y=|x^2-|x||$

$y'_-(0) \Rightarrow x<0 \Rightarrow y=|x^2+x|=-x^2-x \Rightarrow y'=-2x-1 \Rightarrow y'_-(0)=-1$

مشتقگیری سرعتی از توابع جزء صحیحی:

در این روش، در همسایگی نقطه داده شد، مقدار جزء صحیح را تعیین نموده، سپس از عبارت بدون جزء صحیح، مشتق گرفته، عددگذاری می‌کنیم.

مثال:

۱) $y = x^{۳} \lfloor x^{۲} \rfloor$

الف) $y'(\frac{۳}{۲}) \Rightarrow y = ۲x^{۳} \Rightarrow y' = ۶x^{۲} \Rightarrow y'(\frac{۳}{۲}) = \frac{۲۷}{۲}$

ب) $y'_{+}(\sqrt{۵}) - y'_{-}(۳)$

$y'_{+}(\sqrt{۵}) \Rightarrow y = ۵x^{۳} \Rightarrow y' = ۱۵x^{۲} \Rightarrow y'_{+}(\sqrt{۵}) = ۷۵$

$y'_{-}(۳) \Rightarrow y = ۸x^{۳} \Rightarrow y' = ۲۴x^{۲} \Rightarrow y'_{-}(۳) = ۲۱۶$

$y'_{+}(\sqrt{۵}) - y'_{-}(۳) = ۷۵ - ۲۱۶ = -۱۴۱$

۲) $y = x^{۲} \lfloor ۲x + ۱ \rfloor$

$y'_{-}(۳) =$ موجود نیست (تابع داده شده در نقطه‌ی ۳، پیوستگی چپ ندارد)

۳) $y = \lfloor \sqrt{x} \rfloor \sin\frac{\pi x}{۲}$

$y'(۵) \Rightarrow y = ۲\sin\frac{\pi x}{۲} \Rightarrow y' = \pi\cos\frac{\pi x}{۲} \Rightarrow y'(۵) = ۰$

***نکته:* چند فرمول بسیار مهم در محاسبه‌ی برخی از حدود به کمک تعریف مشتق:**

۱) $\lim\limits_{h\to ۰} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

۲) $\lim\limits_{h\to ۰} \frac{f(a) - f(a-h)}{h} = f'(a)$

۳) $\lim\limits_{h\to ۰} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = ۲f'(a)$

۴) به طور کلی $\rightarrow \lim\limits_{h\to ۰} \frac{f(a+mh) - f(a+nh)}{ph} = \frac{m-n}{p} f'(a)$

اثبات $\rightarrow \overset{HOP}{\underset{\text{نسبت به } h}{\Rightarrow}} \lim\limits_{h\to ۰} \frac{mf'(a+mh) - nf'(a+nh)}{p} = \frac{(m-n)}{p} f'(a)$

تست: حاصل $A = \lim\limits_{h\to ۰} \frac{\sin(\frac{\pi}{۶}+h) - \sin\frac{\pi}{۶}}{h}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $-\frac{۱}{۲}$ ۴) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

حل: $A = (\sin x)'(\frac{\pi}{۶}) = \cos\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

تست: حاصل $A = \lim\limits_{h\to ۰} \frac{\mathrm{Arctan}(x-۲h) - \mathrm{Arctan}(x+h)}{h}$ برابر است با:

۱) $\frac{۳}{۱+x^{۲}}$ ۲) $\frac{-۳}{۱+x^{۲}}$ ۳) $\frac{۲}{۱+x^{۲}}$ ۴) $\frac{-۲}{۱+x^{۲}}$

حل: $A=\frac{-۲-۱}{۱}\times\frac{۱}{۱+x^۲}=\frac{-۳}{۱+x^۲}$

تست: حاصل $\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)f(a+۲h)-(f(a))^۲}{h}$ برابر است با:

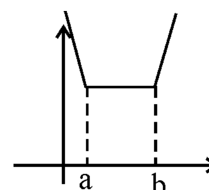
۱) $f(a)f'(a)$ ۲) $f(a)(f'(a))^۲$ ۳) $۲f(a)f'(a)$ ۴) $۳f(a)f'(a)$

حل: $\frac{۰}{۰}\overset{HOP}{\to}\lim_{h\to ۰}\frac{f'(a+h)f(a+۲h)+۲f'(a+۲h)f(a+h)-۰}{۱}=۳f(a)f'(a)$

***نکته:* مشتق تابع گلدون:**

$y=|x-a|+|x-b|\ ,(a<b)$

$$y=\begin{cases}-۲x+a+b & ,(x<a)\\ b-a & ,(a\le x<b)\\ ۲x-a-b & ,(b\le x)\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}-۲ & ,(x<a)\\ ۰ & ,(a<x<b)\\ ۲ & ,(b<x)\end{cases}$$



y' در نقاط a و b موجود نیست. مشتق چپ در نقطه‌ی b و مشتق راست در نقطه‌ی a، صفر است ضمناً مشتق راست در نقطه‌ی b، برابر ۲ و مشتق چپ در نقطه‌ی a، برابر ۲− است.

تست: مشتق تابع $y=|x-۲|+|x+۲|$ در نقطه‌ی $x=-۱$ کدام است؟

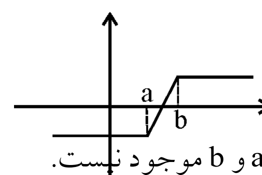
۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۲− ۴) موجود نیست.

چون $۲>-۱>-۲$ لذا $f'(-۱)=۰$ است.

***نکته:* مشتق تابع صندلی:**

$y=|x-a|-|x-b|\ ,(a<b)$

$$y=\begin{cases}a-b & ,(x<a)\\ ۲x-a-b & ,(a\le x<b)\\ b-a & ,(b\le x)\end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases}۰ & ,(x<a)\\ ۲ & ,(a<x<b)\\ ۰ & ,(b<x)\end{cases}$$



y' در نقاط a و b موجود نیست.

نکته: هرگاه توابع f و g را بدهند و رابطه‌ای بین f' و g' را بخواهند، به طور معمول با جمع کردن دو تابع با هم و یا کم کردن آنها از هم و یا ضربشان در هم و یا تقسیمشان برهم و یا تشخیص اینکه یکی از آنها مضربی از دیگری است و سپس ساده کردن و مشتق گرفتن به رابطه‌ی مطلوب خواهیم رسید.

نکته: هرگاه تفاضل دو تابع مقدار ثابتی باشد، آنگاه مشتق‌های دو تابع با هم برابرند و برعکس:

$f-g=c\Leftrightarrow f'-g'=۰\Leftrightarrow f'=g'$

نکته: هرگاه مجموع دو تابع مقدار ثابتی باشد، آنگاه مجموع مشتق‌های دو تابع برابر صفر است.

$f+g=c\Rightarrow f'+g'=۰$

تست: هرگاه $f(x)=\frac{ax-۱}{x^۳+x}$ و $g(x)=\frac{ax^۳+۱}{x^۳+x}$، کدام حکم زیر درست است؟

۱) $f'=g'$ ۲) $f'+g'=a$ ۳) $f'=-g'$ ۴) $f'-g'=a$

حل: بسادگی دیده می‌شود که $f+g=a$ و لذا $f'+g'=0$ و در نتیجه $f'=-g'$

تست: هرگاه $f(x)=\left(\sqrt{x^4+1}-x^2\right)^n$ و $g(x)=\left(\sqrt{x^4+1}+x^2\right)^n$، **حاصل** $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$ **کدام است؟**

۱) $2x^4$ ۲) $-2x^4$ ۳) $2x\left(\sqrt{x^4+1}+x^2\right)^{n-1}$ ۴) 0

حل: $f'(x)g(x)+g'(x)f(x)=(f(x)g(x))'=\left[(x^4+1-x^4)^n\right]'=1'=0$

نکته: هرگاه $f(x)=(x-a)g(x)$ و $g(a)\neq 0$ آنگاه $f'(a)=g(a)$

اثبات: $f(x)=(x-a)g(x)\quad\Rightarrow f'(x)=1\times g(x)+g'(x)(x-a)\quad\Rightarrow f'(a)=g(a)$

تست: هرگاه $f(x)=x(x-1)(x-2)\ldots(x-100)$، $f'(0)$ **کدام است؟**

۱) 0 ۲) $100!$ ۳) $99!$ ۴) $-99!$

$$f(x)=x\underbrace{(x-1)(x-2)\ldots(x-100)}_{u}=xu$$

$$f'(x)=1\times u+u'x\quad\Rightarrow f'(0)=u(0)=(0-1)(0-2)\ldots(0-100)=100!$$

نکته: هرگاه $f(x)=(mx+n)g(x)$ و $g(a)\neq 0$، آنگاه $f'(a)=mg(a)$ یعنی: $f'(a)=$ مشتق عامل صفر شونده $\times\, g(a)$

و به طور کلی هرگاه $f(x)=h(x)\,g(x)$ و $h(a)=0$ باشد آنگاه $f'(a)=h'(a)\,g(a)$

مثال: مشتق هر تابع را در نقطه‌ی خواسته شده بیابید؟

عامل صفر شونده

$$1)\ f(x)=(2x-2)\underbrace{(x^2+x+2)^3(x^2+x)^5}_{g(x)}\qquad ,f'(1)=?$$

$$f'(1)=2\times g(1)=2\times 4^3\times 2^5=4096$$

عامل صفر شونده

$$2)\ f(x)=(x-a)\underbrace{(2x-a)(3x-a)\ldots(nx-a)}_{g(x)}\qquad ,f'(a)=?$$

$$f'(a)=1\times g(a)=(n-1)!\,a^{n-1}$$

$$3)\ f(x)=(3x-1)(3x-2)\ldots(3x-6)\qquad f'(1)=?$$

عامل صفر شونده

$$=(3x-3)\underbrace{(3x-1)(3x-2)(3x-4)(3x-5)(3x-6)}_{g(x)}$$

$$f'(1)=3\times g(1)=3\times 2\times 1\times(-1)(-2)(-3)=36$$

$$4)\ f(x)=\underbrace{(x^2+7x-8)}_{\text{عامل صفر شونده}}\underbrace{\text{Arcsin}\sqrt{x}}_{g(x)}\qquad ,f'(1)=?$$

$$f'(1)=(2x+7)g(1)=9\,\text{Arsin}\,1=\frac{9\pi}{2}$$

۵) $f(x)=\frac{xh(x)}{2h(x^7+x)}$, $h(0)\neq 0$, $f'(0)=?$

$f(x)=\underbrace{x}_{\text{عامل صفر شونده}}\times\underbrace{\frac{h(x)}{2h(x^7+x)}}_{g(x)}$

$f'(0)=1\times g(0)=\frac{h(0)}{2h(0)}=\frac{1}{2}$

۶) $f(x)=\underbrace{\cos x}_{\text{عامل صفر شونده}}\ \underbrace{(\cos x+3)(\cos x-5)}_{g(x)}$, $f'(\frac{\pi}{2})=?$

$f'(\frac{\pi}{2})=-\sin\frac{\pi}{2}\,g(\frac{\pi}{2})=-1(0+3)(0-5)=15$

نکته: هرگاه درجه‌ی عامل صفر شونده، از مرتبه‌ی مشتق بیشتر باشد، مشتق خواسته شده در آن نقطه صفر است.

مثال: در توابع داده شده، مشتق داده شده را در نقطه‌ی خواسته شده بیابید؟

۱) $f(x)=x^3(x-2)(x-5)^2$ $f'(0), f''(0), f'(5)=?$

$f'(5)=0$ و $f'(0)=0$ و $f''(0)=0$

در واقع، اگر از تابع فوق دوبار مشتق بگیرید، خواهید دید که در مشتق دوم نیز عامل x وجود دارد و همین عامل باعث می‌شود که مشتق دوم در نقطه‌ی $x=0$ صفر شود.

۲) $f(x)=(x^2-x)(x^2+7x-8)$ $f'(1)=?$

$f(x)=x(x-1)^2(x+8)\Rightarrow f'(1)=0$

تست: هرگاه $f(x)=\sin x\cos^3 x$، حاصل $f'(\frac{\pi}{2})$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۰

$f(x)=\sin x.\underset{\uparrow}{\cos^3 x}$ (عامل صفر شونده)

چون درجه‌ی عامل صفر شونده، از درجه‌ی مشتق خواسته شده در نقطه‌ی $\frac{\pi}{2}$، بیشتر است لذا: $f''(\frac{\pi}{2})=0$

نکته: فرض می‌کنیم u و v و w توابعی از x و α و β و γ اعداد حقیقی بوده و

$$f(x)=\frac{u^\alpha v^\beta}{w^\gamma}$$

آنگاه:

$$f'(x)=\frac{u^\alpha v^\beta}{w^\gamma}\left(\frac{\alpha u'}{u}+\frac{\beta v'}{v}-\frac{\gamma w'}{w}\right)$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=\frac{(x+1)^{\frac{1}{4}}(x+4)^3}{(x+8)^2}$ را در نقطه‌ی $x=0$ بیابید؟

$$f'(0)=f(0)\times\left[\frac{\frac{1}{4}(1)}{0+1}+\frac{3\times 1}{0+4}-\frac{2\times 1}{0+8}\right]=1\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$$

نکته: ممکن است تابع داده شده، از مجموعه‌ای نقطه‌ی منفصل (جدا) تشکیل شده باشد یا دامنه‌ی تعریف تابع، تهی باشد،

در این صورت، مشتق چنین توابعی در تمام نقاط بی‌معنی و تعریف نشده است.

مثال: ۱) $y=\sqrt{\log(\sin x)}$ $\quad y'=?$

$$\begin{cases}\sin x>0 \Rightarrow 2k\pi<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}\\ \log(\sin x)\geq 0\Rightarrow \log(\sin x)\geq \log 1 \Rightarrow \sin x\geq 1 \Rightarrow\end{cases}$$

$$\sin x=1 \Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2} \quad ,(k\in z)$$

چون دامنه‌ی تابع یعنی مجموعه‌ی، $D_y=\{x\in R: x=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in z\}$، مجموعه‌ای از نقاط منفصل (ناپیوسته) است بنابراین مشتق تابع فوق در تمام نقاط، تعریف نشده است.

۲) $x^2+y^2-xy=0$

$$x=\frac{y\pm\sqrt{-3y^2}}{2} \Rightarrow -3y^2\geq 0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow f=\{(0,0)\}$$

می‌دانیم مشتق یک تابع تک عضوی، تعریف نشده است.

نکته: مشتق هر متغیر، نسبت به خودش ۱ می‌باشد.

$$(x)'_x=1$$

$$(y)'_y=1$$

$$(x^3)'_{x^3}=1$$

نکته: مشتق یک تابع نسبت به u (u یک تابع است)

$$y=f(x) \Rightarrow y'_u=\frac{y'_x}{u'_x}$$

این قاعده، در واقع همان قاعده‌ی زنجیره‌ای در مشتقگیری است.

مثال: مشتق تابع $y=x^9-4x^6+x^3+1$ را نسبت به x^3 حساب کنید؟

روش اول: $y'_{x^3}=\frac{y'_x}{(x^3)'_x}=\frac{9x^8-24x^5+3x^2}{3x^2}=3x^6-8x^3+1$

روش دوم: $y=(x^3)^3-4(x^3)^2+(x^3)=t^3-4t^2+t$

$$y'_t=3t^2-8t+1 \Rightarrow y'_{x^3}=3x^6-8x^3+1$$

مثال: مشتق تابع $y=x^5-2x^4+x^2-10$ را نسبت به x^3 حساب کنید؟

روش اول: $y'_{x^3}=\frac{5x^4-8x^3+2x}{3x^2}=\frac{5}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{2}{3x}$

روش دوم: $y=(x^3)^{\frac{5}{3}}+2(x^3)^{\frac{4}{3}}+(x^3)^{\frac{2}{3}}-10=t^{\frac{5}{3}}+2t^{\frac{4}{3}}+t^{\frac{2}{3}}-10$

$y'_t = \frac{۵}{۳}t^{\frac{۲}{۳}} + \frac{۸}{۳}t^{\frac{۱}{۳}} + \frac{۲}{۳}t^{-\frac{۱}{۳}} = \frac{۵}{۳}x^۲ - \frac{۸}{۳}x + \frac{۲}{۳x}$

نکته: هرگاه f تابعی زوج و مشتق‌پذیر باشد، آنگاه مشتق و انتگرالش (انتگرال معین یا تابع اولیه) (با شرط $c=۰$) هر دو توابعی فردند و بالعکس.

$$f(x) = x^۴ + ۱ \text{ زوج} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = ۴x^۳ & \text{فرد} \\ \int f(x)dx = \frac{x^۵}{۵} & \text{فرد} \quad (c=۰) \end{cases}$$

نکته: هرگاه f تابعی زوج و مشتق‌پذیر باشد، آنگاه f' فرد، f'' زوج، f''' فرد و ... هستند. (به همین ترتیب برای تابع فرد)

تست: هرگاه $f(x) = \frac{x^۴ + x^۲ + ۱}{x^{۱۰} + ۵} e^{x^۲}$، حاصل $f'(\frac{\pi}{۴۷}) + f'(-\frac{\pi}{۴۷})$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۲- ۴) $۲e$

چون f تابعی زوج است لذا f' تابعی فرد است و بنابراین:

$$f'(\frac{\pi}{۴۷}) + f'(-\frac{\pi}{۴۷}) = ۰$$

یادآوری: هرگاه f تابعی فرد باشد و $x \in D_f$ آنگاه $f(x) + f(-x) = ۰$

تست: هرگاه $f(x) = \frac{۹\cos x}{۵^x + ۵^{-x}}$ و F تابع اولیه‌ی f باشد، حاصل $F(\frac{\pi}{۵}) + F(-\frac{\pi}{۵})$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۲\pi}{۵}$ ۳) ۰ ۴) $\frac{۴}{۵}$

چون f تابعی زوج است بنابراین F تابعی فرد است و لذا $F(\frac{\pi}{۵}) + F(-\frac{\pi}{۵})$، صفر است.

تست: هرگاه $f(x) = \frac{x^{۸۰} + x^{۴۰} + ۱}{x^{۲۰} + ۷} e^{|x|}$، مشتق صد و یکم f در $x = ۰$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) $\frac{۲}{۷}e$ ۳) ۱- ۴) موجود نیست.

چون f زوج است لذا مشتق صد و یکم آن تابعی فرد است و بنابراین: $y^{(۱۰۱)}(۰) = ۰$

یادآوری: هرگاه f تابعی فرد باشد، و $۰ \in D_f$، آنگاه $f(۰) = ۰$ است.

تست: هرگاه f تابعی فرد باشد، به طوریکه معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی A، به طول (۲) واقع بر منحنی به صورت $y = ۳x + ۲$ باشد، معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی A'، به طول (۲-) روی منحنی کدام است؟

۱) $y = ۳x + ۲$ ۲) $y = -۳x + ۲$ ۳) $y = ۳x - ۲$ ۴) $y = -۳x - ۲$

چون f فرد است، لذا $f(-۲) = -f(۲) = -۸$ در نتیجه عرض نقطه‌ی A' برابر (۸-) است، از طرفی چون f فرد است پس f' زوج است لذا $f'(-۲) = f'(۲)$ و چون $f'(۲)$ برابر (۳) است (شیب خط مماس)، لذا $f'(-۲) = ۳$ بنابراین:

$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \quad \Rightarrow y + ۸ = ۳(x + ۲) \quad \Rightarrow y = ۳x - ۲$$

نکته: هرگاه f یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n باشد، f' از درجه‌ی $(n-۱)$، f'' از درجه‌ی $(n-۲)$ و ... خواهند بود.

تست: هرگاه $x^۷ \times f(x) = f'(x)\, f''(x)$ و f(x) یک چند جمله‌ای باشد، درجه‌ی f(x) کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

نکته: درجه‌ی $f(x) \times g(x)$ = درجه‌ی $f(x)$ + درجه‌ی $g(x)$

فرض می‌کنیم n = درجه‌ی f(x) لذا داریم:

$$7 + n = (n-1)+(n-2) \quad \Rightarrow n = 10$$

تست: هرگاه f یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n باشد و $(fof')(x) = 7x^2 + 9$، n کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) ۲

نکته: درجه‌ی $(fog)(x)$ = درجه‌ی $f(x)$ × درجه‌ی $g(x)$

$$\Rightarrow n(n-1) = 2 \quad \Rightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = -1 \quad \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

نکته: در عباراتی به صورت $af(x) + bf(-x) = cg(x)$، اگر g تابعی فرد باشد، در این صورت f نیز تابعی فرد است و اگر g تابعی زوج باشد، f نیز تابعی زوج است.

تست: هرگاه $4f(x) + 3f(-x) = x^{14}$، $f'(-1)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۱

چون $g(x) = x^{14}$ زوج است، f نیز تابعی زوج است بنابراین:

$$4f(x) + 3f(x) = x^{14} \quad \Rightarrow f(x) = \frac{1}{7}x^{14}$$

$$f'(x) = 2x^{13} \quad \Rightarrow f'(-1) = -2$$

مشتق تابع معکوس: هرگاه تابع f در همسایگی نقطه‌ی $a \in D_f$، پیوسته و یک به یک بوده $f'(a)$ موجود و مخالف صفر باشد، آنگاه f^{-1} در نقطه‌ی $b \in D_{f^{-1}}$ $(b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b))$ مشتق‌پذیر است و مشتقش در نقطه‌ی b از دستور زیر به دست می‌آید:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \qquad , \qquad (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

به زبان خیلی ساده اما نه دقیق، مشتق تابع معکوس، معکوس مشتق خود تابع می‌باشد.

تست: مشتق تابع معکوس تابع $f(x) = x^3 + x$ در نقطهٔ A' به طول ۲ واقع بر تابع معکوس کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) ۴

$$A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right. \quad \Rightarrow x^3 + x = 2 \quad \Rightarrow x = 1 \quad \Rightarrow a = 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \qquad f'(1) = 4$$

$$A'\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right. \qquad (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

مثال: هرگاه $f(x) = \frac{2x+1}{x-5}$ باشد، مشتق تابع f^{-1} را در نقطه‌ی $1 \in D_{f^{-1}}$ از دو روش حساب‌کنید؟

$$A\left|\begin{matrix}-6\\1\end{matrix}\right. \qquad \Rightarrow 1 = \frac{2x+1}{x-5} \qquad \Rightarrow x = -6$$

$$A'\left|\begin{matrix}1\\-6\end{matrix}\right. \qquad f'(x) = \frac{-11}{(x-5)^2} \qquad \Rightarrow \qquad f'(-6) = -\frac{1}{11}$$

$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(-6)} = -11$

روش دوم: در این روش که مقرون به صرفه هم نیست و در برخی از مسائل استفاده از این روش بسیار مشکل و یا حتی غیرممکن است، ابتدا تابع معکوس f را به دست آورده، سپس از آن مشتق گرفته و در آن مستقیماً عدد ۱ را قرار می‌دهیم.

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-5} \Rightarrow y = \frac{2x+1}{x-5} \Rightarrow yx - 5y = 2x + 1$$

$$\Rightarrow x(y-2) = 5y + 1 \Rightarrow x = \frac{5y+1}{y-2} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \frac{5x+1}{x-2} \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{-11}{(x-2)^2} \Rightarrow (f^{-1})'(1) = -11$$

تست: هرگاه $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ,(x \geq 1) \\ x^3 - 4 & ,(x < 1) \end{cases}$ **حاصل** $(f^{-1})'(3)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

$$A \left| \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{cases} 3 = x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm 2 \overset{x \geq 1}{\Rightarrow} x = 2 & \text{قابل قبول} \\ 3 = x^3 - 4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{7} \overset{x<1}{\Rightarrow} x = \sqrt[3]{7} & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

$$A' \left| \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right. \quad f'(x) = 2x \quad (x > 1) \Rightarrow f'(2) = 4$$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \Rightarrow (f^{-1})'(3) = \frac{1}{4}$$

تست: هرگاه $f(x) = x^5 + x + 1$، **حاصل** $f'(4) \times (f^{-1})'(f(4))$ **برابر است با:**

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۴

$$f'(4) \times (f^{-1})'(f(4)) = (f^{-1}of)'(4) = (x)'_4 = 1$$

یادآوری: $(f^{-1}of)(x) = x$

تذکر مهم: بچه‌ها مواظب باشید مشتق دوم تابع معکوس، معکوس مشتق دوم خود تابع نیست یعنی $(f^{-1})''(b) \neq \frac{1}{f''(a)}$، قبل از بیان مشتق دوم تابع معکوس، لازم است با مشتقات مراتب بالاتر آشنا شده و سپس به مشتق دوم تابع معکوس می‌پردازیم.

***نکته:* مشتق مراتب بالاتر و مشتق مرتبهٔ nام:**

اگر تابع f روی بازهٔ باز I مشتق‌پذیر باشد یعنی $I \subseteq D_{f'}$، تابع f' خود ممکن است در نقطه‌ای مانند a و یا همهٔ نقاط I مشتق‌پذیر باشد در واقع، اگر $\lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h}$ موجود باشد، می‌گوئیم مشتق مرتبهٔ دوم f در a موجود است (و یا f در a مشتق‌پذیر از مرتبهٔ دوم است) و آن را با $f''(a)$ نمایش می‌دهیم و در صورتی که f'' برای همهٔ نقاط I، موجود باشد، می‌گوئیم f در I مشتق مرتبهٔ دوم دارد.

این عمل را می‌توان باز هم ادامه داد و مشتقات مرتبهٔ سوم، چهارم و ... تا nام تابع f را تعریف کرد. این مشتقها را به ترتیب با ، f'''، $f^{(4)}$، $f^{(5)}$ و ... نمایش می‌دهند.

در واقع $f^{(n)}(a)$ عبارتست از:

$$f^{(n)}(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(a+h)-f^{(n-1)}(a)}{h}$$

مشتقات مراتب بالاتر را با نمادهای زیر نمایش می‌دهند.

y'' یا $f''(x)$ یا $\frac{d^2y}{dx^2}$ یا $\frac{d^2f}{dx^2}$

y''' یا $f'''(x)$ یا $\frac{d^3y}{dx^3}$ یا $\frac{d^3f}{dx^3}$

.
.
.

$y^{(n)}$ یا $f^{(n)}(x)$ یا $\frac{d^ny}{dx^n}$ یا $\frac{d^nf}{dx^n}$

مثال: مشتق مرتبهٔ n ام توابع $y=\sin x$ و $y=\frac{1}{x}$ را بیابید؟

۱) $y=\sin x \Rightarrow y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$y''=-\sin x=\sin(x+\pi)=\sin(x+\frac{2\pi}{2})$

$y'''=-\cos x=\sin(x+\frac{3\pi}{2})$

$y^{(4)}=\sin x=\sin(x+2\pi)=\sin(x+\frac{4\pi}{2})$

حدس می‌زنیم. $\Rightarrow y^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

البته این حدس را می‌توان به روش استقراء نیز ثابت کرد.

۲) $y=\frac{1}{x}=x^{-1} \Rightarrow y'=-1x^{-2}$

$y''=(-2)(-1)x^{-3}$

$y'''=(-3)(-2)(-1)x^{-4}$

.
.
.

حدس می‌زنیم $\Rightarrow\ y^{(n)}=(-1)^n n!\ \ x^{-(n+1)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

در زیر فرمول مشتق مرتبهٔ nام چندین تابع آورده شده است.

$y=K\sin ax \Rightarrow y^{(n)}=Ka^n\sin(ax+\frac{n\pi}{2})$

$y=K\cos ax \Rightarrow y^{(n)}=Ka^n\cos(ax+\frac{n\pi}{2})$

$y=e^{kx} \Rightarrow y^{(n)}=k^n e^{kx}$

$y=a^{kx} \Rightarrow y^{(n)}=k^n.a^{kx}(\mathrm{Ln}a)^n$

$y=\frac{1}{x} \Rightarrow y^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

$$y = Lnx \quad \Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^{n}(n-1)!}{x^{n}}$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} n!(ad-bc)c^{n-1}}{(cx+d)^{n+1}}$$

$$y = kx^{n} \quad \Rightarrow y^{(n)} = kn!$$

$$y = x^{m} \quad \Rightarrow y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n} = (m)_{n}x^{m-n}$$

یادآوری: $(m)_n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$،

$$y = f(ax) \quad \Rightarrow y^{(n)} = a^{n} f^{(n)}(ax)$$

نکته: در مورد توابع $y = \sin x$ و $y = \cos x$، مشتقات مرتبهٔ چهارم و مضارب آن برابر خود تابع هستند یعنی:

$$y = \sin x \quad \Rightarrow y^{(4k)} = \sin x \quad \Rightarrow \begin{cases} y^{(4k+1)} = y' = \cos x \\ y^{(4k+2)} = y'' = -\sin x \\ y^{(4k+3)} = y''' = -\cos x \end{cases}$$

$$y = \cos x \quad \Rightarrow y^{(4k)} = \cos x \quad \Rightarrow \begin{cases} y^{(4k+1)} = y' = -\sin x \\ y^{(4k+2)} = y'' = -\cos x \\ y^{(4k+3)} = y''' = \sin x \end{cases}$$

مثال: مشتق مراتب چهلم و پنجاه و چهارم تابع $y = \cos x$ را بیابید؟

$$y = \cos x \quad \Rightarrow \begin{cases} y^{(40)} = y = \cos x \\ y^{(54)} = y'' = -\cos x \end{cases} \qquad 54 \overset{4}{\equiv} 2$$

$$y' = -\sin x \qquad y'' = -\cos x$$

تست: مشتق مرتبهٔ پانزدهم تابع $y = \frac{1}{2^{14}}\sin 2x$ در نقطهٔ $x_0 = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) -1

$$y^{(15)} = \frac{-1}{2^{14}} \times 2^{15}\cos 2x \quad \Rightarrow y^{(15)}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\cos\frac{\pi}{3} = -1 \qquad 15 \overset{4}{\equiv} 3$$

تست: مشتق مرتبهٔ ششم تابع $y = \sin x + \cos x$ کدام است؟

۱) $\sin x + \cos x$ ۲) $\sin x - \cos x$ ۳) $\cos x - \sin x$ ۴) $-\sin x - \cos x$

$$y^{(6)} = y'' \quad \Rightarrow y' = \cos x - \sin x \qquad y'' = -\sin x - \cos x \qquad 6 \overset{4}{\equiv} 2$$

مثال: مشتق مرتبهٔ nام توابع $y = \sin^{2} ax$ و $y = \cos^{2} ax$ را بیابید؟

$$y = \sin^{2} ax = \frac{1}{2}(1 - \cos 2ax) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2ax \Rightarrow y^{(n)} = -\frac{1}{2} \times (2a)^{n}\cos\left(2ax + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$y = \cos^{2} ax = \frac{1}{2}(1 + \cos 2ax) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2ax \quad \Rightarrow y^{(n)} = \frac{1}{2} \times (2a)^{n}\cos\left(2ax + \frac{n\pi}{2}\right)$$

مثال: از تابع $y = \sin^{6} x + \cos^{6} x$، دویست بار مشتق بگیرید؟

$$y=\sin^۶ x+\cos^۶ x = ۱-\frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲x = ۱-\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۲}(۱-\cos ۴x)=\frac{۵}{۸}+\frac{۳}{۸}\cos ۴x$$

$$y^{(۲۰۰)}=\frac{۳}{۸}\times ۴^{۲۰۰}\cos ۴x=۳\times ۲^{۳۹۷}\cos ۴x \qquad ۲۰۰\overset{۴}{\equiv}۰$$

مثال: در تابع $y=e^{۳x}$، حاصل $\frac{f^{(۱۰)}(۰)}{f^{(۱۵)}(۰)}$ چقدر است؟

$$\frac{f^{(۱۰)}(x)}{f^{(۱۵)}(x)}=\frac{۳^{۱۰}e^{۳x}}{۳^{۱۵}e^{۳x}} \Rightarrow \frac{f^{(۱۰)}(۰)}{f^{(۱۵)}(۰)}=\frac{۱}{۳^۵}$$

مثال: مشتق چهارم تابع $y=\cos x(۲\cos ۲x-۱)$ در $x=\frac{\pi}{۶}$ چقدر است؟

$$y=\cos x\,(۴\cos^۲ x-۳)=۴\cos^۳ x-۳\cos x=\cos ۳x$$

$$y^{(۴)}=۳^۴\cos ۳x \qquad ۴\overset{۴}{\equiv}۰$$

$$y=f(x)\pm g(x) \Rightarrow y^{(n)}=f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)$$

$$y=kf(x) \Rightarrow y^{(n)}=kf^{(n)}(x)$$

نکته: بچه‌ها مواظب باشید:

$$\begin{cases} y=f(x)\times g(x) \Rightarrow y^{(n)}\neq f^{(n)}(x)\times g^{(n)}(x) \\ y=\frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y^{(n)}\neq \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} \end{cases}$$

مثال: مطلوبست مشتق مرتبهٔ nام تابع $y=\frac{x^۲}{x+۱}$

$$y=\frac{x^۲}{x+۱}=\frac{x^۲-۱+۱}{x+۱}=x-۱+\frac{۱}{x+۱} \Rightarrow y^{(n)}=۰+\frac{(-۱)^n n!}{(x+۱)^{n+۱}} \quad ,(n>۱)$$

مثال: مشتق مرتبهٔ nام تابع $y=\frac{۲x+۱}{x^۲+x-۲}$ را بیابید؟

$$y=\frac{A}{x-۱}+\frac{B}{x+۲}=\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{x+۲}$$

$$y^{(n)}=\frac{(-۱)^n n!}{(x-۱)^{n+۱}}+\frac{(-۱)^n n!}{(x+۲)^{n+۱}}$$

نکته: دستور لایب نیتز برای محاسبهٔ مشتق حاصلضرب دو تابع:

اگر توابع $u=f(x)$ و $v=g(x)$ دارای مشتقات مرتبهٔ nام باشند، مشتق مرتبهٔ nام حاصلضرب آنها از دستور زیر محاسبه می‌شود.

$$y=uv \Rightarrow y^{(n)}=u^{(n)}.v+\binom{n}{۱}u^{(n-۱)}v'+\binom{n}{۲}u^{(n-۲)}.v''+\dots+\binom{n}{n-۱}u'v^{(n-۱)}+uv^{(n)}$$

توجه کنید که این فرمول و بخصوص ضرائب آن تاحدودی شبیه بسط دو جمله‌ای نیوتن ($(a+b)^n$) می‌باشد.

تست: مشتق دوم تابع $y=uv$ نسبت به x کدام است (u و v توابعی مشتق‌پذیر از مرتبه‌ی دوم هستند)

۱) $y''=u''+v''$ ۲) $y''=u''v+v''u$ ۳) $y''=u''v'+v'u''$ ۴) $y''=u''v+۲u'v'+v''u$

حل:

$$y=uv \Rightarrow y'=u'v+v'u \Rightarrow y''=u''v+u'v'+v''u+v'u'$$

$$y''=u''v+۲u'v'+v''u$$

دقت کنید که این همان فرمول لایب نیتز برای حالت ۲ = n است.

تست: مشتق مرتبه‌ی دوم تابع ۱ = $x^۲+y^۲$ نسبت به x کدام است؟

۱) $\frac{۱}{y^۲}$ ۲) $-\frac{۱}{y^۲}$ ۳) $\frac{۱}{y^۳}$ ۴) $-\frac{۱}{y^۳}$

از طرفین مشتق می‌گیریم.

$$x^۲+y^۲=۱ \Rightarrow y'=-\frac{x}{y} \Rightarrow yy'=-x \Rightarrow y'^۲+yy''=-۱$$

$$(-\frac{x}{y})^۲+yy''=-۱ \overset{\times y^۲}{\Rightarrow} x^۲+y^۳y''=-y^۲ \Rightarrow y^۳y''=-(\underbrace{x^۲+y^۲}_{۱}) \Rightarrow y''=\frac{-۱}{y^۳}$$

تذکر: توجه کنید که مشتق yy' را به کمک فرمول مشتق حاصلضرب یعنی $(uv)'=u'v+v'u$ محاسبه کرده‌ایم.

***قضیه:* مشتق دوم تابع معکوس:** هرگاه f در a پیوسته و یک به یک بوده و مشتقش در a یعنی $f'(a)$، موجود و مخالف صفر باشد و $b=f(a)$، در این صورت:

$$(f^{-۱})''(b)=-\frac{f''(a)}{(f'(a))^۳}$$

اثبات: داشتیم:

$$(f^{-۱})'(x)=\frac{۱}{f'(y)} \qquad (x=f(y) \Leftrightarrow y=f^{-۱}(x))$$

$$(f^{-۱})'(x)=\frac{۱}{f'(f^{-۱}(x))} \Rightarrow$$ از طرفین مشتق می‌گیریم.

$$(f^{-۱})''(x)=\frac{۰-(f^{-۱})'(x)f''(f^{-۱}(x))}{[f'(f^{-۱}(x))]^۲} \overset{x=b}{\Rightarrow} (f^{-۱})''(b)=-\frac{(f^{-۱})'(b)\times f''(f^{-۱}(b))}{[f'(f^{-۱}(b))]^۲}$$

$$\overset{f^{-۱}(b)=a}{\Rightarrow} (f^{-۱})''(b)=\frac{-\frac{۱}{f'(a)}\times f''(a)}{(f'(a))^۲}$$

$$\boxed{(f^{-۱})''(b)=-\frac{f''(a)}{(f'(a))^۳}}$$

تست: هرگاه $f(x)=x^۳+x$، حاصل $(f^{-۱})''(۲)$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۳۲}$ ۲) $\frac{۳}{۶۴}$ ۳) $-\frac{۳}{۶۴}$ ۴) $\frac{-۳}{۳۲}$

حل:

$$۲=x^۳+x \Rightarrow x=۱ \Rightarrow a=۱ \Rightarrow \begin{cases} f'(x)=۳x^۲+۱ \Rightarrow f'(۱)=۴ \\ f''(x)=۶x \Rightarrow f''(۱)=۶ \end{cases}$$

$$(f^{-۱})''(b)=\frac{-f''(a)}{(f'(a))^۳} \Rightarrow (f^{-۱})''(۲)=-\frac{f''(۱)}{(f'(۱))^۳}=\frac{-۶}{۶۴}=\frac{-۳}{۳۲}$$

دیفرانسیل

فرض کنید تابع $y=f(x)$ در فاصله‌ی $[a,b]$ معین و در نقطهٔ $x\in(a,b)$ مشتق‌پذیر باشد در این صورت داریم:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

برای Δxهای کوچک داریم: $f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Δx را نمو متغیر x می‌گویند. عبارت $f(x+\Delta x)-f(x)$ را نمو تابع (یعنی y یا f) می‌گویند و آنرا با Δy یا Δf نمایش می دهند.

بنابراین داریم: $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (۱)

یا

$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$

اگر اختلاف $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$ را با β نمایش دهیم داریم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \beta$$

یا

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \beta \Delta x \qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که اگر Δy را که نمو تابع است برابر $f'(x)\Delta x$ اختیار کنیم، خطائی به اندازهٔ $\beta\Delta x$ مرتکب خواهیم شد و این خطا با کوچک شدن Δx، کوچک خواهد شد و به سمت صفر میل خواهد کرد. رابطهٔ (۱) را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت: $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$ (۳)

عمل جایگزین کردن خط مماس بر منحنی به جای منحنی را در محاسبه‌ی نمو عرضی تابع (Δy)، عمل خطی‌سازی و $|\Delta y - dy|$ را خطای خطی‌سازی می‌نامند. به شکل صفحه‌ی بعد توجه نمائید.

توجه داشته باشید که x و Δx به هم وابسته نیستند و برای هر x ثابت در D_f، عدد Δx می‌تواند هر مقداری باشد به طوریکه $(x+\Delta x) \in D_f$. رابطهٔ (۳) را به صورت $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ (۴) نیز می‌توان نوشت از روابط (۳) و (۴) معمولاً در دو مورد زیر استفاده می‌شود.

۱) معمولاً محاسبهٔ Δy کاری مشکل است، در صورتی که محاسبهٔ $f'(x)\Delta x$ با در دست داشتن x و Δx، کاری ساده است و به کار بردن $f'(x)\,\Delta x$ به جای Δy حجم محاسبات را کاهش می‌دهد، بعنوان مثال برای محاسبهٔ $\text{Arcsin}\,۰/۵۲ - \text{Arcsin}\,۰/۵$ بهتر است عبارت $f'(x)\Delta x$ یعنی $\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}} \times \Delta x$ را به ازاء $x = ۰/۵$ و $\Delta x = ۰/۰۲$ حساب کرده، در این صورت داریم:

$$\text{Arcsin}\,۰/۵۲ - \text{Arcsin}\,۰/۵ \approx \frac{۱}{\sqrt{۱-\frac{۱}{۴}}} \times ۰/۰۲ = \frac{۲}{\sqrt{۳}} \times \frac{۲}{۱۰۰} = \frac{\sqrt{۳}}{۷۵}$$

۲) مقدار تابع و مشتق آن را در نقطه‌ای به طول معین x، می‌دانیم و می‌خواهیم مقادیر تابع را در نزدیکی x، تخمین بزنیم. مثلاً فرض کنید که دستور تابع f را نمی‌دانیم ولی به طریقی (مثلاً از روی منحنی تابع f) دریافته‌ایم که مقدار تابع در نقطه‌ای به طول $x = ۳$، برابر ۲- و مقدار مشتق آن در $x = ۳$ برابر ۶ است، می‌خواهیم مقادیر f را در نزدیکی $x = ۳$ حدس بزنیم، به عنوان مثال $f(۲/۹)$ را حساب کنیم در این حالت داریم:

$f(۲/۹)\approx f(۳+(-۰/۱))\approx f(۳)+f'(۳)\Delta x=-۲+۶(-۰/۱)=-۲/۶$

تعریف دیفرانسیل: فرض کنید تابع $y=f(x)$، تابعی مشتق‌پذیر از متغیر x باشد مقدار $f'(x)\,\Delta x$ را که در آن $x\in D_f$ و Δx عددی دلخواه و حقیقی است)، دیفرانسیل تابع f در نقطهٔ x می‌گویند و آنرا با df یا dy نمایش می‌دهند.

$df=dy=f'(x)\,\Delta x$

اکنون تابع $f(x)=y=x$ را در نظر بگیرید در مورد این تابع داریم:

$y=x \Rightarrow f'(x)=۱$

$dx=۱\times\Delta x$

$dx=\Delta x$

یعنی دیفرانسیل متغیر مستقل، با نمو آن یکی است، بنابراین رابطه‌ی $dy=y'\Delta x$، را می‌توان به صورت $dy=y'dx$ نیز نمایش داد لذا می‌توان گفت:

دیفرانسل هر تابع برابر است با مشتق آن تابع، ضربدر دیفرانسیل متغیرش.

تذکر: با توجه به تساوی $dy=y'dx$ داریم: $y'=\frac{dy}{dx}$ و لذا می‌توان از نماد $\frac{dy}{dx}$ نیز به عنوان مشتق تابع y نسبت به x استفاده کرد.

مثال: دیفرانسیل توابع زیر را حساب کنید؟

۱) $y=x^{۲} \Rightarrow dy=۲x\,dx$

۲) $y=c$ ثابت $\Rightarrow dy=۰\times dx=۰$

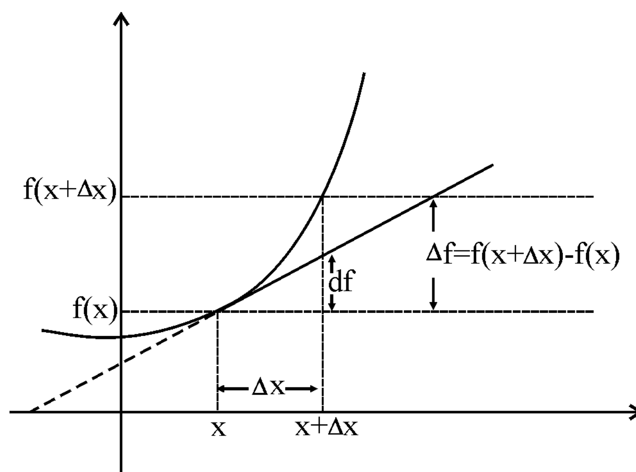
۳) $y=\text{Arcsin}x \Rightarrow dy=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}\,dx$

۴) $y=\text{Arctan}u$, (تابعی از x است u) $\Rightarrow dy=\frac{۱}{۱+u^{۲}}du$

توجه داشته باشید که $du=u'dx$ لذا به عنوان مثال داریم:

$$d(\text{Arctan}\sqrt{x})=\frac{۱}{۱+x}\,d(\sqrt{x})=\frac{۱}{۱+x}\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx=\frac{۱}{۲\sqrt{x}(۱+x)}dx$$

دقت داشته باشید که dx یا Δx، هر عدد حقیقی دلخواهی می‌تواند باشد، اما همان طور که در شکل زیر دیده می‌شود، برای Δxهای کوچک، Δf و df (یا Δy و dy) تقریباً مساوی‌اند و البته نباید تصور کرد که همواره Δf از df بزرگتر است.



فرمولهای دیفرانسیل: با توجه به فرمول $y'=\frac{dy}{dx}$ یا $dy = y'dx$، نتیجه می‌شود که فرمولهای دیفرانسیل مشابه فرمولهای مشتق است، بنابراین در اینجا، ما فقط به بیان چند فرمول دیفرانسیل اکتفا می‌کنیم.

۱) $d\,(c)_{\text{ثابت}} = ۰$

۲) $d(u \pm v) = du \pm dv$

۳) $d(uv) = vdu + udv$

۴) $d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^۲}$

۵) $d(Lnx) = \frac{۱}{x}\,dx = \frac{dx}{x}$

اثبات فرمول شمارهٔ ۳:

داشتیم: (متغیرش) d × مشتق آن تابع = (هر تابع) d

لذا داریم:

$$d(uv) = (uv)'.dx$$
$$= (u'v + v'u)\,dx$$
$$= v(u'dx) + u(v'dx)$$
$$= vdu + udv$$

مثال: دیفرانسیل تابع $y = e^{e^x} + ۲sinx - ۱۰$ را حساب کنید؟

$$dy = (e^x . e^{e^x} + ۲cosx)\,dx$$

مثال: دیفرانسیل تابع $y = \sqrt{x}$ را در نقطهٔ $x = ۱۶$ به ازاء $\Delta x = dx = ۰/۰۲$ حساب کنید؟

$$dy = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\,dx$$
$$dy = \frac{۱}{۲\sqrt{۱۶}} \times ۰/۰۲ = \frac{۱}{۴۰۰}$$

مثال: الف) مقدار تقریبی افزایش y را برای تابع $y = Arctanx$، هنگامیکه x از ۱ به ۱/۰۱ افزایش می‌یابد، بیابید؟

$$y = f'(x)\,\Delta x = \frac{۱}{۱+x^۲}\,dx \quad = \frac{۱}{۱+۱} \times ۰/۰۱ = \frac{۱}{۲۰۰}$$

ب) مقدار تقریبی Arctan۱/۰۱ به کمک دیفرانسیل چقدر است؟

$$Arctan\,۱/۰۱ - Arctan۱ \approx f'(x)\,\Delta x$$

$Arctan\,۱/۰۱ \approx Arctan۱ + \frac{۱}{۲۰۰} = \frac{\pi}{۴} + \frac{۱}{۲۰۰} \approx \frac{۳/۱۴}{۴} + \frac{۱}{۲۰۰} = ۰/۷۹$ رادیان

$\Rightarrow Arctan\,۱/۰۱ \approx ۰/۷۹ \times \frac{۱۸۰}{\pi} \approx (۴۵/۲۸۶۶۲۴۴۲)^{\circ}$ ° علامت درجه است.

ج) به کمک ماشین حساب، مقدار Arctan۱/۰۱ را حساب کنید؟

$$Arctan(۱/۰۱) \approx (۴۵/۲۸۵۰۵۱۲۸)^{\circ}$$

تـــوجه داشـــته بـــاشید کـــه: $\text{Arctan}1 = 45^\circ$، چـون تـابع $f(x) = \text{Arctan}x$، تـابعی اکـیداً صـعودی است، لذا $\text{Arctan}1/01 > \text{Arctan}1$

محاسبهٔ مقادیر تقریبی به کمک دیفرانسیل:

تابع مشتق‌پذیر $y = f(x)$ را در نظر بگیرید، هرگاه مقدار این تابع و مقدار مشتق آن، در نقطهٔ x، قابل محاسبه باشند، به کمک فرمول: $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$

می‌توان مقادیر تقریبی تابع را در نقاط مجاور x، یعنی نقاط به صورت $x + \Delta x$ (Δx می‌تواند مثبت یا منفی باشد) محاسبه کرد.

مثال: مقدار تقریبی $\sqrt[5]{34}$ را به کمک دیفرانسیل حساب کنید؟

حل: فرض می‌کنیم: $f(x) = \sqrt[5]{x}$

داریم: $x = 32$

$\Delta x = +2$

$$f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

$$f'(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

$$\sqrt[5]{32+2} \approx \sqrt[5]{32} + \frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}} \times 2$$

$$\sqrt[5]{34} \approx 2 + \frac{1}{5\times 2^4} \times 2 = 2 + \frac{1}{40} = 2/025$$

ضمناً به کمک ماشین حساب مقدار $\sqrt[5]{34}$ برابر است با، ۲/۰۲۴۳۹۷۴۵۸، که به مقدار محاسبه شدهٔ فوق بسیار نـزدیک است.

مثال: $\sin 29^\circ$ را به کمک دیفرانسیل حساب کنید؟

حل: فرض می‌کنیم: $f(x) = \sin x$

$x = 30^\circ$

$\Delta x = -1^\circ = -\frac{\pi}{180}$ رادیان

$f'(x) = \cos x$

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$

$$\sin 29^\circ \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$\sin ۲۹^\circ \approx \frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}\pi}{۳۶۰} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱/۷ \times ۳/۱۴}{۳۶۰} = ۰/۵ - ۰/۰۱۴۸۲۷۷۷۷ = ۰/۴۸۵۱۷۲۲۲$

البته مقدار $\sin ۲۹^\circ$ به کمک ماشین حساب برابر است با: $۰/۴۸۴۸۰۹۶۲$

ضمناً توجه داشته باشید که $\sin ۲۹^\circ < \sin ۳۰^\circ$

نکته: وضعیت Δy و dy

۱) $\Delta y > dy \Leftrightarrow f'' > ۰$

۲) $\Delta y < dy \Leftrightarrow f'' < ۰$

۳) $\Delta y = dy \Leftrightarrow$ y باید یک خط باشد.

تست: درکدام یک از توابع زیر، Δy از dy همواره بزرگتر است؟

۱) $y = Lnx$ ۲) $y = e^x$ ۳) $y = \sqrt{x}$ ۴) $y = x$

حل: پاسخ صحیح گزینه‌ی (۲) است زیرا: $y = e^x \Rightarrow y' = e^x \Rightarrow y'' = e^x > ۰$

مثال: در تابع $y = x^۴ - ۲x^۲$، هرگاه $\Delta y < dy$ باشد، حدود n را بیابید؟

$y' = ۴x^۳ - ۴x \quad \Rightarrow y'' = ۱۲x^۲ - ۴ < ۰ \quad \Rightarrow x^۲ < \frac{۱}{۳} \quad \Rightarrow |x| < \frac{\sqrt{۳}}{۳}$

نکته: برای خط $y = ax + b$، خطای مطلق در هر نقطه صفر است یعنی: $|\Delta y - dy| = ۰$

نکته: برای تابع درجه‌ی دوم $y = ax^۲ + bx + c$، خطای مطلق در هر نقطه برابر است با: $|a| (\Delta x)^۲$ یعنی:

$|\Delta y - dy| = |a| (\Delta x)^۲$

مثال: برای تابع $y = ۲x^۲ - x$ مقدار $\Delta y - dy$ را در نقطهٔ $x_۰$ با شرط $\Delta x = \frac{۱}{۱۰}$ بیابید؟

$\Delta y - dy = ۲(\frac{۱}{۱۰})^۲ = \frac{۱}{۵۰}$

انتشار خطا:

فرض می‌کنیم در محاسبه‌ی $f(x)$ مقدار x توسط وسایل آزمایشگاهی نظیر آمپرسنج، ولت سنج، کولیس، ورنیه و ... اندازه‌گیری شده باشد، معمولاً هر یک از وسایل فوق، میزان خطائی دارند، (Range خطا) که معمولاً این میزان خطا روی خود وسیله‌ی اندازه گیری، نیز ثبت شده است و آنرا با Δx نشان می‌دهیم.

عبارت $f(x + \Delta x) - f(x)$ را خطای منتشره در محاسبه‌ی $f(x)$ می‌گویند، لذا هرگاه x عامل اندازه‌گیری شده و Δx حداکثر خطای اندازه‌گیری x باشد، حداکثر خطای محاسبه‌ی $f(x)$ تقریباً برابر است با:

$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y \approx f'(x)\, \Delta x$

مثال: دوره‌ی تناوب یک آونگ ساده از فرمول $T = ۲\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ به دست می‌آید. طول آونگی ۱ متر اندازه‌گیری شده است، اگر حداکثر خطا در اندازه‌گیری l برابر ($\pm ۰/۰۰۱$) متر باشد، حداکثر خطا در محاسبه‌ی T را بیابید؟ (فرض کنید

($\sqrt{g} \simeq \pi$

حل: $T(l) = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{l} = 2\times 1\times\sqrt{l} = 2\sqrt{l} \Rightarrow T'(l) = \frac{1}{\sqrt{l}}$

$T(l+\Delta l) - T(l) \simeq T'(l)\Delta l$

$T(1/001) - T(1) \simeq 1\times 0/001 = 0/001^{S}$

نکته: معادلهٔ دیفرانسیل: اصطلاح معادلهٔ دیفرانسیل برای اولین بار توسط لایب نیتز به کار برده شده است و وی این اصطلاح را برای نمایش هر نوع رابطه‌ای بین دیفرانسیلهای dx و dy و متغیرهای x و y و مقادیر ثابت a، b، c و ... به کار برده است ولی بزودی این محدویت مفهوم از بین رفت و امروزه منظور از معادلهٔ دیفرانسیل معمولی، رابطه‌ای بین یک متغیر مستقل x و یک متغیر تابع y و ضرایب دیفرانسیل متغیر تابع نسبت به متغیر مستقل می‌باشد،

مانند:

۱) $y' = 1 + y$ یا $\frac{dy}{dx} = 1 + y$ یا $dy = dx + ydx$

۲) $y'' = -p^2y$ یا $\frac{d^2y}{dx^2} = -p^2y$ یا $d^2y = -p^2ydx^2$

حل یک معادلهٔ دیفرانسیل: منظور از حل یک معادلهٔ دیفرانسیل، پیدا کردن تابع یا توابعی مانند y است که در آن معادله صدق کند. این کار همیشه امکان‌پذیر نیست، گاهی ساده، گاهی بسیار مشکل و گاهی حتی غیرممکن است. در اینجا به ذکر یک مثال اکتفا می‌کنیم.

مثال: معادلهٔ دیفرانسیل $y' = 1 + y$ را حل کنید؟

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y \Rightarrow dy = dx + ydx \Rightarrow \int dy = \int dx + \int ydx$$

$$\Rightarrow y = x + yx + c \Rightarrow y(1-x) = x + c \qquad \boxed{y = \frac{x+c}{1-x}}$$

تذکر: البته یک معادلهٔ دیفرانسیل ممکن است همانند یک معادلهٔ مثلثاتی جوابهای بیشماری داشته باشد بعنوان مثال یکی از جوابهای معادلهٔ $y' = 1 + y$، به صورت $y = e^x - 1$ می‌باشد.

در اینجا ثابت می‌کنیم که $y = e^x - 1$ یکی از جوابهای معادلهٔ فوق است.

$$y = e^x - 1 \Rightarrow y + 1 = e^x$$

$$y = e^x - 1 \Rightarrow y' = e^x \Rightarrow y' = y + 1$$

مثال: تابع $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ مفروض است یک رابطه یا یک معادله برحسب y و y' و y'' وجود دارد، مطلوبست آن رابطه؟

$y^2 = \frac{1}{x^2+x+1} \Rightarrow \frac{1}{y^2} = x^2 + x + 1 \Rightarrow$ از طرفین مشتق می‌گیریم.

$\frac{0 - 2yy'}{y^4} = 2x + 1 \Rightarrow \frac{-2y'}{y^3} = 2x + 1 \Rightarrow$ حال از طرفین مجدداً مشتق می‌گیریم.

$$-2\left(\frac{y''y^3 - 3y'y^2}{y^6}\right) = 2 \Rightarrow \frac{yy'' - 3y'^2}{y^4} = -1 \Rightarrow y^4 + yy'' - 3y'^2 = 0$$

مثال: اگر $y = \sin x + \cos x$ **ثابت کنید** $y'' + y = 0$ **(در واقع می‌خواهیم ثابت کنیم تابع** $y = \sin x + \cos x$ **یکی از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل** $y'' + y = 0$ **است)**

$$y = \sin x + \cos x \Rightarrow y' = \cos x - \sin x \Rightarrow y'' = -\sin x - \cos x \Rightarrow y'' = -y \Rightarrow y'' + y = 0$$

مثال: هرگاه $y = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}$**، حاصل** $\frac{2y'^2 - yy''}{y^3}$ **را بیابید؟**

$$y = \frac{(x-b)-(x-a)}{x^2-(a+b)x+ab} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x^2-(a+b)x+ab}{a-b} \Rightarrow$$ مشتق می‌گیریم.

$$-\frac{y'}{y^2} = \frac{2x-a+b}{a-b} \Rightarrow$$ مجدداً مشتق می‌گیریم. $$-\frac{y''y^2-(2yy')y'}{y^4} = \frac{2}{a-b} \Rightarrow \frac{2y'^2-yy''}{y^3} = \frac{2}{a-b}$$

تعریف نقطه‌ی بحرانی: نقطه‌ی $c \in D_f$ را یک نقطه‌ی بحرانی تابع f گویند، هرگاه $f'(c)$ موجود نباشد و یا اگر موجود است، صفر باشد.

تذکر مهم: هرگاه $c \notin D_f$، آنگاه c یک نقطه‌ی بحرانی تابع f نخواهد بود. (یادت نره)

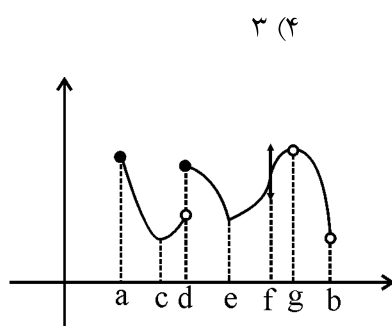
روش یافتن نقاط بحرانی یک تابع:

۱) ابتدا دامنه‌ی تابع را می‌یابیم. ۲) سپس از تابع مشتق می‌گیریم. ۳) دامنه‌ی مشتق تابع را می‌یابیم. ۴) مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

در این صورت نقاط بحرانی نقاطی هستند که در دامنه‌ی خود تابع باشند ولی در دامنه‌ی مشتق تابع نباشند و یا نقاطی که در دامنه‌ی خود تابع و در دامنه‌ی مشتقش باشند و ضمناً مشتق در آن نقاط صفر باشد.

تست: در شکل زیر، چند نقطه‌ی بحرانی وجود دارد؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳



پاسخ صحیح گزینه‌ی ۲ می‌باشد نقاط بحرانی عبارتند از:

{a,c,d,e,f}

تذکرات مهم:

۱) هر نمودار که قسمتی از آن، پاره‌خط موازی محور xها باشد، بی‌نهایت نقطه‌ی بحرانی دارد، به عنوان مثال تابع $y = \lfloor x \rfloor$ بی‌نهایت نقطه‌ی بحرانی دارد.

۲) تابع ثابت $y = c$ بی‌نهایت نقطه‌ی بحرانی دارد.

۳) نقاط ابتدا و انتهای بازه‌ی بسته، نقاط بحرانی تابع هستند.

مثال: نقاط بحرانی توابع زیر را بیابید؟

۱) $y = x^۳ - ۳x$

$$\begin{cases} D = R \\ y' = ۳x^۲ - ۳ \\ D_{y'} = R \\ y' = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱ \end{cases} \Rightarrow$$ نقاط بحرانی $= \{\pm ۱\}$

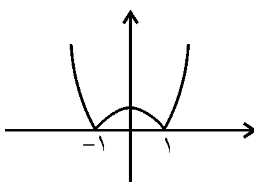
۲) $y = \frac{x - ۱}{x + ۱}$

$$\begin{cases} D = R - \{-۱\} \\ y' = \frac{۲}{(x + ۱)^۲} \\ D_{y'} = R - \{-۱\} \\ y' \neq ۰ \end{cases} \Rightarrow$$ نقاط بحرانی $= \{\ \}$

۳) $y = \lfloor x \rfloor$

$$\begin{cases} D = R \\ y' = \begin{cases} ۰ & ,(x \notin z) \\ \text{موجود نیست} & ,(x \in z) \end{cases} \\ D_{y'} = R - z \\ y' = ۰ \Rightarrow x \in R - Z \end{cases}$$ $\Rightarrow$ نقاط بحرانی $= Z \cup (R - Z) = R$

۴) $y = |x^۲ - ۱| \Rightarrow$



$\Rightarrow$ نقاط بحرانی $= \{۰, -۱, ۱\}$

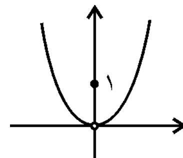
۵) $y = x + \frac{۴}{x}$

$$\begin{cases} D_f = R - \{۰\} \\ y' = ۱ - \frac{۴}{x^۲} \\ D_{y'} = R - \{۰\} \\ y' = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲ \end{cases}$$ نقاط بحرانی

۶) $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

$$\begin{cases} D_f = R \\ y' = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \\ D_{y'} = R - \{\pm 1\} \\ y' = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \text{نقاط بحرانی} = \{0, \pm 1\} \end{cases}$$

۷) $y = \begin{cases} x^2 & ,(x \neq 0) \\ 1 & ,(x = 0) \end{cases}$



نقاط بحرانی $= \{0\}$

۸) $y = \begin{cases} x^2 + 2x & ,(-2 \le x < 0) \\ x^3 - 75x & ,(0 \le x \le 6) \end{cases}$

$D_y = [-2,6] \Rightarrow$ ۶ و ۲− = x بحرانی‌اند

$y' = \begin{cases} 2x + 2 & ,(-2 < x < 0) \\ 3x^2 - 75 & ,(0 < x < 6) \end{cases}$

$\begin{cases} f'_-(0) = 2 \\ f'_+(0) = -75 \end{cases} \Rightarrow$ $f'(0)$ موجود نیست $\Rightarrow$ $x = 0$ بحرانی است

$D_{y'} = (-2, 6) - \{0\}$

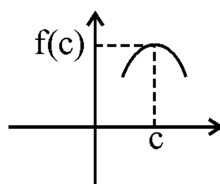
$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \pm 5 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$ قابل قبول

نقاط بحرانی $= \{-2, 6, 0, -1, 5\}$

ماکزیمم و می‌نیمم نسبی

تعریف Max نسبی: گوئیم تابع f در نقطه‌ی c، دارای ماکزیممی نسبی برابر $f(c)$ است، هرگاه یک همسایگی از c (یا یک فاصله‌ی باز شامل c) وجود داشته باشد به طوریکه f روی آن فاصله تعریف شده و به ازاء هر x متعلق به آن فاصله داشته باشیم: $f(x) \le f(c)$

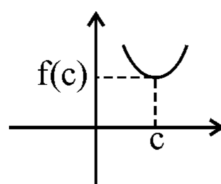
c را طول نقطه‌ی Max نسبی و $f(c)$ را مقدار Max نسبی در نقطه‌ی c یا خود Max نسبی می‌گویند، در این حالت $\lim_{x \to c} f(x) \le f(c)$ است.



تعریف Min نسبی: گوئیم تابع f در نقطه‌ی c، دارای می‌نیممی نسبی برابر f(c) است، هرگاه یک همسایگی از c (یا یک فاصله‌ی باز شامل c) وجود داشته باشد به طوریکه f روی آن فاصله تعریف شده و به ازاء هر x متعلق به آن فاصله داشته باشیم: $f(x) \geq f(c)$

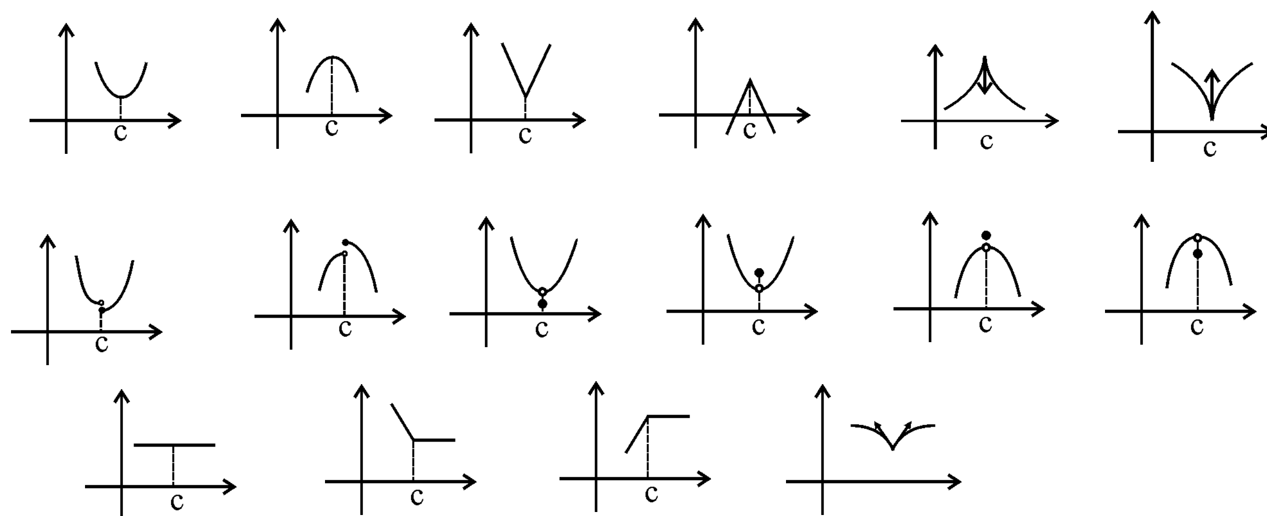
c را طول نقطه‌ی Min نسبی و f(c) را مقدار Min نسبی در نقطه‌ی c یا خود Min نسبی می‌گویند.

در این حالت $\lim\limits_{x \to c} f(x) \geq f(c)$



تعریف اکسترمم نسبی: ماکزیمم یا می‌نیمم نسبی را اکسترممم نسبی گویند.

صورتهای مختلف Max و Min نسبی در شکل:



چند نکته‌ی مهم:

۱ـ لزومی ندارد که در نقاط Max یا Min نسبی، تابع پیوسته باشد.

۲ـ لزومی ندارد که در نقاط Max یا Min نسبی، تابع مشتق‌پذیر باشد تا چه رسد به اینکه مشتق در این نقاط صفر باشد.

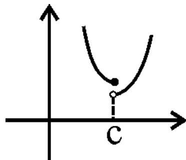
۳ـ هرگاه تابع f فقط روی [a,b] تعریف شده باشد، آنگاه چون f در هیچ همسایگی نقاط a و b تعریف نشده است، لذا f در

این دو نقطه، نمی‌تواند اکسترممم نسبی داشته باشد به عبارت ساده‌تر، نقاط ابتدا و انتهای بازه، نمی‌توانند طول نقاط اکسترمم نسبی تابع (نه مطلق) باشند. زیرا برای آنها همسایگی تعریف نشده است.

۴) در تابع ثابت، هر نقطه طول Max و Min نسبی می‌باشند.

۵ـ هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی یک تابع، یک نقطه‌ی بحرانی آن نیز هست. یعنی:

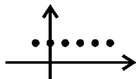
(مجموعه‌ی نقاط بحرانی $\subseteq$ مجموعه‌ی نقاط اکسترمم نسبی) اما عکس این مطلب همواره درست نیست، یعنی نمی‌توان گفت که هر نقطه‌ی بحرانی یک تابع، حتماً یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی آن نیز هست به شکل مقابل توجه کنید، c نقطه‌ی بحرانی هست ولی طول اکسترمم نسبی‌نیست.



مثال: تابع $f(x) = x^3$ را در نظر بگیرید، چون $f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$، لذا $x = 0$ طول نقطه‌ی بحرانی تابع هست ولی f در c اکسترمم نسبی ندارد و بنابراین می‌توان گفت:

۶ـ خیال نکنید هر کجا که مشتق تابعی صفر شد، حتماً تابع در آن نقطه اکسترمم نسبی خواهد داشت (مثال فوق)

۷ـ تابع مجموعه‌ی نقاط افقی (تابع مقابل) در هیچ نقطه‌ای اکسترمم نسبی ندارد، زیرا برای آنها همسایگی تعریف نشده است.



تذکر مهم: همانطوری که دیدیم در نقاط اکسترمم نسبی، لزومی ندارد که مشتق تابع حتماً صفر باشد. چرا که ممکن است تابع در این نقاط مشتق‌پذیر نباشد. به عنوان مثال تابع $f(x) = |x|$ در $x = 0$، Min نسبی دارد اما در این نقطه تابع مشتق‌پذیر نیست، به قضیه‌ی زیر توجه کنید:

قضیه‌ی مهم: هرگاه تابع f در نقطه‌ی c، Max یا Min نسبی داشته باشد و $f'(c)$ نیز موجود باشد (یعنی f در c مشتق‌پذیر باشد)، آنگاه حتماً $f'(c) = 0$ است.

نکته‌ی مهم: هرگاه تابع f، تابعی مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تنها به ازاء xهایی که $f'(x)$ در آنها برابر صفر است، تابع دارای نقطه‌ی بحرانی بوده و ممکن است اکسترمم نسبی داشته باشد، اما با وجود این، همانطوری که گفته شد، ممکن است که به ازاء مقدار یا مقادیر خاصی از x، $f'(x) = 0$ بوده و در عین حال تابع f در آن نقاط، هیچگونه اکسترممی نداشته باشد، بنابراین شرط لازم برای آنکه f در نقطه‌ای مانند $c \in D_f$، اکسترمم نسبی داشته باشد آنستکه $f'(c) = 0$ باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد، البته این شرط کافی نیست.

ماکزیمم و می‌نیمم مطلق

تعریف ماکزیمم مطلق: گوئیم تابع f در فاصله‌ی [a,b]، Max مطلق دارد، هرگاه نقطه‌ای مانند c در این بازه موجود باشد به طوریکه $\forall x \in [a,b] : f(x) \leq f(c)$

تعریف می‌نیمم مطلق: گوئیم تابع f در فاصله‌ی [a,b]، Min مطلق دارد، هرگاه نقطه‌ای مانند c در این بازه موجود باشد به طوریکه: $\forall x \in [a,b] : f(x) \geq f(c)$

چند نکته‌ی مهم:

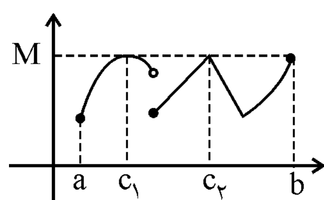
۱ـ هرگاه c طول نقطه‌ی اکسترمم مطلق تابع f روی دامنه‌ی آن باشد و تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، آنگاه نقطه c، طول اکسترمم نسبی f نیز هست.

۲ـ هرگاه تابع f روی فاصله‌ی بسته‌ی [a,b] پیوسته باشد، آنگاه f روی فاصله‌ی مزبور، یک مقدار Max مطلق و یک مقدار Min مطلق دارد.

بالاخص: الف) هرگاه $f:[a,b] \to R$ پیوسته و اکیداً صعودی باشد، آنگاه f(a)، Min مطلق و f(b)، Max مطلق تابع f در بازه‌ی [a,b] می‌باشند.

ب) هرگاه $f: [a,b] \to R$ پیوسته و اکیداً نزولی باشد، آنگاه f(b)، Min مطلق و f(a)، Max مطلق تابع f در بازه‌ی [a,b] می‌باشند.

۳ـ هر تابع در یک فاصله‌ی بسته، فقط یک Max مطلق و فقط یک Min مطلق دارد، اما می‌تواند چندین نقطه‌ی Max یا Min مطلق داشته باشد. به شکل توجه کنید. همانطوری که در شکل دیده می‌شود تابع دارای یک Max مطلق است که برابر M می‌باشد ولی سه نقطه‌ی Max مطلق دارد که عبارتند از: (c_1,M)، (c_2,M) و (b,M)

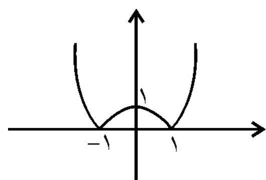


توجه داشته باشید که یک تابع در یک فاصله می‌تواند، چندین Max و Min نسبی داشته باشد.

به عنوان مثالی دیگر می‌توان تابع مجموعه نقاط افقی یعنی تابع (شکل) را نام برد، این تابع در همه‌ی نقاط دامنه‌اش، ماکزیمم و مینیمم مطلق دارد.

۴ـ هرگاه f در فاصله‌ی [a,b] تعریف شده باشد، f می‌تواند در نقاط a و b، Max یا Min مطلق (نه نسبی) داشته باشد.

مثال: اکسترممهای نسبی و مطلق تابع $y = |x^2 - 1|$ را با توجه به شکل بیابید؟



حل: در نقاط $x = \pm 1$، تابع هم Min نسبی و هم Min مطلق دارد که برابر ۰ است. در نقطه‌ی $x = 0$، تابع فقط Max نسبی دارد که برابر ۱ است، ضمناً تابع Max مطلق ندارد.

روش یافتن اکسترممهای مطلق یک تابع پیوسته در یک بازه‌ی بسته:

ابتدا نقاط بحرانی تابع را در فاصله‌ی [a,b] یافته سپس عرض نقاط بحرانی را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم (توجه داشته باشید

که نقاط a و b نیز بحرانی‌اند)، نقطه‌ای که بیشترین عرض را داشته باشد نقطه‌ی Max مطلق و نقطه‌ای که کمترین عرض را داشته باشد نقطه‌ی Min مطلق می‌باشد.

مثال: اکسترممهای مطلق تابع $f(x) = ۲\cos x$ را در فاصله‌ی $[-\frac{۲\pi}{۳},\frac{\pi}{۳}]$ بیابید؟

تنها نقطه‌ی بحرانی در فاصله‌ی داده شده $f'(x) = -۲\sin x = ۰ \Rightarrow x = k\pi \Rightarrow x = ۰$

$$\begin{cases} f(۰) = ۲ \rightarrow \text{Max مطلق} \\ f(-\frac{۲\pi}{۳}) = -۱ \rightarrow \text{Min مطلق} \\ f(\frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

قضیهٔ رول و قضیه‌ی مقدار میانگین (لاگرانژ):

قضیهٔ رول: فرض می‌کنیم تابع f

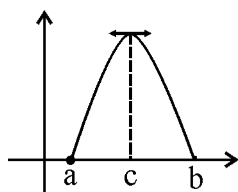
۱) روی فاصلهٔ [a,b] پیوسته باشد.

۲) روی فاصلهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد.

۳) $f(a) = f(b)$

در این صورت عددی (حداقل یک عدد) مانند $c \in (a,b)$ (و مسلماً متعلق به [a,b]) وجود دارد که $f'(c) = ۰$، به عبارت دیگر f' در فاصلهٔ (a,b) حداقل یک ریشه دارد.

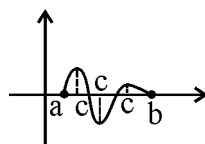
تعبیر هندسی قضیهٔ رول: این قضیه مطابق شکل بیان می‌کند که دست کم یک نقطه مانند $c \in (a,b)$ هست که خط مماس در آن نقطه افقی است (توجه کنید که در این حالت $f'(c)$ شیب خط مماس بر منحنی است)



نکتهٔ مهم: نقطهٔ c در قضیهٔ رول، منحصر به فرد نیست.

به شکل توجه کنید.

در این شکل، ۳ تا نقطهٔ c وجود دارد.

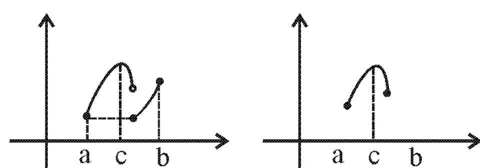


مثال: تابع $y = x^۲ - ۹$ مفروض است آیا این تابع شرایط قضیهٔ رول را در فاصلهٔ [-۳,۳] دارد؟ در صورت مثبت بودن جواب، c یا cهای قضیهٔ رول را بیابید؟

حل: واضح است که این تابع در فاصلهٔ [-۳,۳] پیوسته و مشتق‌پذیر است ضمناً $f(۳) = f(-۳)$، لذا f شرایط قضیهٔ رول را در بازهٔ مزبور دارد.

$f'(x) = ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow -۳ < ۰ < ۳ \Rightarrow c = ۰$

تذکر مهم: عکس قضیهٔ رول در حالت کلی برقرار نیست. یعنی ممکن است نمودار تابعی دارای مماس افقی باشد در حالی که بعضی از شرایط قضیهٔ رول برقرار نمی‌باشد، به شکلهای مقابل توجه کنید.



مثال: تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^3 + 1$ مفروض است این تابع در نقطهٔ $x = 0$ دارای مماس افقی است، اما هیچ فاصله‌ای مانند $[a,b]$ شامل ۰ وجود ندارد که $f(a) = f(b)$ باشد زیرا $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ و تابع اکیداً صعودی است.

نکتهٔ مهم: توجه کنید که اگر مفروضات قضیه‌ای برقرار باشد، حتماً حکم آن قضیه نیز برقرار است اما گاهی ممکن است یکی و یا برخی از مفروضات (فرضهای) قضیه‌ای برقرار نباشند، اما حکم قضیه برقرار باشد. (مثال فوق)

نتیجهٔ مهم قضیهٔ رول: از قضیهٔ رول نتیجه می‌شود که بین هر دو ریشهٔ تابع مشتق‌پذیر f، مشتق f یعنی f' یک ریشه دارد. در واقع در قضیهٔ رول هنگامیکه می‌نویسیم $f(a) = f(b) = 0$، یعنی a و b ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = 0$ هستند و هنگامیکه می‌نویسیم $f'(c) = 0$، یعنی c یک ریشهٔ معادلهٔ $f'(x) = 0$ است.

مثال: ثابت کنید معادلهٔ $x^{2n+1} + ax + b = 0$ برای $a > 0$ و $n \in N$، دقیقاً یک ریشه دارد.

حل: فرض می‌کنیم $f(x) = x^{2n+1} + ax + b$، چون $f'(x) = (2n + 1)x^{2n} + a \geq 0$، بنابراین f اکیداً صعودی است ضمناً چون $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ لذا طبق قضیهٔ مقدار میانی، f دست کم یک ریشه دارد. (هر تابع پیوسته که اکیداً یکنوا باشد، حتماً یک ریشه دارد) (توجه کنید که هر معادلهٔ از درجهٔ فرد، در R دست کم یک ریشه دارد)، اکنون به کمک قضیه‌ی رول و به روش برهان خلف، ثابت می‌کنیم f دقیقاً یک ریشه دارد، لذا فرض می‌کنیم f دارای دو ریشهٔ متمایز x_1 و x_2، $x_1 < x_2$ باشد یعنی: $f(x_1) = f(x_2) = 0$ (فرض خلف) چون شرایط قضیهٔ رول در فاصلهٔ $[x_1,x_2]$ برقرار است لذا عددی مانند $x_1 < c < x_2$ وجود دارد بطوریکه $f'(c) = 0$ یعنی c یک ریشهٔ معادلهٔ $f'(x) = 0$ است که این امکان ندارد زیرا: $f'(x) = (2x + 1)x^{2n} + a$ همواره مثبت بوده و اصلاً ریشه ندارد.

مثال: ثابت کنید معادلهٔ $f(x) = 2x^3 + x^2 + 5x - 4 = 0$ دقیقاً یک ریشه دارد؟

حل: ابتدا به کمک قضیه‌ی بولتزانو ثابت می‌کنیم معادله‌ی فوق حداقل یک ریشه دارد، سپس به کمک قضیه‌ی رول ثابت می‌کنیم که بیشتر از یک ریشه ندارد، برای این منظور گوئیم چون $f(0) = -4$ و $f(1) = 4$ و f در بازه‌ی $[0,1]$ پیوسته است لذا طبق قضیه‌ی بولتزانو f در بازه‌ی $[0,1]$ حداقل یک ریشه دارد، حال نوبت به قضیه‌ی رول است که رُل خود را بازی کند. بنابراین فرض می‌کنیم f در بازه‌ی $[0,1]$ بیش از یک ریشه، مثلاً دو ریشه داشته باشد یکی x_1 و دیگری x_2 و $x_1 < x_2$، طبق قضیه ی رول، f' بایستی حداقل یک ریشه بین ۰ و ۱ داشته باشد، اما:

$$f'(x) = 6x^2 + 2x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta' = 1 - 30 = -29 < 0$$

و این تناقض است.

یکی از مهمترین نتایج قضیهٔ رول، قضیهٔ مقدار میانگین (قضیهٔ لاگرانژ) است.

قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقات: فرض می‌کنیم تابع f

۱) روی فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد.

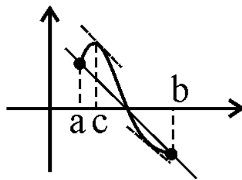
۲) روی فاصلهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد.

در این صورت عددی مانند c، $a < c < b$، وجود دارد که

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad \text{یا} \quad f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

توجه کنید که $f'(c)$ شیب خط مماس در نقطهٔ $\begin{vmatrix} c \\ f(c) \end{vmatrix}$ است و $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$ شیب خط قاطعی است که از نقاط $A\begin{vmatrix} a \\ f(a) \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} b \\ f(b) \end{vmatrix}$ می‌گذرد.

نعبیر هندسی قضیهٔ مقدار میانگین: این قضیه بیانگر آنستکه که دست کم یک نقطه مانند $a < c < b$ هست که خط مماس در آن نقطه موازی خطی است که از نقاط $A\begin{vmatrix} a \\ f(a) \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} b \\ f(b) \end{vmatrix}$ می‌گذرد.



مثال: تابع به معادلهٔ $f(x)=\frac{۲x}{x^۲+۱}$ را در بازهٔ $[۰,۲]$ در نظر بگیرید. نقطه‌ای به طول (c) $۰ < c < ۲$ با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین بیابید؟

$$f'(x)=\frac{۲(x^۲+۱)-۲x(۲x)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۲-۲x^۲}{(x^۲+۱)^۲} \qquad ,D_y=R$$

واضح است که f شرایط قضیهٔ مقدار میانگین را در $[۰,۲]$ دارد لذا:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad \Rightarrow \frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰}=\frac{۲-۲c^۲}{c^۲+۱} \quad \Rightarrow \frac{۴}{۵}=\frac{۴(۱-c^۲)}{۱+c^۲}$$

$$۱+c^۲=۵-۵c^۲ \quad \Rightarrow c=\pm\frac{۲\sqrt{۶}}{۶}=\pm\frac{\sqrt{۶}}{۳} \quad \overset{۰<c<۲}{\Rightarrow} \quad c=\frac{\sqrt{۶}}{۳} \text{ قابل قبول}$$

مثال: درستی نامساوی زیر را ثابت کنید؟

$$\frac{b-a}{\sqrt{۱-a^۲}} \le |\text{Arcsinb}-\text{Arcsina}| \le \frac{b-a}{\sqrt{۱-b^۲}} \qquad ,(۰<a<b<۱)$$

حل: فرض می‌کنیم:

$f(x) = \text{Arcsinx}$

$۱)\ f: [a,b] \xrightarrow{\text{پیوسته}} R$

$۲)\ f: (a,b) \xrightarrow{\text{مشتق‌پذیر}} R \qquad f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$

طبق قضیهٔ مقدار میانگین

$\Rightarrow \exists c \quad : a<c<b \qquad : f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

$$\text{Arcsinb}-\text{Arcsina}=\frac{۱}{\sqrt{۱-c^۲}}(b-a) \quad \Rightarrow \frac{\text{Arcsinb}-\text{Arcsina}}{b-a}=\frac{۱}{\sqrt{۱-c^۲}} \quad (۱)$$

حال چون $b < c < a < ۰$ لذا $b > c^۲ > a^۲$ و در نتیجه:

$$-b^۲ < -c^۲ < -a^۲ \Rightarrow ۱-b^۲ < ۱-c^۲ < ۱-c^۲ < ۱-a^۲ \Rightarrow \sqrt{۱-b^۲} < \sqrt{۱-c^۲} < \sqrt{۱-a^۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۱-a^۲}} < \frac{۱}{\sqrt{۱-c^۲}} < \frac{۱}{\sqrt{۱-b^۲}} \qquad (۲)$$

$$\overset{(۱),(۲)}{\Rightarrow} \quad \frac{۱}{\sqrt{۱-a^۲}} < \frac{\text{Arcsinb} - \text{Arcsina}}{b-a} < \frac{۱}{\sqrt{۱-b^۲}}$$

$$\frac{b-a}{\sqrt{۱-a^۲}} < \text{Arcsinb} - \text{Arcsina} < \frac{b-a}{\sqrt{۱-b^۲}}$$

مثال: ثابت کنید $۰ < \text{Arctan}\,۰/۲ < \frac{۱}{۵}$

حل: فرض می‌کنیم.

$f(x) = \text{Arctanx}$

$۱)\ f: [۰,۰/۲] \overset{\text{پیوسته}}{\rightarrow} R$

$۲)\ f: (۰,۰/۲) \overset{\text{مشتق‌پذیر}}{\rightarrow} R \quad f'(x) = \frac{۱}{۱+x^۲}$

طبق قضیهٔ مقدار میانگین -----------------

$$\Rightarrow \exists c: ۰ < c < ۰/۲ \quad : f(۰/۲) - f(۰) = \frac{۱}{۱+c^۲}(۰/۲ - ۰)$$

چون $۱ \le \frac{۱}{۱+c^۲} > ۰$ لذا:

$$۰ < \text{Arctan}\,۰/۲ - \text{Arctan}\,۰ = \frac{۰/۲}{۱+c^۲} \le ۰/۲$$

$$۰ < \text{Arctan}\ ۰/۲ < ۰/۲$$

تمرین: به کمک قضیهٔ مقدار میانگین می‌توان ثابت کرد.

الف) $|\sin b - \sin a| \le |b-a| \qquad ,(\forall a,b \in R)$

ب) $|\text{Arctanb} - \text{Arctana}| \le |b-a|$

ج) $\frac{۱}{n+۱} < \text{Ln}\frac{n+۱}{n} < \frac{۱}{n} \qquad ,(n \in N)$

د) $\frac{b-a}{b} < \text{Ln}\frac{a}{b} < \frac{b-a}{a} \qquad ,(a < b)$

هـ) $\frac{b-a}{b^۲+۱} < \text{Arctanb} - \text{Arctana} < \frac{b-a}{a^۲+۱} \qquad ,(۰ < a < b)$

و) $\frac{b-a}{\cos^۲ a} \le \tan b - \tan a \le \frac{b-a}{\cos^۲ b} \qquad ,(۰ < a < b < \frac{\pi}{۲})$

قضیه: هرگاه تابع f چنان باشد که به ازاء هر x در بازهٔ I، $f'(x) = ۰$ باشد آنگاه، f در بازهٔ I ثابت است.

مثال: ثابت کنید: $\text{Arcsinx} + \text{Arccosx} = \frac{\pi}{۲} \ (\forall x \in [-۱,۱])$

حل: فرض می‌کنیم $f(x) = \text{Arcsinx} + \text{Arccosx}$، می‌دانیم f در $[-۱,۱]$ پیوسته و در $(-۱,۱)$ مشتق‌پذیر است. حال چون

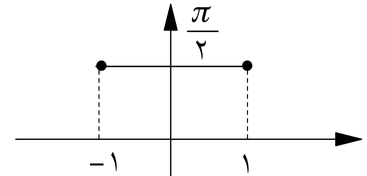
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

لذا f(x) تابعی ثابت است یعنی عددی حقیقی مانند k هست که: $\exists x \in [-1, 1] \quad : f(x) = k$

چون f در [۱,۱−] ثابت است لذا عرض تمامی نقاط این بازه با یکدیگر برابر است، بنابراین به ازای $x = 0$ داریم.

$$x = 0 \quad \Rightarrow f(0) = \text{Arcsin}\,0 + \text{Arccos}\,0 = k \quad \Rightarrow 0 + \frac{\pi}{2} = k \quad \Rightarrow k = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Arcsin}x + \text{Arccos}x = k$$



نمودار تابع $f(x) = \text{Arcsin}x + \text{Arccos}x$ خطی است افقی به معادله‌ی $y = \frac{\pi}{2}$ با دامنه‌ی $-1 \le x \le 1$ (شکل فوق)

نکته: اگر برای دو تابع مشتق‌پذیر f(x) و g(x) روی بازهٔ I داشته باشیم: $f'(x) = g'(x)$، آنگاه $f(x) = g(x) + k$

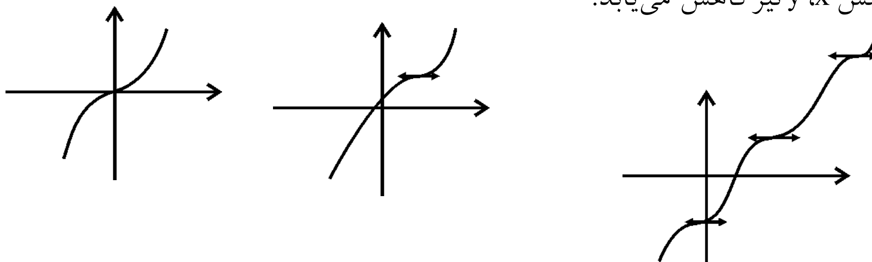
کاربرد قضیهٔ مقدار میانگین:

در این قسمت به یکی از کاربردهای مهم قضیهٔ مقدار میانگین که ارتباط بین صعودی و نزولی بودن تابع و مشتق آن می‌باشد می‌پردازیم.

تعریف: تابع f را روی بازهٔ I اکیداً صعودی گوئیم، هرگاه: $\forall x_1, x_2 \in I \quad : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

یعنی با افزایش x ، y نیز افزایش و با کاهش x، y نیز کاهش می‌یابد.

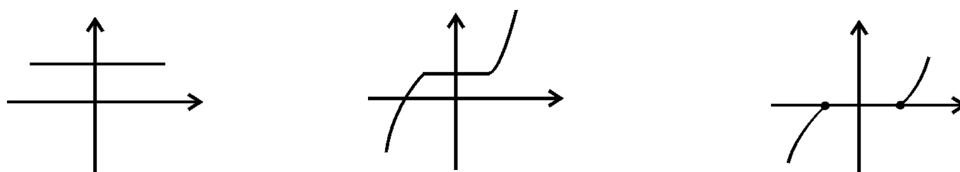
به شکلهای زیر توجه کنید:





تعریف: تابع f را روی بازهٔ I، صعودی گوئیم هرگاه: $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

به شکل‌های زیر توجه کنید:

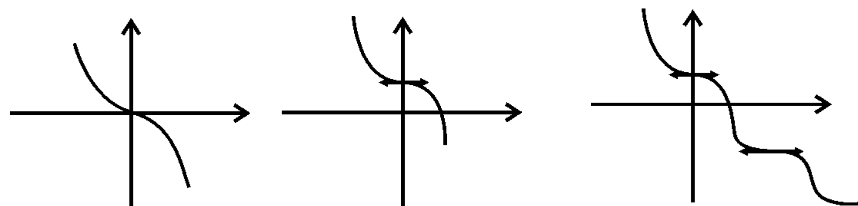


نکته: هر تابع اکیداً صعودی، صعودی نیز هست ولی عکس این مطلب همواه درست نیست مثال نقض: تابع ثابت

تعریف: تابع f را در بازه‌ی I اکیداً نزولی گوئیم هرگاه: $\forall x_1, x_2 \in I \quad : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

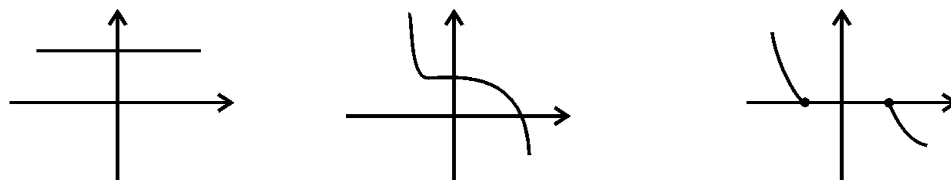
یعنی با افزایش x، y کاهش یابد و بالعکس.

به شکلهای زیر توجه کنید.





تعریف: تابع f را در بازه‌ی I نزولی گوئیم هرگاه: $\forall x_1, x_2 \in I \quad : x_1 < x_2 \quad \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$



نکته‌ی مهم: هر تابع اکیداً نزولی، نزولی نیز هست ولی عکس این مطلب همواره درست نیست مثال نقض: تابع ثابت.

مثال: هرگاه تابع $f = \{(-۲,۷), (۱,۳), (۰,m), (-۱,۵)\}$ **اکیداً نزولی باشد، حدود** m را بیابید؟

$-۱ < ۰ < ۱ \quad \Rightarrow f(۱) < f(۰) < f(-۱) \quad \Rightarrow ۳ < m < ۵$

تعریف تابع یکنوا: اگر تابعی روی یک بازه مانند I صعودی یا نزولی باشد، می‌گویند آن تابع روی آن فاصله یکنواست.

قضیه: فرض می‌کنیم تابع f بر بازهٔ [a,b] پیوسته و بر بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد، در این صورت:

الف) اگر به ازاء هر x در (a,b)، $f'(x) \geq ۰$ باشد، آنگاه f بر [a,b] صعودی است.

ب) اگر به ازاء هر x در (a,b)، $f'(x) \leq ۰$ باشد، آنگاه f بر [a,b] نزولی است.

مثال: صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را تعیین کنید؟

$۱)\ y = \sin x - x \ \Rightarrow \ y' = \cos x - ۱ \leq ۰ \Rightarrow$ نزولی

$۲)\ y = \sqrt{x-۳} + \sqrt{x-۵} \quad \Rightarrow y' = \frac{۱}{۲\sqrt{x-۳}} + \frac{۱}{۲\sqrt{x-۵}} \geq ۰$ صعودی

$D_f = [۵, +\infty)$

نکاتی مهم در مورد صعودی و نزولی بودن توابع:

۱ـ هرگاه f و g توابعی اکیداً صعودی و پیوسته باشند آنگاه از میان توابع $f \pm g$ و fg و $\frac{f}{g}$، فقط تابع $f + g$ اکیداً صعودی خواهند بود. زیرا: $(f + g)' = f' + g' > 0$

۲ـ هرگاه f و g توابع اکیداً صعودی و پیوسته و مثبت باشند آنگاه $f \times g$ نیز اکیداً صعودی خواهد بود.

۳ـ جهت تغییرات f و $-f$ خلاف یکدیگر است یعنی هرگاه f اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) باشد، $-f$، اکیداً نزولی (اکیداً صعودی) خواهد بود.

۴ـ جهت تغییرات f و $\frac{1}{f}$ نیز خلاف یکدیگر است.

۵ـ جهت تغییرات f و f^{-1} یکسان است، یعنی هرگاه f صعودی باشد، f^{-1} نیز صعودی است و هرگاه f نزولی باشد f^{-1} نیز نزولی است و بالعکس.

۶ـ تابع ثابت $y = c$ هم صعودی است و هم نزولی ولی اکیداً صعودی و اکیداً نزولی نیست.

۷ـ تابعی که دارای محور تقارن $x = a$ باشد، در دامنه‌ی خود یکنوا نخواهد بود.

۸ـ تابع متناوب در دامنه‌ی خود، یکنوا نیست.

۹ـ هرگاه f تابعی اکیداً صعودی، پیوسته و مشتق‌پذیر باشد، آنگاه معادله‌ی $f(x) = 0$ تنها یک ریشه دارد.

۱۰ـ جهت تغییرات f و توابع a^f $(a > 1)$، $Arctan f, Arcsin f$ ، $\log_a^f$ $(a > 1)$ یکسان است.

۱۱ـ جهت تغییرات f و توابع a^f $(0 < a < 1)$، $Arccot f, Arccos f$ ، $\log_a^f$ $(0 < a < 1)$ خلاف یکدیگر است.

۱۲ـ در تعیین صعودی و نزولی بودن توابع مرکب (fog) کافی است علامتهای مشتق را در هم ضرب کنیم.

مثال: هرگاه f اکیداً نزولی و g اکیداً صعودی باشد، تابع $(fogof^{-1})$ چگونه است؟

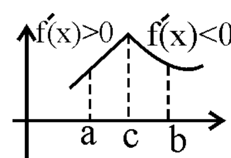
$(fogof^{-1})' = (-)(+)(-) > 0 \Rightarrow$ اکیداً صعودی است

اکنون قضایایی را بیان می‌کنیم که به کمک آنها می‌توانیم اکسترممهای نسبی یک تابع را در صورت وجود بیابیم.

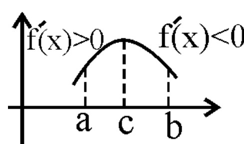
قضیهٔ آزمون مشتق اول برای تعیین اکسترممهای نسبی:

اگر تابع f در همهٔ نقاط بازهٔ (a,b) شامل عدد c پیوسته و f' به ازاء همهٔ نقاط (a,b) جز احتمالاً در c موجود باشد. آنگاه:

الف) اگر $f'(x)$ در بازهٔ (a,c) مثبت و در بازهٔ (c,b) منفی باشد، به عبارت دیگر f' در c تغییر علامتی از مثبت به منفی داشته باشد آنگاه f در c، Max نسبی دارد.



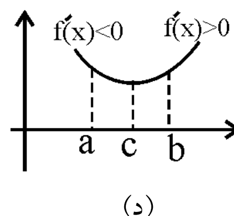
(ب)



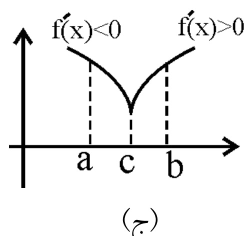
(الف)

در شکل (الف)، f در c مشتق‌پذیر است و در شکل (ب)، f در c مشتق‌پذیر نیست.

ب) اگر $f'(x)$ در بازهٔ (a,c) منفی و در بازهٔ (c,b) مثبت باشد، به عبارت دیگر، f' در c تغییر علامتی از منفی به مثبت داشته باشد، آنگاه f در c، Min نسبی دارد.



(د)



(ج)

در شکل (ج)، f در c مشتق‌پذیر نیست و در شکل (د)، f در c مشتق‌پذیر است.

تذکر مهم: لزومی ندارد که تابع در نقاط اکسترمم نسبی، مشتق‌پذیر باشد، حتی ممکن است، مشتق تابعی در یک نقطه صفر شود ولی تابع در آن نقطه Max یا Min نسبی نداشته باشد، زیر در نقاط Max یا Min نسبی، مشتق حتماً بایستی تغییر علامت دهد.

مثال: نقطه یا نقاط اکسترمم نسبی تابع $y = (x+1)^7$ را در صورت وجود بیابید؟

$$y' = 7(x+1)^6 = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

می‌بینیم با وجود اینکه، مشتق تابع در $x=-1$، صفر شده، ولی تابع در $x=-1$ اکسترمم نسبی ندارد، زیرا مشتق در این نقطه تغییر علامت نداده است.

مثال: با استفاده از قضیه‌ی آزمون مشتق اول، اکسترممهای نسبی توابع زیر را بیابید؟

۱) $y = 3x^5 - 15x^3 \Rightarrow y' = 15x^4 - 45x^2 = 0 \Rightarrow 15x^2(x^2-3) = 0$

$\Rightarrow x = 0 \quad , \pm\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$+\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$18\sqrt{3}$	↘	0	↘	$-18\sqrt{3}$	↗	$+\infty$
			Max نسبی				Min نسبی		

۲) $y = (x-1)x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y' = x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)$

$y' = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{3x-2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$, $x = 0$ نقاط بحرانی

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		+	موجود نیست	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$	↗	$+\infty$
			Max نسبی		Min نسبی		

تقعر و تحدّب یک منحنی:

منظور از تقعر یعنی گودی و منظور از تحدّب یعنی برآمدگی

الف) تقعر به سمت بالا یا به سمت yهای مثبت: هرگاه در یک تابع، با حرکت از چپ به راست، ضریب زاویه‌ی خطوط مماس افزایش یابد، آنگاه تابع f' تابعی صعودی بوده، لذا مشتق آن (f'') مثبت بوده و خطوط مماس همواره زیر نمودار خواهند بود در این حالت می‌گویند تقعر منحنی (گودی منحنی) به سمت بالا یا به سمت yهای مثبت است.



$\begin{cases} f' < 0 \\ f'' > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} f' > 0 \\ f'' > 0 \end{cases}$

ب) تقعر به سمت پائین یا به سمت yهای منفی: هرگاه در یک تابع با حرکت از چپ به راست، ضریب زاویه خطوط مماس کاهش یابد، آنگاه تابع f' تابعی نزولی بوده لذا مشتق آن (f'') منفی بوده و خطوط مماس همواره بالای نمودار خواهند بود، در این حالت می‌گویند، تقعر منحنی به سمت پائین یا به سمت yهای منفی است.



$\begin{cases} f' < 0 \\ f'' < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f' > 0 \\ f'' < 0 \end{cases}$

تست: کدام نمودار در شرایط $f' < 0$ و $f'' < 0$ صدق کند؟

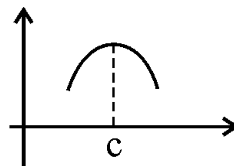


حل: گزینه‌ی صحیح، گزینه‌ی (۳) می‌باشد.

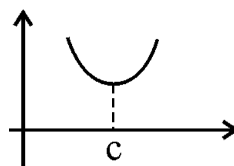
نکته: برای تعیین جهت تقعر یک منحنی، مشتق دوم تابع را تعیین علامت کرده، در هر فاصله که $f'' > 0$ باشد، تقعر منحنی به سمت بالا و در هر فاصله که $f'' < 0$ باشد، تقعر منحنی به سمت پائین است.

قضیه‌ی آزمون مشتق دوم برای تعیین اکسترممهای نسبی یک تابع: فرض می‌کنیم c یک نقطه‌ی بحرانی تابع f باشد به طوریکه $f'(c) = 0$ و f' به ازاء همه‌ی xهای بازه‌ی بازی شامل c، موجود باشد، اگر $f''(c)$ موجود باشد، آنگاه:

الف) هرگاه $f''(c) < 0$ باشد، آنگاه تقعر منحنی به سمت پائین بوده و لذا f در c، Max نسبی دارد.



ب) هرگاه $f''(c) > 0$ باشد، آنگاه تقعر منحنی به سمت بالا بوده و لذا f در c، Min نسبی دارد.



ج) اگر $f''(c) = 0$ باشد، آنگاه این آزمون بی‌فایده است یعنی در این حالت، نمی‌توان اظهار نظر کرد که f در Max,c نسبی دارد یا Min نسبی.

بنابراین برای یافتم اکسترممهای نسبی یک تابع مشتق‌پذیر، کافی است ریشه‌های مشتق اول تابع را در مشتق دوم قرار داده، سپس از بندهای (الف) و (ب) قضیه‌ی فوق استفاده کنیم.

مثال: با استفاده از قضیه‌ی آزمون مشتق دوم، اکسترممهای نسبی تابع $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$ را بیابید؟

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x$$

$$f''(0) = 0$$

$f''(3) = 108 - 72 = 36 > 0 \Rightarrow$ f در $x = 3$، Min نسبی دارد،

و مقدارش برابر $f(3) = 81 - 108 + 1 = -26$ می‌باشد.

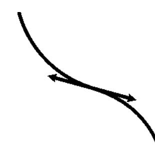
تذکر: هنگامی که f در نقطه‌ی a پیوسته نباشد، دو آزمون فوق، نتیجه‌ی قطعی نمی‌دهند، در این حالت برای تشخیص Max نسبی از Min نسبی، یا باید نمودار تابع را رسم کرد و یا f(c) را تعیین نموده و با عرض نقاط همسایگی‌اش مقایسه کنیم، چنانچه f(c) بزرگتر از f(x)های مجاورش باشد، $x = c$ طول Max نسبی خواهد بود و چنانچه f(c) کوچکتر از f(x)های مجاورش باشد، $x = c$ طول Min نسبی خواهد بود.

تعریف نقطه‌ی عطف: نقطه‌ی $x = c$ را نقطه‌ی عطف تابع $y = f(x)$ گویند هرگاه:

۱ـ f در c پیوسته باشد.

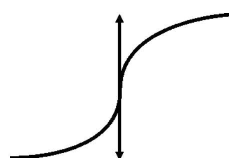
۲ـ f در c دارای مماس باشد حتی مماس قائم، (به عبارت دیگر f در c، مشتق متناهی یا نامتناهی داشته باشد) نگفتیم مشتق‌پذیر باشد.

۳ـ جهت تقعر منحنی در c، عوض شود(به عبارت دیگر مشتق دوم تابع در c تغییر علامت دهد شکلهای زیر، بعضی از حالات نقطه‌ی عطف را نشان می‌دهند.



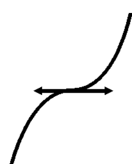
$f'(c) \neq 0$

(۳)



$f'(c) = +\infty$

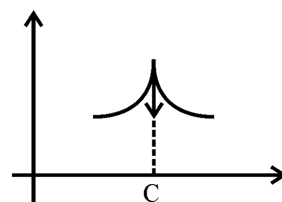
(۲)



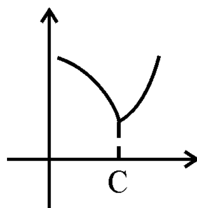
$f'(c) = 0$

(۱)

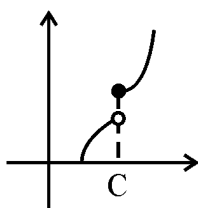
توجه کنید که در سه شکل زیر، c نمی‌تواند طول عطف باشد.



جهت تقعر f در c عوض نشده است.



f در c دارای مماس نیست.



f در $x = c$ پیوسته نیست.

چند نکته‌ی مهم:

۱ـ در نقطه‌ی عطف لزومی ندارد که تابع مشتق‌پذیر باشد. (شکل شماره‌ی (۲) بالا)

۲ـ در نقطه‌ی عطف، لزومی ندارد که مشتق دوم تابع حتماً صفر باشد، چراکه ممکن است تابع اصلاً مشتق دوم نداشته باشد. (شکل شماره‌ی (۲) بالا)

۳ـ نقطه‌ی عطف یک تابع می‌تواند نقطه‌ی بحرانی آن تابع نباشد. شکل شماره‌ی (۳) بالا)

۴ـ ***قضیه:*** فرض می‌کنیم f روی یک همسایگی نقطه‌ی $x = c$ مشتق‌پذیر باشد و نقطه‌ی $(c, f(c))$ یک نقطه‌ی عطف نمودار تابع f باشد، در این صورت اگر $f''(c)$ موجود باشد، آنگاه حتماً حتمنی $f''(c) = ۰$ است، به بیان ساده‌تر، در نقطه‌ی عطف، مشتق دوم تابع در صورت وجود، حتماً صفر است.

عکس قضیه‌ی فوق در حالت کلی برقرار نمی‌باشد، یعنی ممکن است $f''(c) = ۰$ باشد، امّا نقطه‌ی به طول c، نقطه‌ی عطف نباشد. در این حالت y'' در c، تغییر علامت نداده و این نقطه را نقطه‌ی مِپلَة یا مپلا (me plat) تابع گویند.

مثال: مطلوبست جهت تقعر و تعیین نقطه‌ی عطف تابع (در صورت وجود) $y = x^۴ + ۵x + ۱۱$

$y = x^۴ + ۵x + ۱۱$

$y' = ۴x^۳ + ۵$

$y'' = ۱۲x^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۰$

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
y''	+	۰	+
جهت تقعر	∪	۱۱	∪

در این حالت نقطه‌ی $\left|\begin{matrix}۰\\۱۱\end{matrix}\right.$ نقطه‌ی عطف نبوده چون مشتق دوم تابع تغییر علامت نداده است و نقطه‌ی مپلة تابع می‌باشد.

۵ـ در نقطه‌ی عطف، مشتق اول تابع می‌تواند صفر باشد یا مخالف صفر و یا حتی موجود نباشد (∞ باشد)

۶ـ در نقطه‌ی عطف، مماس بر منحنی از روی منحنی عبور می‌کند، زیرا در قسمتی که تقعر رو به بالاست، خط مماس زیر منحنی و در قسمتی که تقعر رو به پائین است خط مماس بالای منحنی است، پس قسمتی از مماس، زیر منحنی و قسمت دیگر آن بالای منحنی است.

تست: در تابع $y = -x^۳ + ax^۲ + ۳$، در نقطه‌ی $x = ۲$، مماس بر منحنی از منحنی عبور کرده است، a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۳- ۴) ۶-

$y' = -۳x^۲ + ۲ax \Rightarrow y'' = -۶x + ۲a = ۰ \overset{x=۲}{\Rightarrow} -۱۲ + ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۶$

نکته: نقطه‌ی معمولی یا عادی: نقطه‌ای است که مختصاتش فقط در معادله‌ی خود تابع صدق می‌کند.

نکته: مختصات نقاط Max و Min نسبی هر تابع:

الف) اولاً در معادله‌ی خود تابع صدق می‌کنند.

ب) ثانیاً در معادله‌ی $y'=0$ نیز صدق می‌کنند (البته به شرط اینکه تابع در این نقاط مشتق‌پذیر باشد)

تست: تابع $f(x)=-x^2+bx+c$ مفروض است، هرگاه f در نقطه‌ای به طول (۱-) دارای ماکزیممی نسبی برابر (۲) باشد (به عبارت دیگر نقطه‌ی (۲ و ۱-) نقطه‌ی Max نسبی، تابع باشد)، $b+c$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۰ ۴) ۲

$$\left.\begin{array}{l} A\left|\begin{array}{l}-1\\2\end{array}\right. \quad \text{در خود تابع} \Rightarrow 2=-1-b+c \Rightarrow -b+c=3 \\ y'=-2x+b=0 \overset{x=-1}{\Rightarrow} 2+b=0 \Rightarrow b=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow c=1 \Rightarrow b+c=-1$$

۷ـ مختصات نقطه‌ی عطف هر تابع

الف) اولاً در معادله‌ی خود تابع صدق می‌کند.

ب) ثانیاً در معادله‌ی $y''=0$ نیز صدق می‌کند (البته به شرط اینکه تابع در این نقطه، مشتق دوم داشته باشد)

تست: تابع $y=x^3+ax^2+bx+c$ مفروض است، هرگاه نقطه‌ی $A\left|\begin{array}{l}-1\\1\end{array}\right.$ نقطه‌ی عطف تابع بوده و منحنی تابع، محور عرضها را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع کند، $a+b-c$ کدام است:

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۱ ۴) ۴

$$A\left|\begin{array}{l}-1\\1\end{array}\right. \quad \text{در خود تابع} \Rightarrow 1=-1+a-b+c \Rightarrow a-b+c=2$$

$$y'=3x^2+2ax+b$$

$$y''=6x+2a=0 \overset{x=-1}{\Rightarrow} -6+2a=0 \Rightarrow a=3$$

$$B\left|\begin{array}{l}0\\2\end{array}\right. \quad \text{در خود تابع} \Rightarrow 2=0+0+c \Rightarrow c=2 \Rightarrow b=3 \Rightarrow a+b-c=4$$

نکته: هرگاه تابعی دارای عامل ضربی $(x-a)^{2n}$ باشد $(n\in N)$ (یعنی $x=a$ ریشه‌ی مکرّر زوج تابع باشد)، آنگاه $x=a$ طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع خواهد بود، برای تشخیص Max و Min بودن $f(a)$، a را در بقیه‌ی تابع (غیراز $(x-a)^{2n}$) قرار داده، اگر حاصل مثبت شد، $x=a$، طول نقطه‌ی Min و اگر منفی شد، $x=a$ طول نقطه‌ی Max خواهد بود، ضمناً به ازاء $n>1$، $x=a$، طول نقطه‌ی $m\hat{e}plat$ (مپلة) تابع نیز می‌باشد.

نتیجه: در توابع به صورت $f(x)=(x-a)^{2n}(x-b)$ $(n\in N)$، $x=a$ طول اکسترممم نسبی است، ضمناً:

الف) اگر $a-b>0$ باشد، $x=a$ طول Min نسبی است.

ب) اگر $a-b<0$ باشد، $x=a$ طول Max نسبی است.

مثال: در تابع $y=(x+2)^4(x-1)$، $x=-2$ طول چه نقطه‌ایست؟

$x=-۲$ ریشه‌ی مکرر زوج از مرتبه‌ی ۴، $x-۱=-۲-۱<\circ \Rightarrow$ نسبی است $\Rightarrow$ طول Max، $x=-۲$

مثال: در تابع $y=\dfrac{x^۲(۲x+۵)}{(x+۱)^۳}$**، $x=\circ$ طول چه نقطه‌ایست؟**

$x=\circ$ ریشه‌ی مکرر زوج از مرتبه‌ی ۲، $\Rightarrow \dfrac{۲x+۵}{(x+۱)^۳}=\dfrac{\circ+۵}{۱}>\circ \Rightarrow$ نسبی است $\Rightarrow$ طول Min، $x=\circ$

نکته: تابع $y=k+(x-a)^{۲n}$ $(n\in N)$،

الف) با شرط $a>\circ$، دارای می‌نیممی برابر k است که $x=a$ طول آن است.

ب) با شرط $a<\circ$، دارای ماکزیممی برابر k است که $x=a$ طول آن است.

نکته: هرگاه تابعی دارای عامل ضربی $(x-a)^{۲n+۱}$ باشد $(n\in N)$ (یعنی $x=a$ ریشه‌ی مکرر فرد تابع باشد)، آنگاه $x=a$، طول نقطه‌ی عطف تابع خواهد بود.

نتیجه: در توابع $y=(x-a)^{۲n+۱}$، $y=(x-a)^{۲n+۱}(x-b)$، $y=(x-a)^{۲n+۱}+ax+b$، $x=a\ (n\in N)$ طول نقطه‌ی عطف تابع است.

مثال: در تابع $y=\dfrac{(x^۲-۴)(x-۲)^۸}{(۳x+۱)^۲}$**، $x=۲$ طول چه نقطه‌ایست؟**

$y=\dfrac{(x+۲)(x-۲)^۹}{(۳x+۱)^۲}\Rightarrow$ ریشه‌ی مکرر فرد از مرتبه‌ی ۹، $x=۲ \Rightarrow$ طول نقطه‌ی عطف تابع است. $x=۲$

نتیجه‌گیری: ریشه‌های از مرتبه‌ی زوج تابع، طول نقاط اکسترمم و مپله، و ریشه‌های از مرتبه‌ی فرد تابع، طول نقطه‌ی عطف می‌باشند.

نکته: ریشه‌های از مرتبه‌ی زوج $y'=\circ$، طول نقطه‌ی عطف و ریشه‌های از مرتبه‌ی فرد و ساده‌ی $y'=\circ$، طول نقاط اکسترمم نسبی می‌باشند و نوع اکسترمم، با تعیین علامت مشتق مشخص می‌شود.

مثال: هرگاه $y'=x(x+۲)^۳(x-۲)^۴$، $x=\circ$ و $x=-۲$ طول نقاط اکسترمم و $x=۲$ طول نقطه‌ی عطف می‌باشند.

تذکر: به تعداد ریشه‌های مشتق (ساده یا مضاعف) می‌توان برمنحنی، مماس موازی محور xها (مماس افقی) رسم کرد (زیرا مشتق همان شیب خط مماس است و هر خط موازی محور طولها، شیب صفر دارد)

تست: در چند نقطه از منحنی $y=۳x^۵-۱۵x^۳$، مماس بر منحنی افقی است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

$y'=\circ \Rightarrow ۱۵x^۴-۴۵x^۲=\circ \Rightarrow ۱۵x^۲(x^۲-۳)=\circ \Rightarrow x=\circ\ ,\ \pm\sqrt{۳}\Rightarrow$ ۳ نقطه

نکته: ریشه‌های از مرتبه‌ی زوج $y''=\circ$، طول نقطه‌ی مپله و ریشه‌ی ساده و ریشه‌های از مرتبه‌ی فرد $y''=\circ$، طول نقطه‌ی عطف می‌باشند. (البته در نقطه‌ی عطف، بخاطر بیاورید که لزومی نداشت که $y''=\circ$ باشد)

***یادآوری:* ریشه‌ی ساده و ریشه‌ی مکرر زوج و فرد:**

تابع $y=x^۲(x+۱)(x-۳)^۵$ را در نظر بگیرید، این تابع سه ریشه دارد که عبارتند از: ۰ و ۱− و ۳، ریشه‌ی $x=-۱$ را که

توان ندارد، ریشه‌ی ساده می‌گویند و ریشه‌های $x = 0$ و $x = 2$ را که دارای توان هستند ریشه‌ی مکرر می‌گویند، $x = 0$ را ریشه‌ی مکرر زوج از مرتبه‌ی ۲ و $x = 3$ را ریشه‌ی مکرر فرد از مرتبه‌ی ۵ می‌گویند.

تعیین علامت سرعتی:

عبارت $p = x^2(x+1)(x-3)^5$ را تعیین علامت کنید.

روش معمولی: $p = 0 \Rightarrow x = 0, -1, 3$

x	$-\infty$	-1		0		3		$+\infty$
x^2	+		+		+		+	
$x+1$	−		+		+		+	
$(x-3)^5$	−		−		−		+	
p	+		−		−		+	

روش سرعتی: در این روش، علامت p را مستقیماً به صورت زیر به دست می‌آوریم، علامت خانه‌ی آخر را باقرار دادن یک عدد به دست آورده، سپس با توجه به دو نکته‌ی ساده‌ی زیر، علامت خانه‌های دیگر را می‌یابیم.

۱ـ به ریشه‌ی ساده یا مکرر فرد که رسیدیم، علامت را عوض می‌کنیم.

۲ـ به ریشه‌ی مکرّر زوج که رسیدیم، علامت را عوض نمی‌کنیم.

x	$-\infty$		-1 (ساده)		0 (زوج)		3 (فرد)		$+\infty$
p		+	0	−	0	−	0	+	

نکته‌ی بسیار مهم:

$y = 0 \Rightarrow$
- نقطه‌ی معمولی یا عادی ← ریشه‌ی ساده
- طول عطف ← ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی فرد
- نوع اکسترمم با قرار دادن این ریشه در بقیه‌ی تابع مشخص می‌شود. ← طول اکسترمم ← ریشه مکرر مرتبه‌ی زوج

$y' = 0 \Rightarrow$
- طول عطف ← ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی زوج
- نوع اکسترمم، باتعیین علامت مشتق مشخص می‌شود ← طول اکسترمم ← ریشه‌ی ساده و ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی فرد

$y'' = 0 \Rightarrow$
- طول عطف ← ریشه‌ی ساده و ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی فرد
- طول meplat ← ریشه‌ی مکرر مرتبه‌ی زوج

مثال: در تابع $y = x(x+1)^5(x-2)^2$، $x = 0$ و $x = -1$ به ترتیب طول چه نقاطی هستند؟

حل: $x = 0$ نقطه‌ی عادی است، $x = -1$ طول عطف است و $x = 2$ طول اکسترمم نسبی است.

$2(2+1)^5 > 0 \Rightarrow$ طول Min نسبی است. $x = 2$

مثال: هرگاه $y' = x(x+3)^2(x-4)^5$، $x=0$ **و** $x=-3$ **و** $x=4$ **به ترتیب طول چه نقاطی می‌باشند؟**

حل: $x=0$ و $x=4$ طول اکسترمم نسبی هستند و $x=-3$ طول عطف می‌باشد.

x	$-\infty$		-3 (زوج)		0 (ساده)		4 (فرد)		$+\infty$
y'		+	0	+	0	−	0	+	
y		↗		↗		↘		↗	

Max نسبی   Min نسبی

نکته‌ی مهم: در توابع به صورت کلی:

$$\begin{cases} y=(x-a)^{2m}g(x) \\ y=|x-a|g(x) \\ y=\sqrt[2n+1]{(x-a)^{2m}}\,g(x),\ (n>m) \\ y=\sqrt[2n]{|x-a|}\,g(x) \end{cases} \Rightarrow (m,n\in N)$$ ، با شرط

$g(\alpha)\neq 0$، $x=\alpha$ طول نقطه‌ی اکسترمم است، نوع اکسترمم به صورت زیر مشخص می‌شود.

الف) هرگاه $\lim_{x\to a} g(x) > 0$ باشد، $x=a$ طول نقطه‌ی Min است.

ب) هرگاه $\lim_{x\to a} g(x) < 0$ باشد، $x=a$ طول نقطه‌ی Max است.

مثال: در تابع $y=\frac{|x|}{x^2-4}$، $x=0$ **طول چه نقطه‌ایست؟**

حل: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2-4}=-\frac{1}{4}<0 \Rightarrow$ $x=0$ طول Max است.

مثال: در تابع $y=\sqrt[3]{x^2}\,(x^2-x-5)$، $x=0$ **طول چه نقطه‌ایست؟**

حل: $\lim_{x\to 0}(x^2-x-5)=-5<0 \Rightarrow$ $x=0$ طول Max است.

نکته: هرگاه تابع f دارای یک Max و یک Min نسبی باشد و نقطه‌ی عطف بتواند مرکز تقارن منحنی باشد، آنگاه نقطه‌ی عطف، وسط پاره‌خط و اصل بین نقاط Max و Min خواهد بود یعنی:

$$\begin{cases} x_{\text{عطف}}=\frac{x_{max}+x_{min}}{2} \\ y_{\text{عطف}}=\frac{y_{max}+y_{min}}{2} \end{cases}$$

به عنوان مثال در توابع درجه‌ی سوم، نقطه‌ی عطف وسط پاره‌خط و اصل بین نقاط Max و Min منحنی (در صورت وجود) است.

نکته: به طور کلی، در هر تابع پیوسته، مرکز تقارن نقطه‌ی عطفش می‌باشد (البته به شرطی که عطف داشته باشد)

تست: در تابع $y=\frac{x}{x^2+1}$، **هرگاه طول Max، (۱) باشد، طول Min چند است؟**

۱) -1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) -2

حل: چون تابع فرد است پس $\begin{vmatrix} ۰ \\ ۰ \end{vmatrix}$ مرکز تقارنش بوده و چون تابع پیوسته است این نقطه، نقطه‌ی عطفش نیز می‌باشد پس طبق نکته‌ی فوق طول Min، (-۱) است.

نکته: در تابع درجه‌ی سوم $y = ax^۳ + bx^۲ + cx + d$، مختصات نقطه‌ی عطف عبارتست از:

$$\begin{vmatrix} x = \frac{-b}{۳a} \\ y = f(\frac{-b}{۳a}) \end{vmatrix}$$

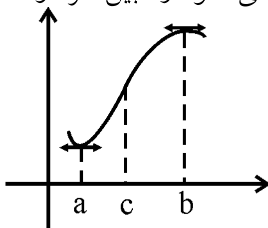
تست: مختصات نقطه‌ی عطف تابع $y = x^۳ + ۳x - ۱$ کدام است؟

۱) $(۰ \text{ و } ۰)$ ۲) $(-۱ \text{ و } ۰)$ ۳) $(-۱ \text{ و } ۱)$ ۴) $(-۱ \text{ و } -۱)$

پاسخ صحیح گزینه‌ی ۲ می‌باشد، دقت کنید که در این تابع، $b = ۰$ است.

نکته: هرگاه $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ (تابع درجه‌ی سوم) باشد آنگاه طول نقطه‌ی عطف عبارتست از: $\frac{a+b+c}{۳}$

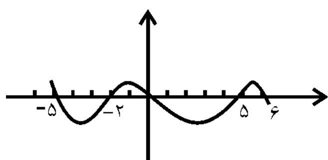
نکته: هرگاه $f'(a) = ۰$ و $f'(b) = ۰$ باشند و تابع f در بازه‌ی (a,b) مشتق دوم داشته باشد، آنگاه طبق قضیه‌ی رول $c \in (a,b)$ ای وجود دارد به طوریکه $f''(c) = ۰$، یعنی نمودار f بین هر دو مماس افقی، یک نقطه‌ی عطف دارد.



تست: تابع $y = x(x + ۲)(x^۲ - ۲۵)(۶ - x)$ دارای ... Max نسبی و ... Min نسبی و ... عطف است؟

۱) ۳ و ۲ و ۳ ۲) ۲ و ۲ و ۳ ۳) ۳ و ۱ و ۲ ۴) ۲ و ۲ و ۱

حل: تابع فوق دارای ۵ ریشه‌ی ساده است (یعنی محور xها را در ۵ نقطه قطع می‌کند) و نموداری تقریباً به صورت زیر دارد، لذا ۴ اکسترمم دارد که با توجه به نمودار تابع، ۲ ماکزیمم و ۲ Min داشته و چون بین هر دو نقطهٔ اکسترمم، یک عطف دارد، لذا ۳ عطف نیز دارد.



نکته: در توابع رادیکالی با فرجه‌ی فرد، ریشه‌ی مکرر زوج زیر رادیکال که درجه‌ی آن، از فرجه کوچکتر باشد و عامل صفر شونده در کنار خود نداشته باشد، معرف طول نقطه‌ی بازگشت می‌باشد.

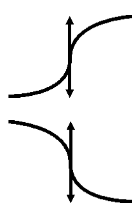
$$y = \sqrt[۲n+۱]{(x-a)^{۲m}}\ g(x) \quad ,(m,n \in N) \quad ,n > m \quad ,g(a) \neq ۰)$$

در این حالت:
الف) اگر $\lim_{x \to a} g(x) > ۰$ باشد، $x = a$ طول Min است.
ب) اگر $\lim_{x \to a} g(x) < ۰$ باشد، $x = a$ طول Max است.

نکته: در توابع رادیکالی با فرجه‌ی فرد، ریشه‌ی ساده یا مکرّر مرتبه‌ی فرد زیر رادیکال که درجه‌ی آن، از فرجه کوچکتر باشد و عامل صفر شونده در کنار خود نداشته باشد، معرف طول نقطه‌ی عطف مشتق‌ناپذیر می‌باشد.

$y = \sqrt[2n+1]{(x-a)^{2m+1}}\, g(x) \quad ,(m,n \in N) \quad ,n > m \quad ,g(a) \neq 0)$

در این حالت
الف) اگر $\lim\limits_{x \to a} g(x) > 0$ باشد، f صعودی است. ←
ب) اگر $\lim\limits_{x \to a} g(x) < 0$ باشد، f نزولی است. ←



مثال: در تابع $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$، مختصات نقاط عطف و بازگشت را بیابید؟

$x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

ریشه‌ی مضاعف ⇐ طول بازگشت $x = 0$ ⇐ $\left|\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right.$

ریشه‌ی ساده ⇐ طول عطف $x = 0$ ⇐ $\left|\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right.$

تست: بر نمودار تابع $y = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2 - 1}$، چند مماس به موازات محور yها می‌توان رسم کرد؟

۱) ۳　　۲) ۲　　۳) ۱　　۴) ۰

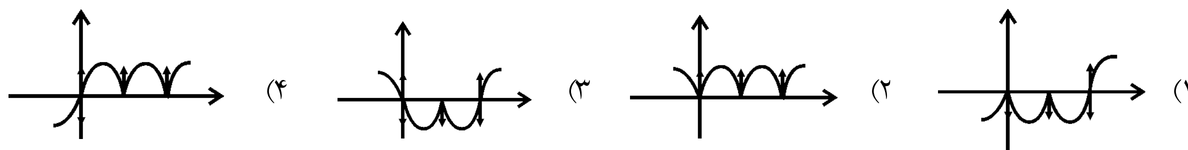
حل:
۳ مماس قائم

$D_f = R \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

$x = 0$ طول بازگشت است. ⇐ ریشه‌ی مضاعف

$x = \pm 1$ طول عطف مشتق‌ناپذیر است. ⇐ ریشه‌های ساده

تست: نمودار تابع $y = \sqrt[5]{x^2(x-1)^3(x^2 - 3x + 2)}$، شبیه کدام است؟



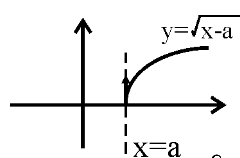
$x = 0$ ⇐ ریشه‌ی مضاعف ⇐ طول بازگشت $x = 0$ ⇐ $\lim\limits_{x \to 0} g(x) < 0$ ⇐ طول Max $x = 0$

$x = 1$ ⇐ ریشه‌ی مکرّر زوج ⇐ طول بازگشت $x = 1$ ⇐ $\lim\limits_{x \to 1} g(x) < 0$ ⇐ طول Max $x = 1$

$x = 2$ ⇐ ریشه‌ی ساده ⇐ طول عطف مشتق‌ناپذیر $x = 2$ ⇐ $\lim\limits_{x \to 2} g(x) > 0$ ⇐ f صعودی

لذا گزینه‌ی صحیح، گزینه‌ی ۱ می‌باشد.

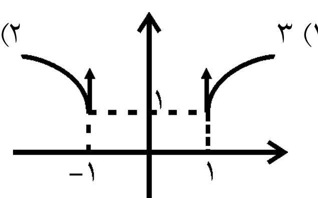
نکته: در توابع $y = \sqrt{f(x)}$، ریشه‌های ساده f(x)، طول نقطه‌ی توقف منحنی می‌باشند.



مثال: در تابع $y = \sqrt{x - a}$، $x = a$ طول نقطه‌ی توقف منحنی است.

تست: برنمودار تابع $y = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^2 - 1}$، چند مماس به موازات محور yها، می‌توان رسم کرد؟

۱) ۳　　۲) ۲　　۳) ۱　　۴) ۰



$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$x = 0 \notin D_f \Rightarrow x = \pm 1$ طول نقاط توقف ⇐ ۲ مماس قائم

نکته: مشتقات چپ و راست تابع $y = \sqrt[n]{|x - a|}$ در نقطه‌ی a، $+\infty$ و $-\infty$ بوده و a نقطه‌ی بازگشت منحنی است.

نکته: تابع $y = (x - a)|x - a|$ در $x = a$، دارای نقطه‌ی عطف است، بالاخص $x = 0$ طول نقطه‌ی عطف تابع $y = x|x|$ است.

مسائل بهینه‌سازی و کمینه‌سازی:

یکی از مهمترین کاربردهای حساب دیفرانسیل و انتگرال (و بخصوص مشتق) در مسائلی است که با تعیین مقادیر Max و Min تابع سروکار دارند. در زندگی روزمره به دفعات عبارتهائی مانند بیشترین سود، بیشترین فاصله، بیشترین مقاومت و یا کمترین هزینه، کمترین مساحت، حداقل زمان ممکن و ... را می‌بینیم یا می شنویم و یا می‌خوانیم. در زیر روش حل کلّی چنین مسائلی را مطرح می‌کنیم.

فرآیند حل مسائل بهینه سازی (روش کلی برای یافتن Max (بیشترین مقدار) و Min (کمترین مقدار) یک عبارت:

۱ـ ابتدا یک تصویر یا نمودار یا شکلی کلی از مسأله را رسم می‌کنیم.

۲ـ نمادها و حروفی را به هر یک از مقادیر داده شده و خواسته شده نسبت می‌دهیم.

۳ـ مقادیر ثابت و متغیر یا متغیرها را شناسائی می‌کنیم.

۴ـ کمیتی را که می‌خواهد Max یا Min شود، تشخیص داده و برای آن یک معادلهٔ اولیه (رابطه‌ای برحسب متغیرها) می‌نویسیم.

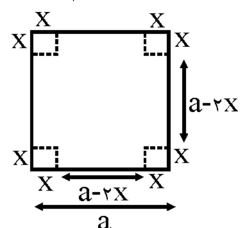
۵ـ چنانچه این معادلهٔ اولیه، تابعی از بیش از یک متغیر مستقل باشد، آن را به تابعی فقط از یک متغیر مستقل تبدیل می‌کنیم.

۶ـ دامنهٔ معادلهٔ اولیه را مشخص می‌کنیم، یعنی مقادیری را مشخص می‌کنیم که مسألهٔ داده شده برای آنها، با معنی باشد.

۷ـ با استفاده از روشهای مشتق‌گیری و یافتن نقاط بحرانی، مقادیر ماکزیمم یا می‌نیمم مسأله را بدست می‌آوریم.

۸ـ جهت تعیین مقادیر ماکزیمم یا می‌نیمم یک تابع پیوستهٔ f بر یک بازهٔ بسته، یادآور می‌شویم که می‌بایست مقادیر f را در نقاط بحرانی با مقادیر f در نقاط انتهایی این بازه مقایسه کنیم.

مثال: مقوائی مربع شکل به ضلع a در اختیار داریم. می‌خواهیم از هر گوشهٔ آن، مربعی ببریم و آن را خم کنیم تا جعبه‌ای در باز (رو باز) درست شود، برای اینکه حجم جعبه ماکزیمم شود مطلوبست تعیین ضلع مربع گوشه‌ها؟



حل: اگر طول ضلع مربع گوشه‌ها را x بگیریم ابعاد مکعب روبازی که ساخته می‌شود عبارتند از x، ۲a − a، ۲x − a لذا حجم جعبه برابر می‌شودبا:

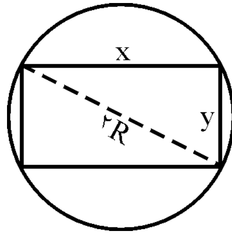
$$V = x(a-2x)^2$$

$$V' = 1(a-2x)^2 - 4x(a-2x) = (a-2x)(a-6x) = 0 \quad \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ x = \dfrac{a}{6} \end{cases}$$

x	۰		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{2}$		$+\infty$
v′		+	۰	−	۰	+	
v	۰	↗	$\frac{2a^3}{27}$ Max	↘	۰ Min	↗	

پس حجم جعبه، به ازاء $x = \frac{a}{6}$، Max و به ازاء $x = \frac{a}{2}$ و $x = 0$ می‌نیمم می‌گردد.

مثال: ثابت کنید از بین مستطیلهای محاط در دایره‌ای به شعاع معلوم R، مساحت مربع ماکزیمم است. (می‌دانید که در یک دایره بینهایت مستطیل می‌توان محاط کرد.)



حل: طول مستطیل را x و عرض آنرا y فرض می‌کنیم طبق قضیهٔ فیثاغورث داریم:

$$y^2 = 4R^2 - x^2 \overset{y>0}{\Rightarrow} y = \sqrt{4R^2 - x^2}$$

لذا مساحت مستطیل عبارت خواهد بود از:

$$s = xy = x\sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{4R^2x^2 - x^4}$$

$$s' = \frac{8Rx - 4x^3}{2\sqrt{4R^2x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow 2x(4R - 2x^2) = 0 \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} x = -R\sqrt{2} \quad , x = R\sqrt{2}$$

x	$-\infty$		$-R\sqrt{2}$		$R\sqrt{2}$		$+\infty$
s'		−	0	+	0	−	
s		↘	$-2R^2$ Min	↗	$2R^2$ Max	↘	

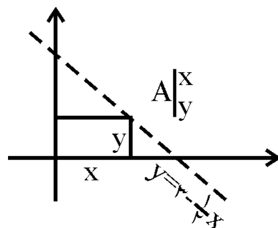
همانطوریکه دیده می‌شود مساحت در جائی که $x = R\sqrt{2}$ است ماکزیمم می‌شود در این حالت داریم:

$$y = \sqrt{4R^2 - x^2} = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R\sqrt{2}$$

لذا مساحت در حالتی که $x = R\sqrt{2}$ و $y = R\sqrt{2}$ است Max می‌شود، یعنی زمانی که مستطیل، مربع باشد ضمناً مقدار مساحت Max برابر است با: $s = xy = R\sqrt{2}.R\sqrt{2} = 2R^2$

مثال: یک مستطیل به محور xها و yها و نمودار خط $y = 3 - \frac{1}{2}x$ (مطابق شکل) محدود شده است طول و عرض مستطیل چقدر باشد تا مساحت آن ماکزیمم شود؟

$$s = xy$$



چون دو متغیر داریم، لذا امکان مشتق‌گیری وجود ندارد. اما نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ روی خط $y = 3 - \frac{1}{2}x$ قرار دارد لذا:

$$s = xy = x(3 - \frac{1}{2}x) = 3x - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow s' = 3 - x = 0$$

$$x = 3$$

$$y = 3 - \frac{1}{2}x = \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
s'		+	0	−	
s		↗	$\frac{9}{2}$ Max	↘	

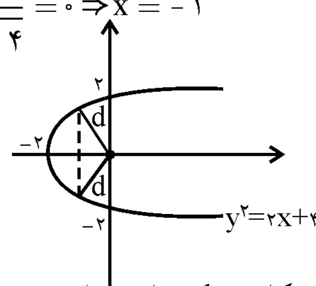
***نکته:* تعیین نزدیکترین یا کوتاهترین فاصله‌ی یک نقطه از یک منحنی:**

برای بدست آوردن کوتاهترین فاصله‌ی یک نقطه از یک منحنی و یا یک خط از یک منحنی، معادله‌ی منحنی را به صورت یک نقطه نمایش داده (یعنی y را برحسب x می‌نویسیم)، سپس به کمک فرمول $d=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$، فاصله را یافته و مشتقگیری می‌کنیم.

مثال: کوتاهترین فاصله‌ی مبدأ مختصات را از منحنی $y^۲=۲x+۴$ بیابید؟

$O\begin{vmatrix}۰\\۰\end{vmatrix} \Rightarrow d=OA=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{x^۲+۲x+۴} \Rightarrow d'=\dfrac{۲x+۲}{۲\sqrt{x^۲+۲x+۴}}=۰\Rightarrow x=-۱$

$A\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ d_{Min} یا $Min(d)=\sqrt{(-۱)^۲+۲(-۱)+۴}=\sqrt{۳}$



در شکل d_{Min}، نمایش داده شده است.

نکاتی بسیار بسیار مهم جهت تعیین Max و Min توابع و عبارات، بدون استفاده از مشتق:

قضیه‌ی اول: حاصلضرب چند متغیر مثبت که مجموعشان ثابت است، هنگامی Max است، که این متغیرها مساوی باشند.

یعنی هرگاه $x+y=1$ و $x,y>۰$ باشند، xy زمانی Max می‌شود که $x=y=\frac{1}{۲}$

اثبات: $(x+y)^۲-(x-y)^۲=۴xy \Rightarrow xy=\frac{۱}{۴}[1^۲-(x-y)^۲]$

چون $Min(x-y)^۲$ صفر است لذا $Max(xy)=\frac{1^۲}{۴}$ یعنی: $x=y=\frac{1}{۲}$

راه دیگر اثبات، با استفاده از مشتق است، کافی است ماکزیمم عبارت $A=xy=x(1-x)$ را با استفاده از مشتق حساب کنیم.

مثال: مجموع دو عدد مثبت، برابر ۳۶ است، ماکزیمم حاصلضرب آنها چقدر است؟

$x+y=۳۶ \overset{x=y}{\Rightarrow} x=y=۱۸ \Rightarrow Max(xy)=۱۸^۲=۳۲۴$

مثال: در بین مستطیلهای با محیط ثابت ۲۰ سانتی متر، کدام یک دارای مساحت Max است؟

$۲x+۲y=۲۰ \Rightarrow x+y=۱۰ \overset{x=y}{\Rightarrow} x=y=۵ \Rightarrow Max(s)=x^۲=۲۵cm^۲$

مثال: ماکزیمم تابع $y=\underbrace{x^۲}_{x}\underbrace{(۴a^۲-x^۲)}_{y}$ را تعیین کنید؟

$x^۲+۴a^۲-x^۲=۴a^۲$ ثابت $, \overset{x=y}{\Rightarrow} x^۲=۴a^۲-x^۲ \Rightarrow x^۲=۲a^۲$

$Max(y)=x^۲(۴a^۲-x^۲)=۲a^۲(۴a^۲-۲a^۲)=۴a^۴$

نتیجه: هرگاه $x,y>۰$ و $ax+by=1$، آنگاه xy زمانی ماکزیمم است که $ax=by=\frac{1}{۲}$

مثال: هرگاه $x,y>۰$ و $۳x+۵y=۳۰$، ماکزیمم xy چقدر است؟

$3x = 5y = 30 \Rightarrow x = 10$ و $y = 6 \Rightarrow Max(xy) = 10 \times 6 = 60$

نتیجه: هرگاه، $x + y = a > 0$ آنگاه عبارات $x^2 + y^2$ و $x^3 + y^3$، ...، $x^n + y^n$ هنگامی Min هستند که $x = y = \frac{a}{2}$، در اینحالت داریم: $Min(x^n + y^n) = (\frac{a}{2})^n + (\frac{a}{2})^n$

اثبات: $A = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = a^2 - 2xy$

برای اینکه A، می‌نیمم شود باید xy، ماکزیمم شود و xy زمانی ماکزیمم شود که $x = y = \frac{a}{2}$ در این حالت:

$Min(A) = a^2 - 2(\frac{a}{2})(\frac{a}{2}) = \frac{a^2}{2}$

به طور مشابه: $B = x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = a^3 - 3axy$

$Min(B) = x^3 - 3a(\frac{a}{2})(\frac{a}{2}) = \frac{a^3}{4}$

قضیه‌ی دوم: مجموع چند متغیر مثبت که حاصلضربشان ثابت است، وقتی Min است که متغیرها، مساوی باشند.

مثال: می‌نیمم عبارت $y = a^4x^2 + \frac{16}{x^2}$ چقدر است؟

$a^4x^2 . \frac{16}{x^2} = 16a^4$ ثابت $\Rightarrow a^4x^2 = \frac{16}{x^2} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{a^2}$

$\Rightarrow Min(y) = a^4 . \frac{4}{a^2} + \frac{16}{\frac{4}{a^2}} = 8a^2$

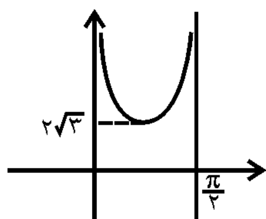
مثال: می‌نیمم عبارت $y = 8\sec^2x + 18\cos^2x$ چقدر است؟ $(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2})$

$8\sec^2x . 18\cos^2x = 144$ ثابت $\Rightarrow 8\sec^2x = 18\cos^2x$

$\cos^4x = \frac{4}{9} \Rightarrow \cos^2x = \frac{2}{3} \Rightarrow Min(y) = 8 \times \frac{3}{2} + 18 \times \frac{2}{3} = 40$

مثال: قسمتی از نمودار تابع $y = \tan x + a\cot x$ به صورت زیر است، مقدار a را بیابید؟

$y_{Min} = 2\sqrt{3}$، ثابت $\tan x . a\cot x = a$



$\tan x = a\cot x = \frac{2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{3} \\ a\cot x = \sqrt{3} \end{cases}$

$a\cot x = \sqrt{3} \Rightarrow a \times \frac{1}{\tan x} = \sqrt{3} \Rightarrow a \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow a = 3$

قضیه‌ی سوم: برای سه متغیر مثبت x و y و z که مجموع آنها ثابت است، حاصلضرب $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ وقتی Max است که $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ باشد.

مثال: ماکزیمم تابع $y = x^2(16 - x^2)^3$ چقدر است؟

$x^2 + 16 - x^2 = 16$ ثابت $\Rightarrow \frac{x^2}{1} = \frac{16 - x^2}{3} \Rightarrow x^2 = 4$

$\Rightarrow Max(y) = 4(16 - 4)^3 = 6912$

مثال: اگر $x + y = ۱۰$ باشد، بیشترین مقدار $A = x^۲y^۳$ را بیابید؟

$$x + y = ۱۰ \text{ ثابت} \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{y}{۳} \Rightarrow \frac{x}{۲} = \frac{y}{۳} = \frac{x+y}{۵} = ۲$$

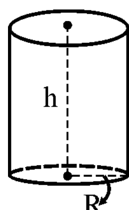
$$\begin{cases} x = ۴ \\ y = ۶ \end{cases} \Rightarrow Max(A) = ۴^۲ . ۶^۳ = ۳۴۵۶$$

تذکر: اگر $x + y = a$ باشد و بخواهیم ماکزیمم عبارت $A = x^n.y^m$ را حساب کنیم در این صورت از مقدار a، n سهم به x و m سهم به y می‌دهیم یعنی در این حالت:

$$\begin{cases} x = \frac{na}{m+n} \\ y = \frac{ma}{m+n} \end{cases}$$

در این حالت: $Max(A) = (\frac{na}{m+n})^n . (\frac{ma}{m+n})^m$

مثال: در استوانه‌ای، مجموع ارتفاع و شعاع قاعده برابر ۱۵ می‌باشد. بیشترین حجم این استوانه چقدر است؟

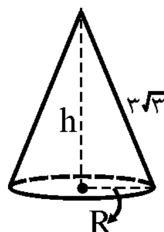


$R + h = ۱۵$ ثابت

$$V = \pi R^۲ h \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{na}{m+n} = \frac{۲ \times ۱۵}{۲+۱} = ۱۰ \\ h = \frac{ma}{m+n} = \frac{۱ \times ۱۵}{۲+۱} = ۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{max} = \pi \times ۱۰^۲ \times ۵ = ۵۰۰\pi$$

مثال: بیشترین حجم مخروطی به مولّد $۳\sqrt{۳}$ کدام است؟



$$h^۲ + R^۲ = (۳\sqrt{۳})^۲ = ۲۷ \text{ ثابت} \Rightarrow$$

$$V = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ h \Rightarrow \begin{cases} R^۲ = \frac{۲ \times ۲۷}{۳} = ۱۸ \\ h^۲ = \frac{۱ \times ۲۷}{۳} = ۹ \end{cases}$$

$$V_{Max} = \frac{۱}{۳}\pi \times ۱۸ \times ۳ = ۱۸\pi$$

قضیه‌ی چهارم: اگر x و y و z مقادیر مثبت و حاصلضرب آنها ثابت باشد، مجموع $x^\alpha + y^\beta + z^\gamma$ وقتی می‌نیمم است که $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ باشد.

مثال: Min تابع $y = \frac{۱}{x^۴} + x^۲$ را تعیین کنید؟

$$y = (\frac{۱}{x^۲})^۲ + x^۲ \Rightarrow \frac{۱}{x^۲} \times x^۲ = ۱ \text{ ثابت}$$

$$\frac{\frac{۱}{x^۲}}{۲} = x^۲ \Rightarrow x^۲ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow Min y = ۲ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

قضیه‌ی پنجم: اگر مجموع دو متغیر x و y مقداری ثابت باشد، مجموع مربعات آنها، وقتی Min است که $x = y$ باشد.

مثال: اگر $x + y = ۱۰$ باشد، Min عبارت $s = x^۲ + y^۲$ را بیابید؟

$x=y \quad x+y=10 \overset{x=y}{\Rightarrow} x=y=5 \Rightarrow s=x^2+x^2=2x^2=50$

قضیه‌ی ششم: اگر مجموع مربعات دو متغیر مثبت x و y مقداری ثابت باشد، مجموع آنها وقتی Max است که $x=y$ باشد.

مثال: هرگاه $x+y=50$، Min **عبارت** $s=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ **چقدر است؟**

$x+y=50 \overset{x=y}{\Rightarrow} x=y=25 \Rightarrow s_{Max}=\sqrt{25}+\sqrt{25}=10$

قضیه‌ی هفتم: اگر مجموع مربعات متغیرهای مثبت x و y مقداری ثابت باشد، عبارت $ax+by$ وقتی Max می‌شود که $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$.

مثال: اگر $x^2+y^2=5$، Max **عبارت** $s=2x+y$ **را بیابید؟** $(x, y>0)$

$s=2x+y \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{1} \Rightarrow x=2y \qquad (2y)^2+y^2=5$

$y=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow Max(s)=2(2)+1=5$

قضیه‌ی هشتم: اگر تفاضل مربعات متغیرهای مثبت x و y مقداری ثابت باشد، عبارت $s=ax-by$ یا $s=by-ax$ زمانی Max می‌شوند که $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ باشد.

مثال: با فرض $a^2-b^2=-6$، Max **عبارت** $s=5b-a$ **را بدست آورید؟** $(a, b>0)$

$\frac{b}{5}=\frac{a}{1} \Rightarrow b=5a \Rightarrow a^2-(5a)^2=-6 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \Rightarrow b=\frac{5}{2}$

$Max(s)=5(\frac{5}{2})-\frac{1}{2}=12$

قضیه‌ی نهم: اگر متغیرهای x و y و z و ضرائب a و b و c مثبت و عبارت $x^2+y^2+z^2$ مقداری ثابت باشد، عبارت $s=ax+by+cz$ زمانی Max می‌شود که: $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

مثال: با شرط $x^2+y^2+z^2=14$، Max **عبارت** $s=x+2y+3z$ **را تعیین کنید؟**

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=k \Rightarrow \begin{cases} x=k \\ y=2k \\ z=3k \end{cases} \Rightarrow k^2+4k^2+9k^2=14 \Rightarrow k=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow Max(s)=1+4+9=14$$

چند مثال:

مثال: Min **عبارت** $s=x^2+y^4-4x+2y^2+8$ **را تعیین کنید؟**

$s=(x-2)^2+(y^2+1)^2+3 \overset{x=2, y=0}{\Rightarrow} Min(s)=0+1+3=4$

مثال: ماکزیمم تابع $y=\sin^2x.\cos^3x$ **چقدر است؟**

$y=\sin^2x.(\cos^2x)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \sin^2x+\cos^2x=1$ ثابت

$$\Rightarrow \frac{\sin^2x}{1}=\frac{\cos^2x}{\frac{3}{2}} \Rightarrow 3\sin^2x=2\cos^2x \Rightarrow \begin{cases} \sin^2x=\frac{2}{5} \\ \cos^2x=\frac{3}{5} \end{cases}$$

$\Rightarrow Max(s)=(\frac{۲}{۵}).(\frac{۳}{۵})^{\frac{۳}{۲}}=\frac{۲}{۵}.\sqrt{(\frac{۳}{۵})^{۳}}=\frac{۶}{۲۵}\sqrt{\frac{۳}{۵}}$

مثال: با فرض آنکه $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$، Max **عبارت** $p=x.y$ **چقدر است؟**

$\sqrt{x}=\sqrt{y}=\frac{\sqrt{a}}{۲} \Rightarrow x=y=\frac{a}{۴} \Rightarrow Max(p)=\frac{a}{۴}.\frac{a}{۴}=\frac{a^{۲}}{۱۶}$

مثال: Min **عبارت** $s=۵^{\sin^{۲}x}+۵^{\cos^{۲}x}$ **را بدست آورید؟**

$۵^{\sin^{۲}x}.۵^{\cos^{۲}x}=۵^{\sin^{۲}x+\cos^{۲}x}=۵^{۱}=۵$ ثابت $\Rightarrow ۵^{\sin^{۲}x}=۵^{\cos^{۲}x} \Rightarrow \sin^{۲}x=\cos^{۲}x$

$\sin^{۲}x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos^{۲}x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow Min(s)=۵^{\frac{۱}{۲}}+۵^{\frac{۱}{۲}}=۲\sqrt{۵}$

مثال: Min **تابع** $y=a\tan x+b\cot x$ **را تعیین کنید؟**

$a\tan x.b\cot x=ab$ ثابت $\Rightarrow a\tan x=b\cot x \overset{\times\tan x}{\Rightarrow} \tan^{۲}x=\frac{a}{b}$

$\Rightarrow \tan x=\pm\sqrt{\frac{a}{b}} \Rightarrow \cot x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}} \Rightarrow Min(y)=a(\pm\sqrt{\frac{a}{b}})+b(\pm\sqrt{\frac{b}{a}}) \Rightarrow Min(y)=۲\sqrt{ab}$

آهنگ تغییر: مقدمه: می‌دانیم در یک خانواده، هرگاه یکی از افراد خانواده ناراحت شود، چهره‌ی دیگر افراد خانواده که به نوعی به وی وابستگی دارند تغییر کرده و آنان نیز ناراحت می‌شوند و به همین ترتیب خوشحالی وی باعث خواهد شد که چهرهٔ افراد وابسته به او نیز خوشحال و خندان شود این تغییر چهره را آهنگ تغییر می‌گویند.

اکنون فرض می‌کنیم $a\in D_f$ و f در a مشتق‌پذیر باشد داریم: $f'(a)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

لذا برای مقادیر کوچک Δx، کسر $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ تقریبی برای $f'(a)$ است و هرچه Δx کوچکتر باشد این تقریب بهتر است.

تعریف آهنگ تغییر متوسط: هرگاه $a\in D_f$ باشد و x از a به $a+\Delta x$ تغییر کند، آنگاه متغیر y نیز از f(a) به $f(a+\Delta x)$ تغییر خواهد کرد. بنابراین وقتی تغییر x برابر با Δx باشد تغییر y که آن را با Δy نشان می‌دهند برابر است با $f(a+\Delta x)-f(a)$. در این حالت آهنگ متوسّط تغییر y در واحد تغییر x، وقتی که x از a به $a+\Delta x$ تغییر کند (یا وقتی که تغییر x برابر Δx باشد) برابر است با: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

تعریف آهنگ تغییر لحظه‌ای (آنی): اگر حد کسر فوق، وقتی که $\Delta x\to ۰$، موجود باشد، مقدار حد کسر فوق را (که در واقع برابر $f'(a)$ است) آهنگ لحظه‌ای (آنی) تغییر y در واحد تغییر x، در نقطهٔ a می‌گویند.

تذکر: همانطوریکه تغییرات x، موجب تغییرات y می‌شود متقابلاً تغییرات y نیز موجب تغییرات x می‌شود لذا اگر $x=g(y)$ آنگاه می‌توان از آهنگ تغییر متوسط و آنی x نسبت به y نیز صحبت کرد. اگر متغیر y از b به $b+\Delta y$ تغییر یابد، متغیر x به اندازهٔ $\Delta x=g(b+\Delta y)-g(b)$ تغییر می‌یابد در این حالت، آهنگ متوسط تغییر x در واحد تغییر y، وقتی که y از b به $b+\Delta y$ تغییر کند (یا وقتی که تغییر y برابر Δy باشد) برابر است با: $\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{g(b+\Delta y)-g(b)}{\Delta y}$

در این حالت آهنگ لحظه‌ای تغییر x در واحد تغییر y، در نقطهٔ b برابر است با $g'(b)$ (البته به شرط آنکه $g'(b)$ موجود باشد)

مثال: شعاع دایره‌ای ۱۰ سانتی‌متر است، اگر شعاع دایره به اندازهٔ ۲ سانتی‌متر بزرگ شود، مطلوبست آهنگ متوسط و آهنگ آنی تغییرات مساحت و محیط دایره.

حل: می‌دانیم مساحت و محیط هر دایره هر دو، تابعی از شعاع آن هستند لذا: $s(R) = \pi R^۲$

لذا: $\text{آهنگ متوسط تغییر مساحت} = \frac{s(R+\Delta R) - s(R)}{\Delta R} = \frac{s(۱۰+۲) - s(۱۰)}{۲} = \frac{۱۴۴\pi - ۱۰۰\pi}{۲} = ۲۲\pi$

$f(R) = \pi R^۲ \Rightarrow s'(R) = ۲\pi R \Rightarrow \text{آهنگ آنی تغییر مساحت} = s'(۱۰) = ۲۰\pi$

$P(R) = ۲\pi R$

همچنین داریم: $\text{آهنگ متوسط تغییر محیط} = \frac{p(R+\Delta R) - P(R)}{\Delta R} = \frac{p(۱۲) - p(۱۰)}{۲} = \frac{۲۴\pi - ۲۰\pi}{۲} = ۲\pi$

$P(R) = ۲\pi R \Rightarrow P'(R) = ۲\pi \Rightarrow \text{آهنگ آنی تغییر محیط} = P'(۱۰) = ۲\pi$

مثال: بادکنکی، کروی مملّو از هوا، شعاعی برابر ۲۰ سانتی‌متر دارد. اگر ۱ سانتی‌متر دیگر به شعاع آن اضافه شود، حجم بادکنک چقدر افزایش می‌یابد؟ (آهنگ تغییر حجم چقدر است)

حل: می‌دانیم حجم کره تابعی از شعاع آن است در واقع: $V(R) = \frac{۴}{۳}\pi R^۳$

میزان تغییر آنی حجم نسبت به شعاع برابر است با: $V'_R = \frac{۴}{۳} \times ۳\pi R^۲ = ۴\pi R^۲$ و لذا:

$V'_{۲۰} = ۱۶۰۰\pi = ۵۰۲۶/۶$

یعنی هرگاه ۱ سانتی متر به شعاع بادکنکی کروی با شعاع ۱۰ سانتی‌متر اضافه شود، حجم آن تقریباً ۵۰۲۶/۶ سانتی‌متر مکعب افزوده می‌شود.

در این حالت آهنگ متوسط تغییر حجم (که در واقع در اینجا، برابر است با مقدار واقعی تغییر حجم کره) برابر است با:

$\frac{V(R+h) - V(R)}{h} = \frac{V(۲۱) - V(۲۰)}{۱} = ۳۸۷۹۲/۳۹ - ۳۳۵۱۰/۳۲ = ۵۲۸۲/۰۷$

مثال: درجهٔ حرارت فارنهایت را به کمک رابطهٔ $C = h(F) = \frac{۵}{۹}(F - ۳۲)$ می‌توان به درجهٔ حرات سانتی‌گراد تبدیل کرد. آهنگ متوسط و آنی تغییر C نسبت به F و F نسبت به C را بیابید؟

$\text{آهنگ متوسط تغییر C نسبت به F} = \frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{h(F+\Delta F) - h(F)}{\Delta F} = \frac{\frac{۵}{۹}(F+\Delta F - ۳۲) - \frac{۵}{۹}(F - ۳۲)}{\Delta F} = \frac{۵}{۹}$

$\text{آهنگ آنی تغییر C نسبت به F} = C'_F = \frac{۵}{۹}$

$C = \frac{۵}{۹}(F - ۳۲) \Rightarrow ۹C = ۵F - ۱۶۰ \Rightarrow F = \frac{۹}{۵}C - \frac{۱۶۰}{۵}$

$F = h^{-۱}(C) = \frac{۹}{۵}C - ۳۲$ $\text{آهنگ متوسط تغییر F نسبت به C} = \frac{h^{-۱}(C+\Delta C) - h^{-۱}(C)}{\Delta C}$

$= \frac{\frac{۹}{۵}(C+\Delta C) - ۳۲ - \frac{۹}{۵}C + ۳۲}{\Delta C} = \frac{۹}{۵}$

$\text{آهنگ آنی تغییر C نسبت به F} = F'_c = (h^{-۱})'(C) = \frac{۹}{۵}$

کمیتهای وابسته:

در برخی از مسائل نه تنها دو کمیت (دو متغیر) x و y به هم مربوط‌اند، بلکه هر دوی آنها تابع کمیت سوّمی (که معمولاً زمان است) هستند. لذا هرگونه تغییرات زمان (t) باعث تغییر در هر دو متغیر x و y می‌شود، لذا در اینگونه مسائل می‌توان از آهنگ متوسط و آنی هر یک از دو متغیر x و y نسبت به کمیت سوم یعنی زمان، بحث کرد. در این حالت اینگونه کمیتها را کمیتهای وابسته می‌گوئیم.

در واقع در چنین مواردی بحث از یک تابع پارامتری به صورت $\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$ پیش می‌آید. که در آن t نقش پارامتر را بازی می‌کند.

لذا داریم: $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ = آهنگ متوسط تغییر y نسبت به تغییر x

$y'_t = f'(t)$ آهنگ آنی تغییر y نسبت به تغییر x

همچنین داریم: $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}$ آهنگ متوسط تغییر x نسبت به تغییر t

آهنگ آنی تغییر x نسبت به تغییر t $= x'_t = g'(t)$

طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای یادآور می‌شویم که: $y'_x \times x'_t = y'_t$ یا $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$

در مسائل معمولاً یکی از دو مقدار $x'(t)$ (یا x'_t) و $y'(t)$ (یا y'_t) را می‌دهند و دیگری را می‌خواهند لازم به ذکر است که برای محاسبهٔ دیگری، حتماً لازم است y'_x را ابتدا خودمان محاسبه کنیم.

همانطور که می‌دانیم هرگاه در یک فاصله، $f'(x) > 0$ باشد، آن‌گاه تابع در آن فاصله صعودی بوده و هرگاه $f'(x) < 0$ باشد، آنگاه تابع مورد نظر در آن فاصله نزولی خواهد بود. لذا در مسائل اگر $x'(t)$ یا $y'(t)$ مثبت باشند نشان دهندهٔ صعودی بودن دو تابع x و y نسبت به متغیر مستقل t بوده (و بر عکس) و اگر $x'(t)$ و $y'(t)$ منفی باشند نشان دهندهٔ نزولی بودن توابع x و y نسبت به متغیر مستقل t هستند (و برعکس)

به مثالهائی در این زمینه توجه کنید.

مثال: نقطهٔ P روی مسیر $y = \sqrt{x^۳ + ۸}$ در حرکت است هنگامی که P در نقطهٔ (۳ و ۱) قرار دارد اگر متغیر y با سرعت ۳ متر در ثانیه کاهش یابد، متغیر x با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

$$y' = \frac{۳x^۲}{۲\sqrt{x^۳+۸}} \qquad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

$$y'(۱) = \frac{۳}{۲\times۳} = \frac{۱}{۲} \qquad \frac{۱}{۲} = \frac{-۳}{x'_t} \Rightarrow x'_t = -۶\ m/s$$

لذا متغیر x با سرعت ۶m/s کاهش می‌یابد.

مثال: مطلوبست تعیین آهنگ آنی تغییر مساحت دایره‌ای که شعاع آن ۸cm است و آهنگ تغییر شعاع آن ۶cm/s است؟

$R = ۸cm$

$R'(t) = ۶$

$s(R) = \pi R^{۲} \Rightarrow s'(t) = s'_R \times R'_t \Rightarrow s'(t) = ۲\pi R \times R'(t)$

$s'(۸) = ۲\pi \times ۸ \times ۶ = ۹۶\pi \ cm^{۲}/s$

مثال: مطلوبست آهنگ تغییر مساحت دایره نسبت به تغییر محیط آن؟

حل: می‌دانیم مساحت دایره و محیط آن هر دو توابعی از شعاع آن یعنی R هستند یعنی: $s = \pi R^{۲}$

واضح است که کمیت مطلوب $s'(p)$ یا s'_p است. $p = ۲\pi R$

برای محاسبهٔ آن می‌توان از دو روش استفاده کرد.

روش اول: R را از فرمول $p = ۲\pi R$ برحسب p بدست آورده در s قرار می‌دهیم تا s مستقیماً تابعی از p شود سپس از تابع بدست آمده نسبت به p مشتق می‌گیریم تا s'_p (یا $s'(p)$) بدست آید.

$$p = ۲\pi R \Rightarrow R = \frac{p}{۲\pi} \Rightarrow s = \pi R^{۲} = \pi\left(\frac{p}{۲\pi}\right)^{۲} = \frac{p^{۲}}{۴\pi} = \frac{۱}{۴\pi}p^{۲}$$

$$s'(p) = \frac{۱}{۴\pi} \times ۲p = \frac{p}{۲\pi} = \frac{۲\pi R}{۲\pi} = R$$

روش دوم:

$$s'(p) = \frac{s'(R)}{p'(R)} = \frac{۲\pi R}{۲\pi} = R$$

یعنی آهنگ تغییر مساحت دایره نسبت به تغییر شعاع آن، R برابر آهنگ تغییر محیط دایره نسبت به شعاع آن است.

مثال: طول مکعب مستطیلی با سرعت ۱ سانتی‌متر بر ثانیه در حال کاهش و عرض آن با سرعت ۲ سانتی‌متر بر ثانیه در حال افزایش و ارتفاع آن با سرعت ۱ سانتی‌متر بر ثانیه در حال کاهش است، آهنگ تغییرات حجم این مکعب مستطیل را در لحظه‌ای که طول آن ۲۰ سانتی‌متر و عرض آن ۱۰ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۳۰ سانتی‌متر باشد، به دست آورید؟

یادآوری: $y = uvw \Rightarrow y' = u'vw + v'uw + w'uv$

$V = abc \Rightarrow V'_t = a'_t bc + b'_t ac + c'_t ab$

$= (-۱)(۱۰)(۳۰) + (۲)(۲۰)(۳۰) + (-۱)(۲۰)(۱۰) = ۷۰۰$

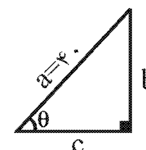
مثال: هرگاه شعاع قاعده‌ی استوانه‌ای با سرعت ۳ سانتی‌متر بر ثانیه کاهش و ارتفاع آن با سرعت ۵ سانتی‌متر بر ثانیه افزایش یابد، آهنگ تغییر حجم این استوانه را در لحظه‌ای که شعاع قاعده‌ی آن ۱۰ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۲۰ سانتی‌متر است به دست آورید، به نظر شما حجم در لحظه‌ی فوق در حال کاهش است یا افزایش چرا؟

$$V = \pi R^{۲}h \Rightarrow V'(t) = ۲\pi RR'(t)h + h'(t)\pi R^{۲} = ۲\pi(۱۰)(-۳)(۲۰) + ۵\pi(۱۰)^{۲} = -۷۰۰\pi$$

لذا حجم در حال کاهش است.

تست: اندازه‌ی یکی از زاویای حاده‌ی مثلث قائم الزاویه‌ای، با آهنگ $\frac{\pi}{۶}$ رادیان بر ثانیه کاهش می‌یابد، هرگاه طول وتر، ثابت و ۴۰ سانتی‌متر باشد، وقتی اندازه‌ی زاویه‌ی حاده به $\frac{\pi}{۳۶}$ برسد، سرعت تغییر مساحت کدام است؟

۱) $\frac{-100\pi}{9}$ ۲) $\frac{100\pi}{9}$ ۳) $\frac{50\pi}{9}$ ۴) $\frac{-50\pi}{9}$



$$\begin{cases} s=\frac{bc}{2} \\ \sin\theta=\frac{b}{a} \\ \cos\theta=\frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow s=\frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{2}=\frac{1}{4}a^2\sin2\theta=400\sin2\theta$$

$$\frac{ds}{dt}=800\cos2\theta\times\frac{d\theta}{dt}=800\cos\frac{\pi}{3}\left(-\frac{\pi}{36}\right)=-\frac{100\pi}{9}$$

کاربرد اقتصادی

هرگاه x، مقدار محصول (کالای) تولید شده باشد، آنگاه:

۱) تابع هزینه C(x)، نشانگر هزینه‌ی تولید x محصول است.

۲) تابع در آمد R(x)، نشانگر درآمد حاصل از فروش x محصول است.

۳) تابع سود P(x)، نشانگر سود حاصل از فروش x محصول است.

واضح است که: سود = درآمد − هزینه $\Rightarrow P(x) = R(x) - C(x)$

نکته: هرگاه هزینه‌ی متوسط، درآمد متوسط و سود متوسط هر واحد کالا مورد نظر باشد، به ترتیب از $\frac{C(x)}{x}$، $\frac{R(x)}{x}$ و $\frac{P(x)}{x}$ استفاده می‌کنیم.

نکته: هرگاه هزینه‌ی نهائی، در آمد نهائی و سود نهائی برای $(x+1)$امین کالا مورد نظر باشد، به ترتیب از $C'(x)$ و $R'(x)$ استفاده می‌کنیم.

نکته: $C(0)$ یعنی هزینه‌ی اولیه‌ی تولید

نکته: $C(x+1)-C(x)$ یعنی هزینه‌ی واقعی تولید $(x+1)$امین کالا

توجه داشته باشید که $C'(x) \approx C(x+1) - C(x)$

مثال: یک کارخانه‌ی پارچه بافی برای تولید x متر پارچه، مبلغ $C(x) = 0/002x^2 + 20x + 5000$ دلار هزینه می‌کند، مطلوبست:

الف) هزینه‌ی اولیه‌ی تولید

$C(0) = 5000$ دلار

ب) هزینه‌ی متوسط برای ۱۰۰ متر پارچه

هزینه‌ی متوسط ۱۰۰ متر پارچه برای هر متر

$\frac{C(100)}{100} = 70/2$

ج) هزینه‌ی واقعی تولید صد و یکمین متر پارچه

$C(x+1) = C(x) = C(101) - C(100) = (0/002)((101)^2-(100)^2) + 20(101-100) + 0$

$= 0/002\ (101-100)\ (101+100) + 20 = 0/402 + 20 = 20/402$

د) هزینه‌ی نهائی تولید صد و یکمین متر پارچه

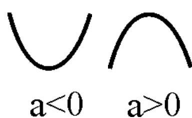
$C'(x) = ۰/۰۰۴x + ۲۰ \Rightarrow C'(۱۰۰) = ۰/۴ + ۲۰ = ۲۰/۴$

مثال: هرگاه هزینه‌ی تولید x ساعت مچی برابر $C(x) = \frac{x^۲}{۵۰۰} + ۱۰۰x + ۲۰۰۰$ دلار و درآمد حاصل از فروش این x ساعت مچی برابر $R(x) = \frac{x^۲}{۱۰۰۰} + ۱۵۰x + ۳۰۰۰$ دلار باشد، سود نهائی تولید ۵۰۱ امین ساعت مچی چقدر است؟

$P(x) = R(x) - C(x) = \frac{-۱}{۱۰۰۰}x^۲ + ۵۰x + ۱۰۰۰ \Rightarrow P'(x) = \frac{-۱}{۵۰۰}x + ۵۰ \Rightarrow P'(۵۰۰) = ۴۹$ دلار

نمودارها:

I) **بررسی نمودار تابع درجه‌ی دوم (سهمی قائم) $y = ax^۲ + bx + c$ و ویژگیهای آن:**



۱) نمودار تابع فوق به یکی از دو صورت مقابل است.

۲) دامنه‌ی تابع R بوده و تابع همه‌جا پیوسته و مشتق‌پذیر است.

۳) طول نقطه‌ی اکسترمم در توابع درجه‌ی دوم از رابطه‌ی $x = \frac{-b}{۲a}$ (ریشه‌ی مشتق) به دست می‌آید.

۴) هرگاه $a > ۰$ باشد، تابع دارای Min نسبی و مطلق به عرض $y = \frac{-\Delta}{۴a}$ می‌باشد.

۵) هرگاه $a < ۰$ باشد، تابع دارای Max نسبی و مطلق به عرض $y = \frac{-\Delta}{۴a}$ می‌باشد.

مثال: در ازاء چه مقادیری از m، تابع $y = (m^۲ - m)x^۲ - x - ۴$ دارای Max مطلق می‌باشد؟

$a < ۰ \Rightarrow m^۲ - m < ۰ \Rightarrow ۰ < m < ۱$

۶) مختصات نقطه‌ی Max و Min نسبی و مطلق تابع عبارتست از:

$$M \left| \begin{array}{l} x = \frac{-b}{۲a} \\ y = f(\frac{-b}{۲a}) = \frac{-\Delta}{۴a} \end{array} \right.$$

تست: هرگاه ماکزیمم تابع $y = ax^۲ + ۲x + ۳$، برابر ۴ باشد، a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۱ ۴) ۱-

روش اول: $\frac{-\Delta}{۴a} = ۴ \Rightarrow \frac{۱۲a-۴}{۴a} = ۴ \Rightarrow a = -۱$

روش دوم: چون خط $y = ۴$ بر نمودار تابع مماس است، لذا معادله‌ی تقاطعشان یعنی معادله‌ی $ax^۲ + ۲x + ۳ = ۴$ یا $ax^۲ + ۲x - ۱ = ۰$، باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد، بنابراین:

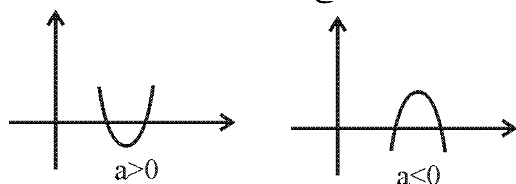
$\Delta = ۴ + ۴a = ۰ \Rightarrow a = -۱$

۷ـ این تابع مجانب ندارد.

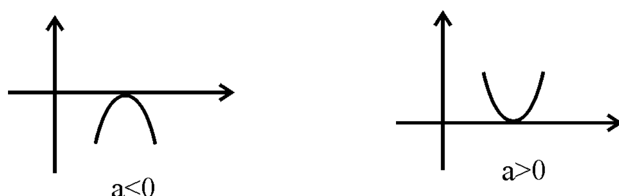
۸ـ این تابع نقطه‌ی عطف ندارد (جهت تقعر منحنی یا همیشه روبه بالاست یا همیشه رو به پائین)

۹ـ خط $x = \frac{-b}{۲a}$ محور تقارن یا خط تقارن منحنی تابع می‌باشد (ضمناً توجه داشته باشید که $x = \frac{-b}{۲a}$ طول نقطه‌ی اکسترمم تابع نیز هست)

۱۰ـ هرگاه دلتای معادله، بزرگتر از صفر باشد، نمودار تابع محور xها را در دو نقطه قطع می‌کند و لذا معادله دو ریشه دارد.



۱۱ـ هرگاه دلتای معادله، صفر باشد، نمودار تابع برمحور xها مماس بوده و بنابراین معادله ریشه‌ی مضاعف دارد.



۱۲ـ هرگاه دلتای معادله، کوچکتر از صفر باشد، نمودار تابع محور xها را قطع نمی‌کند و بنابراین معادله ریشه ندارد.



نمودار تماماً بالای محور xها می‌باشد. نمودار تماماً پائین محور xها می‌باشد.

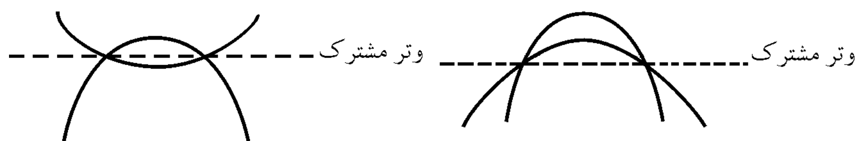
تست: در ازاء چه مقادیری از m، نمودار تابع $y = mx^۲ + ۲x + ۱$، تماماً بالای محور xها قرار دارد؟

۱) $m < ۱$ ۲) $m > ۱$ ۳) $۰ < m < ۱$ ۴) $m > ۰$

$\begin{cases} a > ۰ \Rightarrow m > ۰ \\ \Delta' < ۰ \Rightarrow ۱ - m < ۰ \Rightarrow m > ۱ \end{cases}$ اشتراک $\Rightarrow m > ۱$

۱۳ـ هرگاه $ac < ۰$ باشد، نمودار تابع محور xها را در طرفین محور yها قطع می‌کند. یعنی معادله دو ریشه‌ی مختلف العلامه دارد.

۱۴ـ برای تعیین معادله‌ی وتر مشترک دو تابع درجه‌ی دوم، کافی است بین معادلات آنها، جملات درجه‌ی دوم را حذف کنیم.



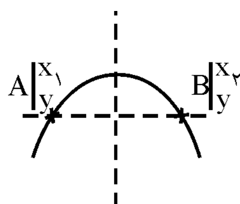
۱۵ـ هرگاه معادله‌ی تابع درجه‌ی دوم به صورت $y = k(x - x_۰)^۲ + c$ باشد، آنگاه:

الف) اگر $k > ۰$ باشد $s\left|\begin{matrix} x_۰ \\ c \end{matrix}\right.$ نقطه‌ی Min تابع و $x = x_۰$ محور تقارن تابع می‌باشند.

ب) اگر $k < ۰$ باشد $s\left|\begin{matrix} x_۰ \\ c \end{matrix}\right.$ نقطه‌ی Max تابع و $x = x_۰$ محور تقارن تابع می‌باشند.

۱۶ـ هرگاه عرض دو نقطه از نمودار، با هم مساوی باشند، وسط پاره خط و اصل بین این نقاط، روی محور تقارن قرار دارد.

معادله‌ی محور تقارن $\Rightarrow x = \frac{x_۱ + x_۲}{۲}$



تست: دو نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$ **و** $B\left|\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right.$ **برنمودار تابع** $y = ax^2 + bx + c$ **واقعند، در این صورت طول نقطه‌ی اکسترمم تابع کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: طبق نکته‌ی فوق معادله‌ی خط تقارن تابع (طول نقطه‌ی اکسترمم) عبارتست از: $x = \frac{1+3}{2} = 2$

II) **بررسی نمودار تابع درجه‌ی سوم** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ **و ویژگیهای آن:**

$\begin{cases} a > 0 & \Rightarrow \\ a < 0 & \Rightarrow \end{cases}$

۱ـ نمودار تابع به یکی از چهار صورت زیر است.

۲ـ دامنه‌ی تابع R بوده و تابع همواره پیوسته و مشتق‌پذیر است.

۳ـ این تابع مجانب ندارد.

۴ـ این تابع محور تقارن ندارد.

۵ـ این تابع همواره یک مرکز تقارن دارد که همان نقطه‌ی عطفش می‌باشد.

۶ـ طول نقطه‌ی عطف تابع (ریشه‌ی مشتق دوم) عبارتست از $x = \frac{-b}{3a}$ (توجه داشته باشید که b ضریب جمله‌ی درجه‌ی دوم است)

۷ـ مختصات نقطه‌ی عطف تابع درجه‌ی سوم $y = ax^3 + cx + d$ عبارتست از: $\omega\left|\begin{matrix}0\\d\end{matrix}\right.$

۸ـ در حالتی که مشتق تابع، دو ریشه‌ی متمایز داشته باشد، تابع دارای یک Max نسبی و یک Min نسبی خواهد بود.

۹ـ Max و Min نسبی تابع، Max و Min مطلق نیستند.

۱۰ـ در حالتی که مشتق تابع ریشه نداشته باشد و یا ریشه‌ی مضاعف داشته باشد تابع اکیداً صعودی و یا اکیداً نزولی بوده و لذا اکسترمم نداشته و بنابراین می‌توان گفت:

الف) شرط لازم و کافی برای اینکه تابع درجه‌ی سوم $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$، اکیداً صعودی باشد آنستکه $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

ب) شرط لازم و کافی برای اینکه تابع درجه‌ی سوم $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$، اکیداً نزولی باشد آنستکه $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

تذکر: در دو قسمت (الف) و (ب) منظور از Δ، همان Δی مشتق است.

۱۱ـ در حالتی که تابع Max و Min نسبی دارد، نقطه‌ی عطف تابع وسط پاره‌خط و اصل بین این نقاط است، یعنی:

$$\begin{cases} x_{\text{عطف}} = \frac{x_{Max} + x_{Min}}{2} \\ y_{\text{عطف}} = \frac{y_{Max} + y_{Min}}{2} \end{cases}$$

یعنی مجموع Max و Min تابع، دو برابر عرض نقطه‌ی عطف تابع می‌باشد.

تست: مجموع Max و Min نسبی تابع $y = ۵x^۳ - ۷x + ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳}{۵}$ ۲) $\frac{-۲}{۷}$ ۳) $\frac{-۷}{۲}$ ۴) ۲

حل: طبق نکته فوق داریم:

$$y_{Max} + y_{Min} = ۲y_{عطف}$$
$$x_{عطف} = ۰ \Rightarrow y_{عطف} = ۱$$
$$\Rightarrow y_{Max} + y_{Min} = ۲$$

تست: هرگاه مماس بر نمودار تابع $y = mx^۳ + ۶x^۲ - ۳x + ۱$ در نقطه‌ی $x = -۲$، از نمودار تابع عبور کند، m برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۱-

حل: چون در نقطه‌ی عطف، مماس بر منحنی از منحنی عبور می‌کند، لذا $x = -۲$ طول عطف است بنابراین:

$$-\frac{b}{۳a} = -۲ \Rightarrow \frac{-۶}{۳m} = -۲ \Rightarrow m = ۱$$

۱۲ـ هرگاه $y = (x-a)(x-b)(x-c)$، با شرط $a \neq b \neq c$، تابع دارای دو اکسترمم بوده و طول نقطه‌ی عطف تابع برابر است با: $x_{عطف} = \frac{a+b+c}{۳}$

۱۳ـ فاصله‌ی بین خطوط مماس در نقاط اکسترمم تابع برابر است با: $|y_{Max} - y_{Min}|$

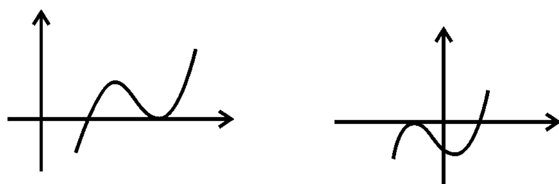
۱۴ـ فاصله‌ی بین خطوط قائم در نقاط اکسترمم تابع برابر است با: $|x_{Max} - x_{Min}|$

۱۵ـ تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم بستگی به دلتای مشتق دارد.

الف) هرگاه دلتای مشتق کوچکتر یا مساوی صفر باشد، تابع یا اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی بوده و لذا معادله فقط یک ریشه دارد.

ب) هرگاه دلتای مشتق، بزرگتر از صفر باشد، مشتق دارای دو ریشه خواهد بود، در این حالت:

۱) هرگاه عرض یکی از ریشه‌های مشتق، صفر باشد شکل تابع به یکی از دو صورت زیر بوده و لذا معادله یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف خواهد داشت.

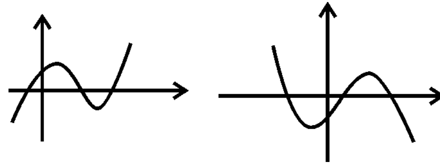


مثال: معادله‌ی $x^۳ - ۳x + ۲ = ۰$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟

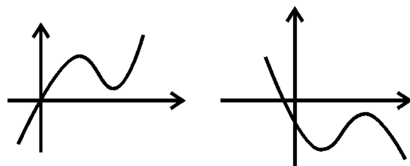
$$y' = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱ \Rightarrow \begin{cases} f(۱) = ۰ \\ f(-۱) = ۴ \end{cases} \Rightarrow$$ معادله یک ریشه‌ی ساده و یک ریشه‌ی مضاعف دارد.

البته دقت داشته باشید که با نگاه کردن به معادله می‌فهمیم که $x = ۱$ یکی از ریشه‌های معادله است (زیرا مجموع ضرائب معادله صفر است) و چون این ریشه، ریشه‌ی مشتق تابع نیز می‌باشد پس $x = ۱$ ریشه‌ی مضاعف تابع است و برای پیدا کردن ریشه‌ی ساده، کافی است معادله را بر $(x-۱)^۲$ تقسیم می‌کنیم.

۲) هرگاه عرض ریشه‌های مشتق، مخالف صفر باشند، در این صورت اگر عرضهای نقاط اکسترمم مختلف العلامه باشند (یعنی Max و Min در طرفین محور xها باشند) شکل تابع به یکی از دو صورت زیر بوده و لذا تابع سه ریشه‌ی متمایز خواهد داشت.



ولی اگر عرضهای نقاط اکسترمم، همعلامت باشند، شکل تابع به یکی از دو صورت زیر بوده و لذا معادله فقط یک ریشه خواهد داشت.



یادآوری: بحث در تعداد ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی سوم، قبلاً در مبحث معادلات با ذکر مثالهای متنوع آمده است.

۱۶ـ هرگاه معادله‌ی تابع به صورت $y = k(ax - b)(x - \alpha)^{۲}$ باشد آنگاه:

اولاً: نمودار تابع در نقطه‌ی $x = \alpha$ بر محور xها مماس است.

ثانیاً: نقطه‌ی $x = \alpha$ طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع است، در این حالت:

$$\begin{cases} \text{if} \quad k(a\alpha - b) > ۰ \Rightarrow & x = \alpha \text{ طول Min نسبی است.} \\ \text{if} \quad k(a\alpha - b) < ۰ \Rightarrow & x = \alpha \text{ طول Max نسبی است.} \end{cases}$$

۱۷ـ هرگاه معادله‌ی تابع به صورت $y = k(ax - b)^{۳} + c$ باشد. نقطه‌ی $w \left| \begin{matrix} \frac{b}{a} \\ c \end{matrix} \right.$ نقطه‌ی عطف تابع بوده و خط $y = c$ معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی عطف می‌باشد.

III) بررسی نمودار تابع هموگرافیک و ویژگیهای آن: $y = \dfrac{ax + b}{cx + d} \quad (c \neq ۰ \quad , ad - bc \neq ۰)$

۱) دامنه‌ی این تابع $R - \{-\frac{d}{c}\}$ بوده و تابع در دامنه‌اش پیوسته و مشتق‌پذیر است.

۲) این تابع همواره دارای یک مجانب قائم و یک مجانب افقی است که معادلات آنها عبارتست از:

مجانب قائم $\Rightarrow x = \dfrac{-d}{c}$ $\quad \left| \begin{matrix} x \to -\frac{d}{c} \\ y \to \pm\infty \end{matrix} \right.$

مجانب افقی $\Rightarrow y = \dfrac{a}{c}$ $\quad \left| \begin{matrix} x \to \pm\infty \\ y \to \frac{a}{c} \end{matrix} \right.$

ضمناً انفصال تابع در مجانب قائمش، انفصال ساده است و نه مضاعف.

۳) مشتق این تابع عبارتست از: $y' = \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^{۲}}$، در این حالت:

الف) اگر $ad - bc > ۰$ باشد تابع در هر یک از فواصل $(-\infty, -\frac{d}{c})$ و $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ اکیداً صعودی می‌باشد.

ب) اگر $ad - bc < ۰$ باشد تابع در هر یک از فواصل $(-\infty, -\frac{d}{c})$ و $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ اکیداً صعودی می‌باشد.

۴ـ این تابع همواره دارای یک مرکز تقارن می‌باشد که محل برخورد مجانبهایش بوده و مختصاتش عبارتست از:

$$\omega \left| \begin{array}{l} x = -\frac{d}{c} \\ y = \frac{a}{c} \end{array} \right.$$

۵ـ اگر $\omega \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right.$ مرکز تقارن تابع هموگرافیک باشد، آنگاه $x = \alpha$ و $y = \beta$ مجانبهای تابع می‌باشند و بالعکس.

۶ـ هرگاه $a + d = ۰$ یا $a = -d$ باشد، مرکز تقارن تابع روی نیمساز ربع اول و سوم قرار می‌گیرد.

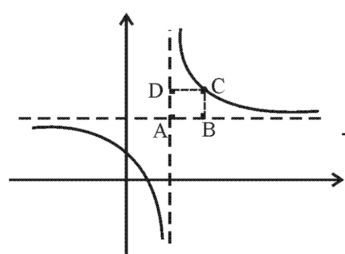
۷ـ هرگاه $a + d = ۰$ یا $a = -d$ باشد، معکوس تابع هموگرافیک، با خودش یکی می‌شود.

مثال: معکوس تابع $y = \frac{۲x + ۱}{x - ۲}$ را بیابید؟

راه تستی: $a + d = ۰ \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۲x + ۱}{x - ۲}$

روش تشریحی: $y = \frac{۲x + ۱}{x - ۲} \Rightarrow xy - ۲y = ۲x + ۱ \Rightarrow x(y - ۲) = ۲y + ۱ \Rightarrow x = \frac{۲y + ۱}{y - ۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۲x + ۱}{x - ۲}$

۸ـ هرگاه $a = d$ باشد، مرکز تقارن تابع روی نیمساز ربع دوم و چهارم قرار دارد.



۹ـ حاصلضرب فواصل هر نقطه‌ی دلخواه واقع بر نمودار تابع، از دو مجانبش برابر است با: $\frac{|ad - bc|}{c^۲}$، به عبارت معادل مساحت چهار ضلعی ABCD برابر است با: $\frac{|ad - bc|}{c^۲}$

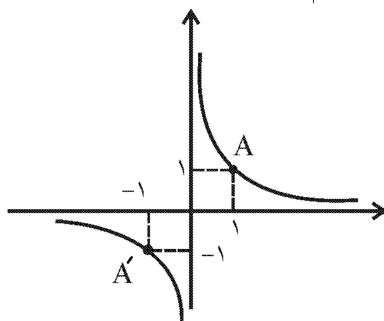
۱۰ـ اگر مبدأ مختصات را به مرکز تقارن تابع، انتقال دهیم، معادله‌ی تابع به صورت $Y = \frac{K}{X}$ در می‌آید که $K = \frac{bc - ad}{c^۲}$

۱۱ـ برای تعیین معادله‌ی وتر مشترک دو تابع هموگرافیک، کافی است بین دو معادله، جملات xy را حذف کنیم.

۱۲ـ تابع هموگرافیک دارای دو رأس می‌باشد که برای تعیین مختصات آنها کافی است معادله $|y'| = ۱$ را حل کنیم تا طول این دو نقطه به دست آیند و با قرار دادن این مقادیر در معادله‌ی تابع، عرض آنها را نیز بیابیم.

مثال: مختصات رئوس تابع هموگرافیک $y = \frac{۱}{x}$ را بیابید؟

$$y' = \frac{-۱}{x^۲} \Rightarrow \left|\frac{-۱}{x^۲}\right| = ۱ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$$



$$A \left| \begin{array}{l} ۱ \\ ۱ \end{array} \right. \quad , B \left| \begin{array}{l} -۱ \\ -۱ \end{array} \right.$$

۱۳ـ فاصله‌ی بین دو رأس A و A' یا طول AA' برابر است با ۲λ که در آن $\frac{\lambda^۲}{۲} = \left| \frac{bc - ad}{c^۲} \right|$

۱۴ـ این تابع همواره دارای دو محور تقارن عمود بر هم با شیب ± ۱ بوده که از مرکز تقارن می‌گذرند و موازی نیمسازهای

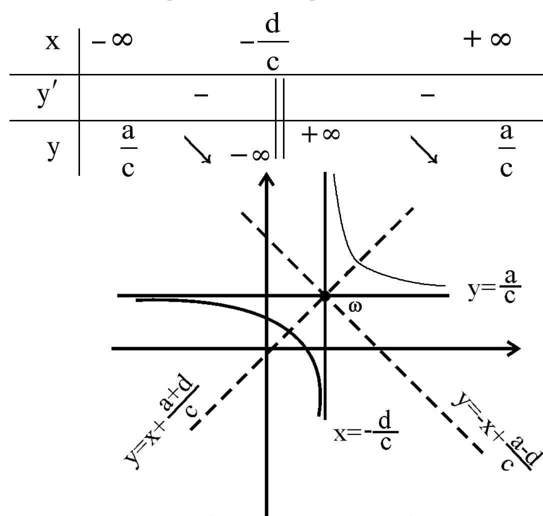
محورهای مختصات می‌باشند، یکی از این دو محور تقارن (محور تقارن قاطع)، همواره نمودار تابع را در دو نقطه قطع می‌کند، معادلات محورهای تقارن عبارتند از:

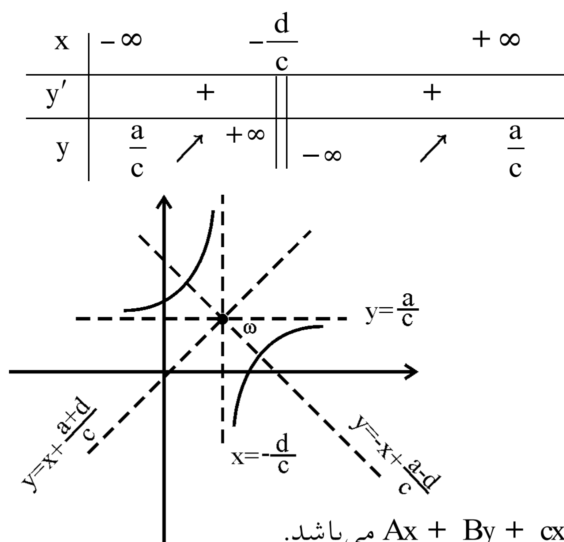
$$\begin{cases} y = x + \dfrac{a+d}{c} \\ y = -x + \dfrac{a-d}{c} \end{cases}$$

۱۵ـ جدول تغییرات تابع و نمودار تابع به یکی از دو صورت زیر است.

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$\frac{a}{c}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{a}{c}$

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	$\frac{a}{c}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$\frac{a}{c}$





۱۶ـ معادله‌ی گسترده‌ی تابع هموگرافیک به صورت $Ax + By + cxy + d = 0$ می‌باشد.

مثال: مرکز تقارن تابع $x - 2y + xy + 1 = 0$ را بیابید؟

$$y(x-2) = -x - 1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{-x+2} \quad \Rightarrow \omega \left|\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}\right.$$

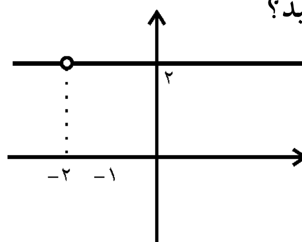
۱۷ـ هرگاه در تابع $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$، $c = 0$ و $d \neq 0$ باشد تابع، هموگرافیک نبوده و تبدیل به یک خط راست (افقی یا قائم یا مایل) می‌شود که معادله‌اش عبارتست از:

$$y = \frac{ax+b}{d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$$

۱۸ـ هرگاه در تابع $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$، $ad - bc = 0$ شود، در این صورت تابع بازهم هموگرافیک نبوده و تابع به تابع ثابت که در یک نقطه منفصل است، تبدیل می‌شود (خطی افقی با یک سوراخ)

مثال: نمودار $y = \dfrac{2x+4}{x+2}$ را رسم کنید؟

$$y = \frac{2(x+2)}{x+2} = \begin{cases} 2 & ,(x \neq -2) \\ \text{تعریف نشده} & ,(x = -2) \end{cases}$$



۱۹ـ تابع هموگرافیک نوعی هذلولی مایل است.

IV) بررسی نمودار توابع به صورت $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{b'x+c'}$ $(b' \neq 0 , a \neq 0)$

۱) دامنه‌ی این توابع عبارتست از: $R - \{-\frac{c'}{b'}\}$ و تابع در دامنه‌اش پیوسته و مشتق‌پذیر است.

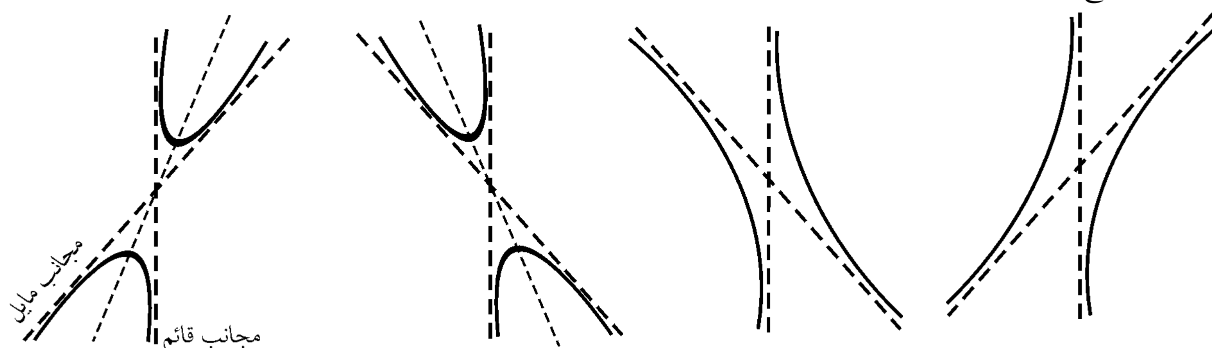
۲) این تابع همواره دارای دو مجانب، یکی قائم به معادله‌ی $x = \frac{-c'}{b'}$ و دیگری مایل است که معادله آن از تقسیم صورت بر مخرج به دست می‌آید و شیبش برابر $\frac{a}{b'}$ است.

۳) این تابع همواره دارای یک مرکز تقارن است که محل برخورد مجانبهایش می‌باشد. لذا ω به طول $\frac{-c'}{b'}$ مرکز تقارن تابع می‌باشد طول ω، همان عدد مجانب قائم است و برای محاسبه‌ی عرض آن، طول ω را در معادله‌ی مجانب مایل یا در هوپیتال تابع قرار می‌دهیم.

۴) مشتق این تابع، همواره یا دو جواب متمایز دارد و یا جواب ندارد.

۵) در حالتی که مشتق جواب نداشته باشد تابع هیچگونه اکسترممی ندارد ولی در حالتی که مشتق دو جواب داشته باشد، تابع دارای یک Max نسبی و یک Min نسبی خواهد بود.

۶) شکل تابع به یکی از چهار صورت زیر است.



(۱) (۲) مشتق دارای دو ریشه (۳) (۴)مشتق ریشه نداشته باشد

۷) برد تابع در حالات (۱) و (۲) عبارتست از: $R_f = (-\infty, Max] \cup [Min, +\infty)$ و در حالات (۳) و (۴)، برابر R است، دقت داشته باشید که همواره عرض نقطه‌ی Max تابع از عرض نقطه‌ی Min آن کوچکتر است.

۸) معادله‌ی هوپیتال تابع فوق عبارتست از $y = \frac{۲ax+b}{b'} = \frac{۲a}{b'}x + \frac{b}{b'}$ که معادله‌ی یک خط راست است و در صورتی که تابع دارای ماکزیمم و می‌نیمم باشد این خط از نقاط Max و Min و مرکز تقارن تابع می‌گذرد.

به طور کلی در هر تابع گویا مانند: $y = \frac{g(x)}{h(x)}$، مختصات نقاط اکسترمم نسبی تابع در هوپیتال تابع، یعنی $y = \frac{g'(x)}{h'(x)}$ صدق می‌کند.

تست: هرگاه $M \left| \begin{matrix} -۳ \\ -۴ \end{matrix} \right.$ **نقطه‌ی Max تابع** $y = \frac{x^۲+ax+b}{x+۱}$ **باشد، a+b کدام است؟**

۱) ۱۳ ۲) ۷ ۳) ۱- ۴) ۸

روش اول: $M \left| \begin{matrix} -۳ \\ -۴ \end{matrix} \right.$ در خود تابع $\Rightarrow -۴ = \frac{۹-۳a+b}{-۲} \Rightarrow ۳a - b = ۱$

$f'(x) = \frac{x^۲ + ۲x + a - b}{(x+۱)^۲} = ۰ \overset{x=-۳}{\Rightarrow} f'(-۳) = \frac{۹-۶+a-b}{۴} = ۰ \Rightarrow a - b = -۳$

$\Rightarrow a = ۲ , b = ۵ \Rightarrow a + b = ۷$

روش دوم: معادله‌ی هوپیتال این تابع عبارتست از: $y = ۲x + a$، چون مختصات M هم در معادله‌ی تابع و هم در معادله‌ی هوپیتال تابع صدق می‌کند پس:

$$\begin{cases} -۴ = -۶ + a \\ -۴ = \dfrac{۹ - ۳a + b}{-۲} \end{cases} \Rightarrow a = ۲ \quad , b = ۵ \quad \Rightarrow a + b = ۷$$

تست: معادله‌ی مکان هندسی مرکز تقارن تابع $y = \dfrac{ax^۲ - x + ۱}{x + a}$**، وقتی a در R تغییر می‌کند کدام است؟**

۱) $y = \dfrac{x-۲}{x+۱}$ ۲) $y = \dfrac{x+۲}{x-۱}$ ۳) $y = -۲x^۲ - ۱$ ۴) $y = ۲x^۲$

حل: خط $x = -a$ مجانب قائم تابع (طول مرکز تقارن تابع) است. برای به دست آوردن عرض مرکز تقارن، از هوپیتال تابع استفاده می‌کنیم. $y = \dfrac{۲ax - ۱}{۱} \Rightarrow y = ۲a(-a) - ۱ = -۲a^۲ - ۱$

پس مختصات مرکز تقارن تابع عبارتست از: $\omega \left| \begin{array}{l} x = -a \\ y = -۲a^۲ - ۱ \end{array} \right.$، برای تعیین مکان هندسی، a را حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} x = -a \Rightarrow a = -x \\ y = -۲a^۲ - ۱ \end{cases} \Rightarrow y = -۲(-x)^۲ - ۱ \quad \Rightarrow y = -۲x^۲ - ۱$$

۹ـ برای محاسبه‌ی عرضهای نقاط Max و Min نسبی تابع فوق، بدون استفاده از مشتق، معادله‌ی تابع را طرفین وسطین کرده، همه‌ی جملات را یک طرف آورده، معادله را برحسب x مرتب نموده، سپس دلتای معادله‌ی درجه‌ی دوم به دست آمده را (که معادله‌ای از درجه‌ی دوم برحسب y می‌شود) حساب کرده، برابر صفر قرار می‌دهیم، ریشه‌های این معادله، عرضهای نقاط Max و Min نسبی تابع خواهند بود.البته دقت داشته باشید که اگر بخواهیم عرضهای نقاط Max و Min نسبی تابع را با استفاده از مشتق به دست آوریم بایستی مشتق گرفته، آنرا صفر قرار داده تا طولهای نقاط Max و Min نسبی تابع به دست آیند، سپس این طولها را در خود تابع قرار داده تا عرضهای این نقاط به دست آیند که البته این کار کمی طولانی و وقت‌گیر است.

تست: هرگاه عرضهای نقاط Max و Min نمودار تابع به معادله‌ی $y = \dfrac{x^۲ + ax + b}{x}$ **برابر ۰ و ۴ باشند** $a - b$ **کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

حل: معادله‌ی تابع $\xRightarrow{\text{طرفین وسطین}} xy = x^۲ + ax + b \Rightarrow x^۲ + (a - y)x + b = ۰ \Rightarrow \Delta = ۰$

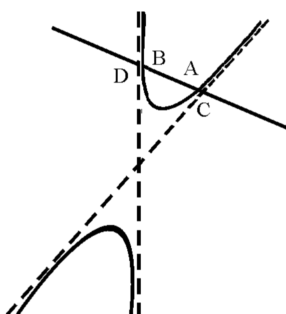
$(a - y)^۲ - ۴b = ۰ \Rightarrow y^۲ - ۲ay + a^۲ - ۴b = ۰ \Rightarrow$ $y = ۴\ ,\ y = ۰$ ریشه‌های معادله‌اند، پس در آن صدق می‌کنند.

$$\Rightarrow \begin{cases} a^۲ - ۴b = ۰ \\ ۱۶ - ۸a + a^۲ - ۴b = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = ۱ \end{cases} \Rightarrow a - b = ۱$$

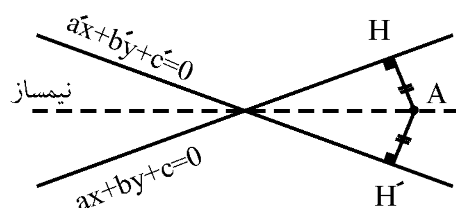
۱۰ـ توابع فوق نقطه‌ی عطف ندارند.

۱۱ـ در توابع فوق هرگاه ریشه‌ی مخرج کسر، بین دو ریشه‌ی صورت کسر باشد (به شرط آنکه صورت دو ریشه داشته باشد)، تابع اکسترمم ندارد و در غیر این صورت تابع دو اکسترمم دارد.

۱۲ـ هرگاه هر خط دلخواهی، منحنی تابع را در نقاط A و B و مجانبها را در نقاط C و D قطع کند (مطابق شکل زیر) آنگاه همواره $AC = BD$ می‌باشد.



۱۳ـ نیمسازهای زوایای بین مجانبهای هر هذلولی بالاخص منحنی فوق محورهای تقارن آن می‌باشند.



بـرای یـافتن معـادلات محـورهای تـقارن، کـافی است ابـتدا معـادلات مجانبهای منحنی را به دست آورده، سپس معادلات نیمسازهای زوایای بین آنها را بنویسیم. در واقع باید بدانیم که در مورد دو خط معادلات نیمسازها عبارتند از:

$$AH = AH' \Rightarrow \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

یادآوری: هر نقطه واقع بر نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

V) بررسی نمودار توابع به صورت $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ $\quad (a' \neq 0 \ , \ \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'})$

۱) دامنه‌ی تابع عبارتست از {ریشه یا ریشه‌های مخرج} $-$ R و تابع در دامنه‌اش، همواره پیوسته و مشتق‌پذیر است.

۲) برحسب تعداد ریشه‌های مخرج، این تابع دارای ۲ یا ۱ یا ۰ مجانب قائم است.

۳) این تابع مجانب مایل ندارد.

۴) این تابع، همواره یک مجانب افقی به معادله‌ی $y = \frac{a}{a'}$ دارد.

۵) مشتق این نوع توابع را می‌توان از دستور

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} x^2 + 2\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{(a'x^2+b'x+c')^2}$$

۶ـ معادله‌ی هوپیتال تابع فوق عبارتست از $y = \frac{2ax+b}{2a'x+b'}$ که معادله‌ی یک تابع هموگرافیک است، این معادله از نقاط Max و Min نسبی تابع (در صورت وجود) می‌گذرد، یعنی مختصات این نقاط در هوپیتال تابع صدق می‌کنند.

۷ـ برای تعیین حاصلضرب عرضهای نقاط اکسترمم تابع، بدون استفاده از مشتق، ابتدا معادله را طرفین وسطین کرده، همه‌ی جملات را یک طرف آورده و معادله را برحسب x مرتب نموده، Δی آنرا برابر صفر قرار می‌دهیم، ریشه‌های $\Delta = 0$، همان عرضهای نقاط اکسترمم تابع خواهند بود.

در این حالت نیز می‌توان عرضهای نقاط اکسترمم تابع را به کمک مشتق نیز محاسبه کرد.

تست: عرض نقطه‌ی Max نسبی تابع $y = \frac{x^۲ + ax + ۲}{x - ۱}$ **برابر ۲- می‌باشد، a کدام است؟**

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۱-

حل: $x^۲ + ax + ۲ - xy + y = ۰ \Rightarrow x^۲ + (a-y)x + y + ۲ = ۰$

$\Delta = ۰ \Rightarrow (a-y)^۲ - ۴(y+۲) = ۰ \overset{y=-۲}{\Rightarrow} (a+۲)^۲ = ۰ \Rightarrow a = -۲$

۸ـ حاصلضرب عرضهای نقاط اکسترمم تابع (در صورت وجود) برابر است با $\frac{\text{دلتای صورت کسر}}{\text{دلتای مخرج کسر}}$ یعنی:

$y_{Max} \times y_{Min} = \frac{b^۲ - ۴ac}{b'^۲ - ۴a'c'}$

۹ـ هرگاه خط $y = k$، نمودار تابع فوق را در نقاط A و B قطع کند، معادله‌ی مکان هندسی وسط پاره‌خطهای AB، وقتی که K تغییر می‌کند، برابر است با معادله‌ی هوپیتال تابع.

۱۰ـ هرگاه $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد، خط $x = \frac{-b}{۲a}$ یا $x = \frac{-b'}{۲a'}$، محور تقارن تابع می‌باشد.

۱۱ـ هرگاه $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ باشد، تابع محور تقارن ندارد.

۱۲ـ هرگاه منحنی مجانب قائم نداشته باشد آنگاه: $y_{Max} > y_{Min}$ و هرگاه منحنی مجانب قائم داشته باشد آنگاه: $y_{Max} < y_{Min}$

برحسب تعداد ریشه‌های مخرج خود تابع، این توابع به ۳ دسته تقسیم می‌شوند.

حالت اول: مخرج تابع ریشه نداشته باشد.

الف) هرگاه Δی مخرج تابع کوچکتر از صفر باشد (مخرج تابع ریشه نداشته باشد) و $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ $(\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq ۰$، یعنی صورت مشتق معادله‌ای از درجه‌ی دوم باشد) آنگاه تابع دارای ویژگیهای زیر است.

۱ـ تابع دارای دو اکسترمم نسبی (یا مطلق) می‌باشد.

۲ـ تابع دارای سه نقطه‌ی عطف واقع بر یک استقامت می‌باشد.

۳ـ تابع محور تقارن ندارد.

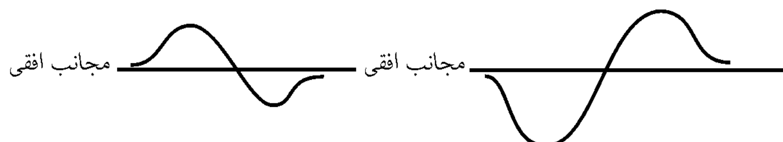
۴ـ اگر تابع در این حالت مرکز تقارن داشته باشد، مرکز تقارن تابع محل تلاقی مجانب افقی با نمودار تابع می‌باشد (عرض مرکز تقارن $y = \frac{a}{a'}$ است)

تست: مرکز تقارن تابع $y = \frac{(x+۱)^۲}{x^۲+۱}$، **کدام است؟**

۱) $(۱ , ۰)$ ۲) $(-۱ , ۰)$ ۳) $(۰ , ۱)$ ۴) $(۰ , -۱)$

حل: $\begin{cases} \Delta_{\text{مخرج}} < ۰ \\ y = ۱ \ \text{مجانب افقی} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{(x+۱)^۲}{x^۲+۱} \\ y = ۱ \end{cases} \Rightarrow x^۲ + ۱ = x^۲ + ۲x + ۱ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow \omega \begin{vmatrix} ۰ \\ ۱ \end{vmatrix}$

۵ـ نمودار تابع در این حالت به یکی از دو صورت زیر می‌باشد.



۶ـ نمودار تابع، مجانب افقیش را قطع می‌کند.

۷ـ برد تابع در این حالت عبارتست از: $R_f = [\ y_{Min} \ \ , y_{Max}\ ]$

ب) هرگاه دلتای مخرج تابع، کوچکتر از صفر باشد (مخرج تابع ریشه نداشته باشد) و $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ ($\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ۰$، یعنی صورت مشتق، معادله‌ای از درجه‌ی اول باشد)، آنگاه تابع دارای ویژگیهای زیر است.

۱ـ تابع دارای یک محور تقارن به معادله‌ی $x = \frac{-b}{۲a}$ یا $x = \frac{-b'}{۲a'}$ می‌باشد.

۲ـ تابع دارای یک اکسترمم نسبی (مطلق) می‌باشد (یعنی فقط یک Max یا یک Min نسبی (مطلق) دارد)

۳ـ نقطه‌ی اکسترمم تابع روی محور تقارن می‌باشد.

۴ـ تابع در این حالت دارای دو عطف می‌باشد.

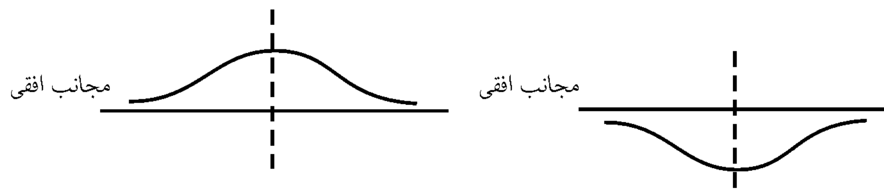
تست: تابع $y = \frac{x^۲ + ۲x + ۲}{x^۲ + ۲x + ۵}$ چند عطف دارد؟

۱) ۳　　۲) ۲　　۳) ۱　　۴) ۰

حل: $\begin{cases} \text{مخرج}\ \Delta = ۴ - ۲۰ = -۱۶ < ۰ \\ \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \end{cases}$ ⇐ تابع دو عطف دارد.

۵ـ نمودار تابع، مجانب افقی را قطع نمی‌کند.

۶ـ نمودار تابع در این حالت به یکی از دو صورت زیر می‌باشد.



۷ـ برد تابع در این دو حالت به ترتیب عبارتست از: $R_f = (\frac{a}{a'}, y_{Max}]$, $R_f = [y_{min}, \frac{a}{a'})$

حالت دوم: مخرج خود تابع ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

الف) هرگاه دلتای مخرج کسر برابر صفر باشد (مخرج ریشه‌ی مضاعف داشته باشد) و $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$، آنگاه تابع دارای ویژگیهای زیر است.

۱ـ تابع علاوه بر مجانب افقیش، یک مجانب قائم نیز دارد.

۲ـ تابع یک اکسترمم دارد.

۳ـ تابع یک عطف دارد.

تست: تابع $y = \frac{x^۲ + ۵x + ۲}{x^۲ + ۲x + ۱}$ چند عطف و چند اکسترمم دارد؟

۱) ۱ و ۱　　۲) ۳ و ۲　　۳) ۰ و ۱　　۴) ۰ و ۰

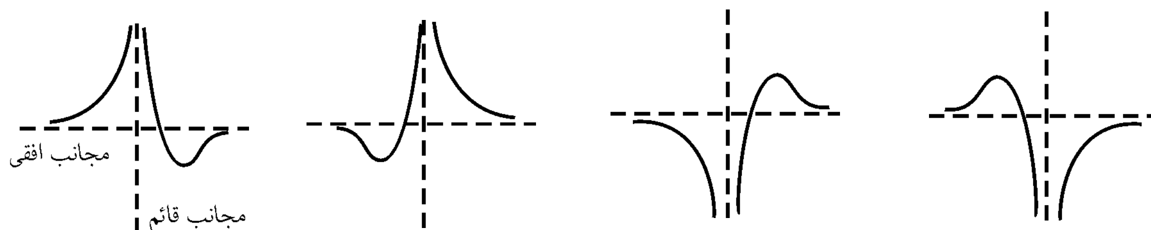
حل: $\begin{cases} \text{مخرج}\ \Delta = ۴ - ۴ = ۰ \\ \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'} \end{cases}$ ⇐ تابع یک عطف و یک اکسترمم دارد.

۴ـ نمودار تابع، مجانب افقی‌اش را قطع می‌کند.

۵ـ تابع محور تقارن ندارد.

۶ـ تابع مرکز تقارن ندارد.

۷ـ نمودار تابع به یکی از صورتهای زیر است.



$ab' - ba' > 0$ $\quad$ $ab' - ba' < 0$ $\quad$ $ab' - ba' < 0$ $\quad$ $ab' - ba' > 0$

۸ـ انفصال تابع در مجانب قائمش، از نوع انفصال مضاعف می‌باشد.

ب) هرگاه دلتای مخرج کسر برابر صفر باشد و $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$، آنگاه تابع دارای ویژگیهای زیر است.

۱ـ تابع علاوه بر مجانب افقیش، یک مجانب قائم دارد.

۲ـ تابع دارای محور تقارنی به معادله‌ی $x = \frac{-b}{2a}$ می‌باشد.

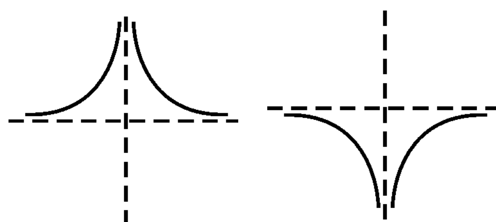
۳ـ نمودار تابع، مجانب افقی‌اش را قطع نمی‌کند.

۴ـ تابع اکسترمم ندارد.

۵ـ تابع عطف ندارد.

۶ـ تابع مرکز تقارن ندارد.

۷ـ نمودار تابع به یکی از دو صورت زیر است:



۸ـ انفصال تابع در مجانب قائمش، از نوع انفصال مضاعف می‌باشد.

حالت سوم: مخرج خود تابع دارای دو ریشهٔ متمایز باشد.

الف) هرگاه دلتای مخرج خود تابع، بزرگتر از صفر باشد (مخرج دو ریشه‌ی متمایز داشته باشد) و $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$، آنگاه تابع دارای ویژگیهای زیر است.

۱ـ تابع در این حالت یا دو اکسترمم دارد یا اینکه اکیداً یکنوا بوده و اصلاً اکسترمم ندارد.

۲ـ تابع دارای یک عطف می‌باشد.

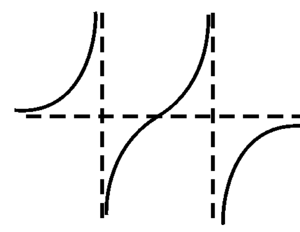
۳ـ تابع مرکز تقارن ندارد.

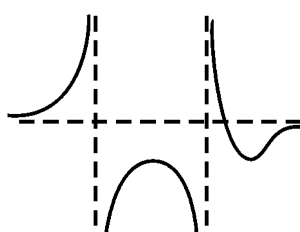
۴ـ نمودار تابع مجانب افقی‌اش را قطع می‌کند.

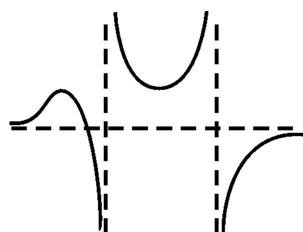
۵ـ تابع محور تقارن ندارد.

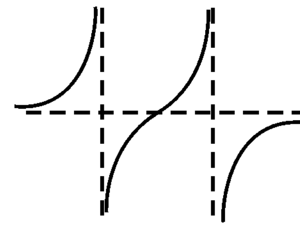
۶ـ تابع علاوه بر مجانب افقیش، دو مجانب قائم نیز دارد.

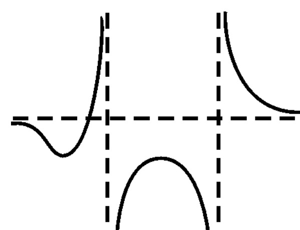
۷ـ نمودار تابع به یکی از صورتهای زیر است.

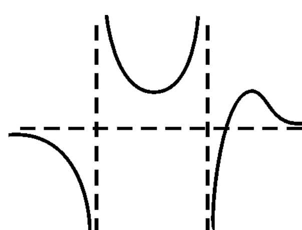

$ab' - ba' > 0$


$ab' - ba' > 0$


$ab' - ba' > 0$


$ab' - ba' < 0$


$ab' - ba' < 0$


$ab' - ba' < 0$

۸ـ انفصال تابع در مجانب قائم‌اش، از نوع انفصال ساده است.

ب) اگر دلتای مخرج کسر، بزرگتر از صفر باشد و $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$، آنگاه تابع دارای ویژگیهای زیر است.

۱ـ تابع علاوه بر مجانب افقیش، دو مجانب قائم دارد.

۲ـ تابع دارای یک محور تقارن به معادله‌ی $x = \frac{-b}{2a}$ است.

تست: معادله‌ی محور تقارن تابع $y = \frac{5x^2 + 2x + 3}{10x^2 + 4x - 1}$ کدام است؟

۱) $x = -1$ ۲) $x = \frac{1}{5}$ ۳) $x = \frac{1}{2}$ ۴) $x = \frac{-1}{5}$

حل: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow x = \frac{-2}{10} \Rightarrow x = \frac{-1}{5}$

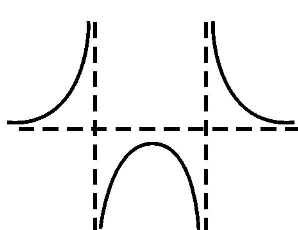
۳ـ نمودار تابع، مجانب افقی‌اش را قطع نمی‌کند.

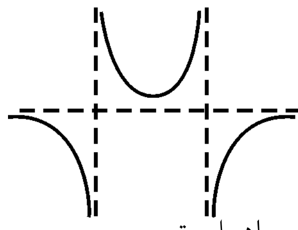
۴ـ تابع مرکز تقارن ندارد.

۵ـ تابع نقطه‌ی عطف ندارد.

۶ـ تابع دارای یک اکسترمم می‌باشد.

۷ـ نمودار تابع به یکی از دو صورت زیر می‌باشد.





۸ـ انفصال تابع در مجانب قائمش، از نوع انفصال ساده است.

$ac' - ca' < 0$ $\qquad$ $ac' - ca' > 0$

رسم نمودار

الف) رسم نمودار توابع گویا (هر تابع کسری را که صورت و مخرجش دو چند جمله‌ای باشند، تابع گویا می‌گویند) برای رسم نمودار توابع کسری مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم.

۱ـ دامنه‌ی تعریف تابع را مشخص می‌کنیم.

۲ـ مجانبهای تابع را پیدا می‌کنیم.

۳ـ از تابع مشتق گرفته و نقاطی که مشتق در آن نقاط صفر می‌شود را می‌یابیم.

۴ـ نقاط برخورد منحنی با محور xها ($y = 0$) و با محور yها ($x = 0$) را به دست می‌آوریم (این عمل الزامی نیست)

۵ـ جدول تغییرات (جدول رفتار) تابع را تشکیل می‌دهیم.

۶ـ در دستگاه مختصات، ابتدا مجانبها و سپس نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

مثال: مطلوبست جدول تغییرات و رسم نمودار توابع زیر:

۱) $y = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

$y = \dfrac{x^2 - 4x + 2}{(x-1)^2}$

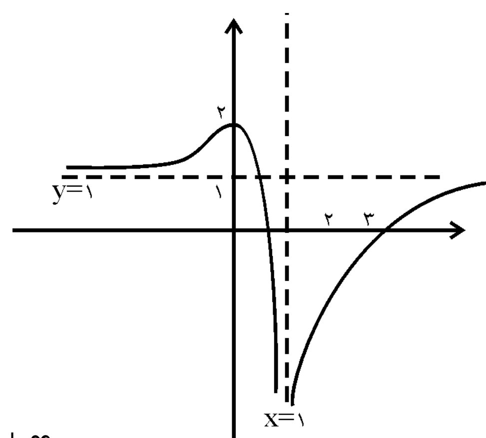
۱) $D_f = R - \{1\}$

۲) $x = 1$ مجانب قائم (انفصال مضاعف) , $y = 1$ مجانب افقی

۳) $y' = \dfrac{2x}{(x-1)^3} = 0 \Rightarrow x = 0$

۴) $x = 0 \Rightarrow y = 2$

$y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$



۵)

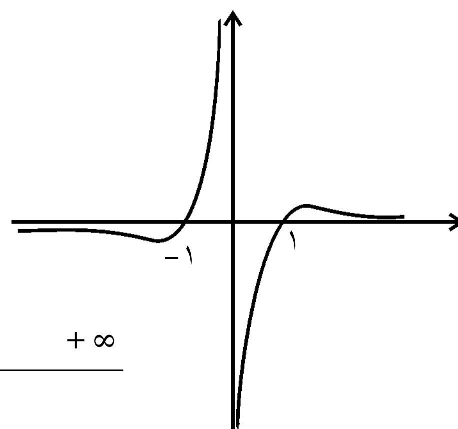
x	$-\infty$		0		$2-\sqrt{2}$		1		$2+\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		+	0	−		−	‖	+		+	
y	۱	↗	۲	↘	۰	↘	‖	↗	۰	↗	۱
			Max نسبی			$-\infty$	‖	$-\infty$			

۲) $y = \frac{x^۲ - ۱}{x^۳}$

۱) $D_f = R - \{۰\}$

۲) $x = ۰$ مجانب قائم (انفصال ساده) $y = ۰$ مجانب افقی

۳) $y' = \frac{۲x(x^۳) - ۳x^۲(x^۲ - ۱)}{x^۶} = \frac{-x^۲ + ۳}{x^۴} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{۳} \\ y = -\sqrt{۳} \end{cases}$



۴)

x	$-\infty$		$-\sqrt{۳}$		-۱		۰		۱		$\sqrt{۳}$		$+\infty$
y′		−	۰	+			‖		+		۰	−	
y	۰	↘	$\frac{-۲\sqrt{۳}}{۹}$ Min نسبی	↗	۰	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	۰	↗	$\frac{۲\sqrt{۳}}{۹}$ Max نسبی	↘	۰

دقت داشته باشید که تابع داده شده تابعی فرد بوده و لذا تابع (همانطوری که دیده می‌شود) بایستی نسبت به مبدأ مختصات، تقارن داشته باشد.

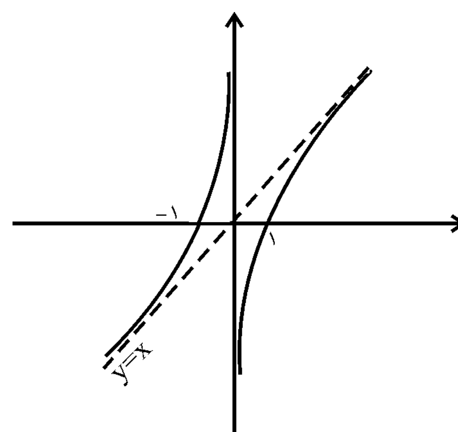
۳) $y = \frac{x^۲ - ۱}{x}$

۱) $D_f = R - \{۰\}$

۲) $x = ۰$ مجانب قائم (انفصال ساده), $y = x$ مجانب مایل

۳) $y = x - \frac{۱}{x} \Rightarrow y' = ۱ + \frac{۱}{x^۲} > ۰$

۴) $y = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$



۵)

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y′		+			‖		+		
y	$-\infty$	↗	۰	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	۰	↗	$+\infty$

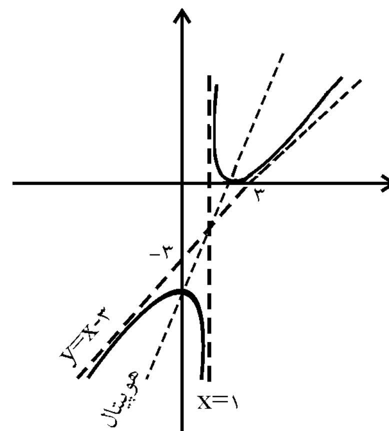
۴) $y = \frac{x^۲ - ۴x + ۴}{x - ۱}$

۱) $D_f = R - \{۱\}$

۲) $x = ۱$ مجانب قائم (انفصال ساده) , $y = x - ۳$ مجانب مایل

۳) $y' = \frac{x^۲ - ۲x}{(x - ۱)^۲} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱ \end{cases}$

۴) $x = ۰ \Rightarrow y = -۴$, $y = ۰ \Rightarrow (x - ۲)^۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$ بر محور xها مماس



۵)

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
y′		+	۰	−	‖	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	-۴ Max نسبی	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	۰ Min نسبی	↗	$+\infty$

معادله هوپیتال تابع عبارتست از $y = \frac{2x-4}{1} = 2x - 4$، ملاحظه می‌شود که مختصات نقاط Max و Min نسبی تابع در معادله‌ی هوپیتال تابع صدق می‌کنند، در شکل نمودار هوپیتال تابع به صورت نقطه‌چین رسم شده است.

۵) $y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x - 3}$

۱) $D_f = R - \{1, -3\}$

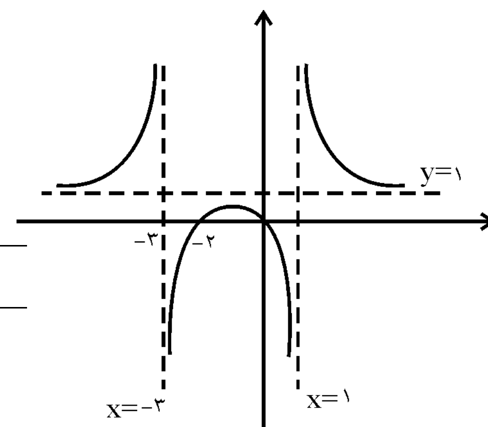
۲) $x = 1$, $x = -3$ مجانبهای قائم (انفصال ساده) $y = 1$, مجانب افقی

۳) $y' = \frac{-6x - 6}{(x^2 + 2x - 3)^2} = 0 \Rightarrow x = -1$

۴) $x = 0 \Rightarrow y = 0$ و $y = 0 \Rightarrow x = 0$ یا -2

۵)

x	$-\infty$	-3		-1		1		$+\infty$
y'	+	‖	+	0	−	‖	−	
y	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow$	$\frac{1}{4}$ (Max نسبی)	$\searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	1



۶) $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x + 3}$

۱) $D_f = R$

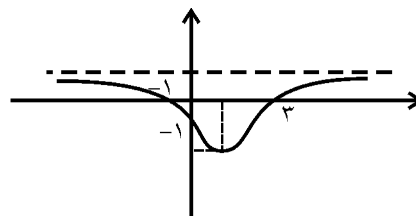
۲) $y = 1$ تابع مجانب قائم و مایل ندارد، مجانب افقی

۳) $y' = \frac{0x^2 + 12x - 12}{(x^2 - 2x + 3)^2} = 0 \Rightarrow x = 1$ (مشتق را با استفاده از فرمول دترمینانی حساب کرده‌ایم)

۴) $x = 0 \Rightarrow y = -1$, $y = 0 \Rightarrow x = -1$ و 3

۵)

x	$-\infty$	-1		1		3		$+\infty$
y'			−	0	+			
y	$1 \searrow$	0	$\searrow$	-2 (Min نسبی)	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1



۷) $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

۱) $D_f = R$

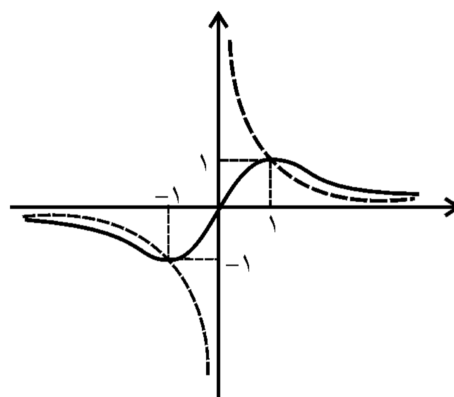
۲) $y = 0$ تابع مجانب قائم و مایل ندارد، مجانب افقی

۳) $y' = \frac{2 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

۴) $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$

۵)

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		−	0	+		+	0	−	
y	0	$\searrow$	-1 (Min نسبی)	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1 (Max نسبی)	$\searrow$	0



معادله هوپیتال تابع عبارتست از $y = \frac{۲}{۲x} = \frac{۱}{x}$، ملاحظه می‌شود که مختصات نقاط Max و Min نسبی تابع در هوپیتال تابع صدق می‌کنند، در شکل، نمودار هوپیتال تابع به صورت نقطه‌چین رسم شده است.

۸) $y = \frac{(x+۱)^۳}{x^۲}$

۱) $D_f = R - \{۰\}$

۲) $x = ۰$ مجانب قائم (انفصال مضاعف)

$y = \frac{x^۳+۳x^۲+۳x+۱}{x^۲} = x + ۳ + \frac{۳}{x} + \frac{۱}{x^۲} \Rightarrow y = x + ۳$ مجانب مایل

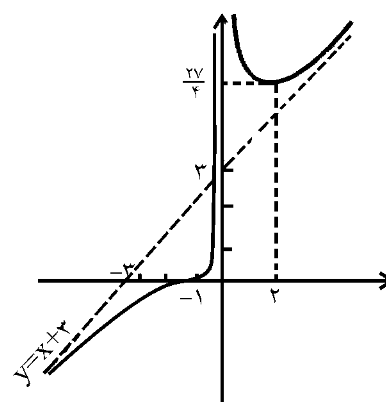
۳) $y' = \frac{x(x+۱)^۲(x-۲)}{x^۴} = \frac{(x+۱)^۲(x-۲)}{x^۳} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ & \text{طول عطف (ریشه‌ی مضاعف مشتق)} \\ x = ۲ & \text{طول اکسترمم نسبی} \end{cases}$

۴) $y = ۰ \Rightarrow x = -۱$

۵)

x	$-\infty$		-۱		۰		۲		$+\infty$
y′		+	۰	+	‖	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	۰	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{۲۷}{۴}$	↗	$+\infty$

Min نسبی



ب) رسم نمودار توابع اصم (گنگ)

برای رسم نمودار توابع گنگ، مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم.

۱) دامنه‌ی تعریف تابع را پیدا می‌کنیم.

۲) مجانبهای تابع را در صورت وجود می‌یابیم.

۳) از تابع مشتق گرفته:

الف) نقاطی که مشتق صفر می‌شود (مماس افقی) (اکسترممهای نسبی یا عطف افقی) را پیدا می‌کنیم.

ب) نقاطی که مشتق ∞ می‌شود (مماس قائم) (نقاط بازگشت، عطف قائم و توقف) را می‌یابیم.

۴ـ نقاط برخورد تابع را با محورها بدست می‌آوریم (انجام این مرحله الزامی نیست)

۵ـ جدول تغییرات تابع را تشکیل می‌دهیم.

۶ـ در دستگاه مختصات، ابتدا مجانبها و سپس نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

مثال: مطلوبست جدول تغییرات و رسم نمودار توابع اصّم زیر:

۱) $y = x + \sqrt{x^۲ - ۲x}$

۱) $D_f = (-\infty, ۰] \cup [۲, +\infty)$

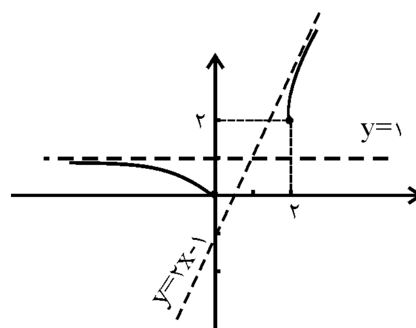
۲) هم ارزی $\Rightarrow y = x + |x-۱| \rightarrow \begin{cases} x \to -\infty \Rightarrow y = ۱ & \text{مجانب افقی} \\ x \to +\infty \Rightarrow y = ۲x - ۱ & \text{مجانب مایل} \end{cases}$ تابع مجانب قائم ندارد،

۳) $y' = ۱ + \frac{۲(x-۱)}{۲\sqrt{x^۲ - ۲x}} = \frac{\sqrt{x^۲ - ۲x} + x - ۱}{\sqrt{x^۲ - ۲x}} = ۰ \Rightarrow$ جواب ندارد , $y' \to \infty \Rightarrow A(۰,۰)$, $B(۲,۲)$ نقاط توقف

۴) $x = ۰ \Leftrightarrow y = ۰$

۵)

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
y′		−	∞	−	∞	+	
y	۱	↘	۰		۲	↗	$+\infty$



۲) $y = \frac{x^۲}{\sqrt{x^۲ - ۱}}$

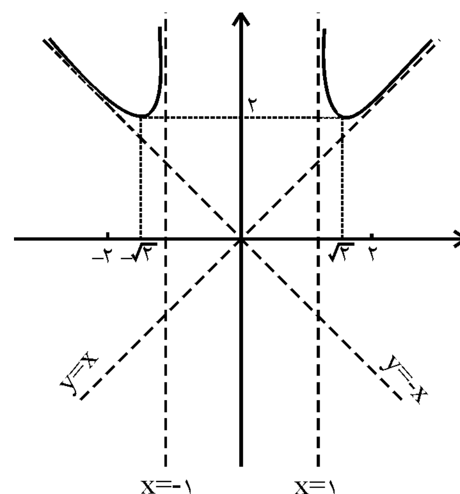
۱) $D_f = (-\infty, -۱) \cup (۱, +\infty)$

۲) $x = \pm ۱$ مجانبهای قائم , $y = \frac{x^۲}{|x|} = |x| \Rightarrow \begin{cases} x \to +\infty \Rightarrow y = x \\ x \to -\infty \Rightarrow y = -x \end{cases}$ مجانبهای مایل

۳) $y' = \frac{x(x^۲ - ۲)}{(x^۲ - ۱)\sqrt{x^۲ - ۱}} = ۰ \Rightarrow x = ۰, \pm\sqrt{۲}$, $۰ \notin D_f$

۴)

x	$-\infty$	$-\sqrt{۲}$		-۱		۱		$\sqrt{۲}$		$+\infty$
y′	−	۰	+				−	۰	+	
y	$+\infty$ ↘	۲	↗	$+\infty$		$+\infty$	↘	۲	↗	$+\infty$
		Min نسبی						Min نسبی		



۳) $y = \sqrt[۳]{x^۳ - ۳x}$

۱) $D_f = R$

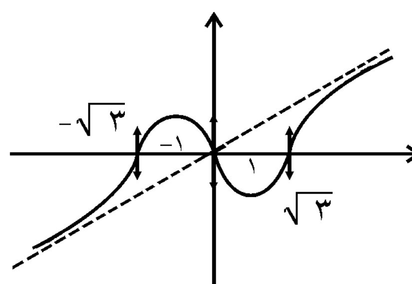
۲) $y = x$ تابع مجانب قائم و افقی ندارد، مجانب مایل

۳) $x = ۰ \Rightarrow y = ۰$ و $y = ۰ \Rightarrow x = ۰$, $\pm\sqrt{۳}$ (طول نقاط عطف قائم) ریشه‌های ساده‌ی زیر رادیکال با فرجه‌ی فرد

۴) $y' = \frac{۳x^۲ - ۳}{۳\sqrt[۳]{(x^۳ - ۳x)^۲}} = \frac{x^۲ - ۱}{\sqrt[۳]{(x^۳ - ۳x)^۲}} = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$

۵)

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
y′		+	۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	$\sqrt[۳]{۲}$	↘	$-\sqrt[۳]{۲}$	↗	$+\infty$
			Max نسبی		Min نسبی		



$4)\ y = 1 + x^2 \mp \sqrt{1 - x^2}$

$y = 1 + x^2 - \sqrt{1 - x^2}$

$1)\ D_f = [-1,1]$

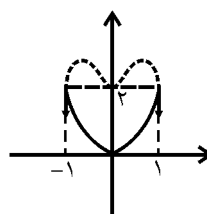
۲) تابع هیچگونه مجانبی ندارد.

$3)\ x = 0 \Leftrightarrow y = 0$

$$4)\ y' = 2x + \frac{2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2x\sqrt{1 - x^2} + x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \quad \Rightarrow x = 0$$

۵)

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	▨		$-$ 0 $+$		▨
y	▨	2 ↘	0 Min نسبی	↗ 2	▨



تذکر: نمودار نقطه‌چین، مربوط به تابع $y = 1 + x^2 + \sqrt{1 - x^2}$ می‌باشد.

ج) رسم نمودار توابع مثلثاتی

برای رسم نمودار توابع مثلثاتی، مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم.

۱) توابع مثلثاتی را معمولاً در یک دوره‌ی تناوب رسم می‌کنیم، اگر دوره‌ی تناوب تابع T باشد، نمودارش را مثلاً در فاصله ی $[0,T]$ یا $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ رسم می‌کنیم.

۲) توابع مثلثاتی فقط ممکن است مجانب قائم داشته باشند (ریشه‌های مخرج) ولی مجانب افقی و مایل ندارند (چراکه وقتی $x \in [0,T]$ یا $x \in [-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ است، x نمی‌تواند به بینهایت میل کند)

۳ـ مشتق تابع راگرفته و نقاطی راکه مشتق صفر می‌شود پیدا می‌کنیم، برای تعیین علامت مشتق در جدول رفتار تابع از روش عدد گذاری، علامت مشتق را تعیین می‌کنیم (البته از این روش تعیین علامت، می‌توانیم همه جا استفاده کنیم)

۴ـ نقاط برخورد تابع با محورها را پیدا می‌کنیم (انجام این مرحله الزامی نیست)

۵ـ جدول رفتار تابع را تشکیل می‌دهیم.

۶ـ ابتدا مجانبها و سپس نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

مثال: مطلوبست جدول رفتار و رسم نمودار تابع:

$1)\ y = \cos^2 x - \cos x \quad , 0 \le x \le 2\pi$

$1)\ D_f = R$

۲) تابع مجانب ندارد.

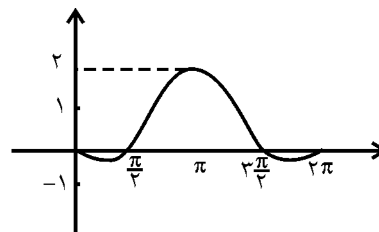
$3)\ y' = -2\sin x \cos x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x\,(-2\cos x + 1) = 0$

$$\begin{cases}\sin x = ۰ & \Rightarrow x = ۰ \quad ,\pi , ۲\pi \\ \cos x = \frac{۱}{۲} & \Rightarrow x = \frac{\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۳}\end{cases}$$

۴) $x = ۰ \Rightarrow y = ۰ \quad , y = ۰ \Rightarrow \cos x(\cos x - ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰, \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}, ۲\pi$

۵)

x	۰		$\frac{\pi}{۳}$		$\frac{\pi}{۲}$		π		$\frac{۳\pi}{۲}$		$\frac{۵\pi}{۳}$		۲π
y′	۰	−	۰	+			۰	−			۰	+	۰
y	۰	↘	$-\frac{۱}{۴}$	↗	۰	↗	۲	↘	۰	↘	$-\frac{۱}{۴}$	↗	۰
			Min نسبی				Max نسبی				Min نسبی		



۲) $y = \frac{۱ + \sin^۲ x}{\cos x} \quad , (۰ \leq x \leq ۲\pi)$

۱) $D_f = R - \{k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in z\} \quad , [۰, ۲\pi] - \{\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}\}$

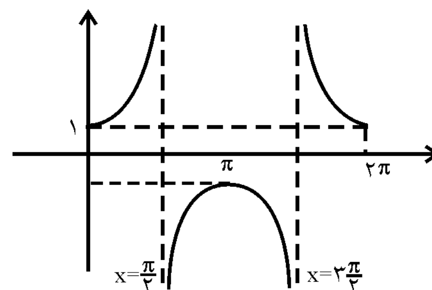
۲) $x = \frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}$ مجانبهای قائم

۳) $y' = \frac{\sin x(۲ + \cos^۲ x)}{\cos^۲ x} = ۰ \Rightarrow x = ۰ \quad , \pi , ۲\pi$

۴) $x = ۰ \Rightarrow y = ۱$ و $y = ۰ \Rightarrow$ جواب ندارد.

۵)

x	۰		$\frac{\pi}{۲}$			π		$\frac{۳\pi}{۲}$			۲π
y′		+	‖	+		۰	−	‖	−		
y	۱	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		-۱	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		۱
						Max نسبی					



۳) $y = \sin x + \tan x \quad , (x \in [۰, ۲\pi])$

۱) $D_f = R - \{k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in z\} \quad , [۰, ۲\pi] - \{\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}\}$

۲) $x = \frac{\pi}{۲}, x = \frac{۳\pi}{۲}$ مجانبهای قائم

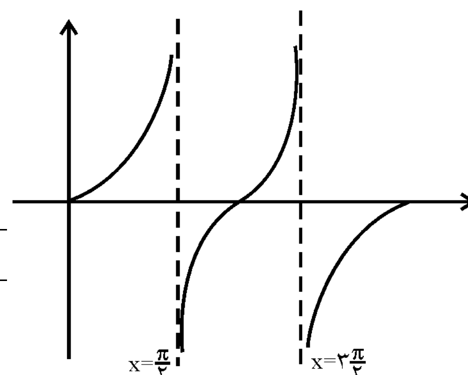
۳) $y' = \cos x + ۱ + \tan^۲ x = \cos x + \frac{۱}{\cos^۲ x} = \frac{۱ + \cos^۳ x}{\cos^۲ x} = ۰$

$\Rightarrow \cos x = -۱ \Rightarrow x = \pi$ ریشه‌ی مضاعف (طول عطف افقی)

۴) $x = ۰ \Rightarrow y = ۰$ و $y = ۰ \Rightarrow x = ۰ , \pi, ۲\pi$

۵)

x	۰		$\frac{\pi}{۲}$			π		$\frac{۳\pi}{۲}$			۲π
y′		+	‖	+		۰	+	‖	+		
y	۰	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		۰	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗		۰



۴) $y=\frac{\tan x-\sqrt{۳}}{\tan x-۱}\quad ,(۰\le x\le \pi)$

۱) $D_f=R-\{k\pi+\frac{\pi}{۴},k\pi+\frac{\pi}{۲}\ |k\in z\}\quad ,[۰,\pi]-\{\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۲}\}$

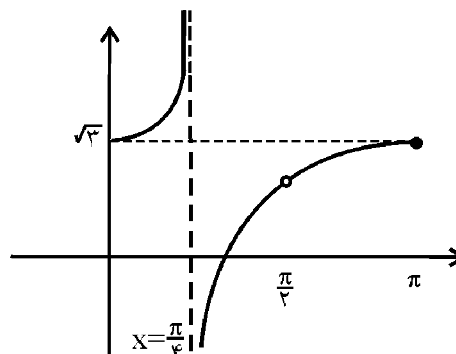
۲) $x=\frac{\pi}{۴}$ مجانب قائم

۳) $y'=\frac{(\sqrt{۳}-۱)(۱+\tan^۲x)}{(\tan x-۱)^۲}>۰$

۴) $x=۰\ \Rightarrow y=\sqrt{۳}$ و $y=۰\ \Rightarrow x=\frac{\pi}{۳}$

۵)

x	۰		$\frac{\pi}{۴}$		$\frac{\pi}{۳}$		$\frac{\pi}{۲}$		π
y′		+	‖	+		+		+	
y	$\sqrt{۳}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	۰	↗	تعریف نشده	↗	$\sqrt{۳}$



۵) $y=\tan\frac{\pi x}{۴}+\cot\frac{\pi x}{۴}\ ۲\quad ,(۰\le x\le ۴)$

۱) $D_f=R-\{۴k,۴k+۲|k\in z\}$ و $[۰,۴]-\{۰,۲,۴\}$

۲) $x=۰\ ,x=۲\ ,x=۴$ مجانبهای قائم

۳) $y=\frac{۲}{\sin\frac{\pi x}{۲}}\quad \Rightarrow y'=\frac{-\pi\cos\frac{\pi x}{۲}}{\sin^۲\frac{\pi x}{۲}}=۰$

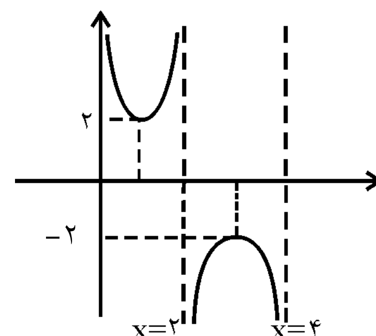
یادآوری: $\tan x+\cot x=\frac{۲}{\sin ۲x}$

$\Rightarrow \cos\frac{\pi x}{۲}=۰\Rightarrow \frac{\pi x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۲}\quad \Rightarrow x=۲k+۱\quad \Rightarrow x=۱,۳$

۴) $y=۰\ \Rightarrow$ جواب ندارد

۵)

x	۰		۱		۲		۳		۴
y′	‖	−	۰	+	‖	+	۰	−	‖
y	‖ $+\infty$	↘	۲	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	−۲	↘	$-\infty$ ‖
			Min نسبی				Max نسبی		



نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y=\sin x-\cos x\quad ,[۰,۲\pi]$

۲) $y=\frac{۱}{\sin x+\cos x}\quad ,[۰,۲\pi]$

۳) $y=۱+\tan ۲x\quad ,[۰,\pi]$

۴) $y=۲\sin^۳x+۳\sin^۲x\quad ,[-\pi,\pi]$

۱) $y=\frac{\sqrt{۱-x^۲}}{x}$

۲) $y=\frac{\sqrt{x^۲+۱}}{x}$

۳) $y=\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}$

۴) $y=x-\sqrt{x}$

۱) $y=\frac{x^۲-۴x-۵}{x^۲-۴x+۵}$

۲) $y=\frac{۵x^۲-۴x}{x^۲-۱}$

۳) $y=\frac{x^۲}{x^۲-۴}$

۴) $y=\frac{x^۲-۲x-۳}{x-۱}$

۵) $y=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\quad ,[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$

۶) $y=\sin^2 x-\sin x-2\quad ,[0,2\pi]$

۷) $y=(2\sin x+1)^2\quad ,[0,2\pi]$

۸) $y=\cos^3 x\quad ,[0,2\pi]$

۹) $y=\dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\quad ,[0,2\pi]$

۱۰) $y=\dfrac{1}{1-\cos x}\quad ,[0,2\pi]$

۵) $y=2x\sqrt{4-x^2}$

۶) $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$

۷) $y=\sqrt[3]{x^2-1}$

۸) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

۹) $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$

۱۰) $y=1+\sqrt{2x-x^2}$

۵) $y=x^4-8x^2+7$

۶) $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+x+1}$

۷) $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$

۸) $y=\dfrac{4x}{(x-2)^2}$

۹) $y=\dfrac{(2x+1)^2}{(x+1)^4}$

۱۰) $y=x^3-3x$

تقارن

در زیر، نکاتی مختصراً راجع به تقارن، مرکز تقارن و محور تقارن منحنی‌های مختلف آورده شده است.

۱ـ قرینهٔ $A\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ نسبت به محور xها عبارتست از نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}x_0\\-y_0\end{matrix}\right.$

۲ـ قرینهٔ $A\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ نسبت به محور yها عبارتست از نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}-x_0\\y_0\end{matrix}\right.$

۳ـ قرینهٔ $A\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ نسبت به مبدأ مختصات عبارتست از نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}-x_0\\-y_0\end{matrix}\right.$

۴ـ قرینهٔ $A\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ نسبت به خط $y=x$ عبارتست از نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}y_0\\x_0\end{matrix}\right.$

۵ـ قرینهٔ $A\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ نسبت به خط $y=-x$ عبارتست از نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}-y_0\\-x_0\end{matrix}\right.$

۶ـ قرینهٔ $A\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ نسبت به نقطهٔ $w\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$ عبارتست از نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}2\alpha-x_0\\2\beta-y_0\end{matrix}\right.$

۷ـ قرینهٔ $A\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ نسبت به خط $ax+by+c=0$ عبارتست از: $A'\left|\begin{matrix}x_0-2a\lambda\\y_0-2b\lambda\end{matrix}\right.$، که در آن $\lambda=\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$

۸ـ قرینهٔ خط $ax+by+c=0$ نسبت به نقطهٔ (α,β) عبارتست از $ax+by=2a\alpha+2b\beta+c$

مطالبی راجع به تعیین مرکز تقارن منحنی‌ها

۱ـ شرط اینکه نقطهٔ $\omega\left|\begin{matrix}\alpha\\\beta\end{matrix}\right.$، مرکز تقارن منحنی $y=f(x)$ باشد، این است که:

$f(x)=f(2\alpha-x)-2\beta$ اگر تابع به صورت ضمنی یعنی به صورت $f(x,y)=0$ معرفی شده باشد، شرط آنکه نقطهٔ $\omega(\alpha,\beta)$ مرکز تقارن تابع باشد این است که داشته باشیم: $f(x,y)=f(2\alpha-x,2\beta-y)$

۲ـ در تابع $y = \frac{ax+b}{a'x+b'}$ $(ab' - ba' \neq 0 \ , \ a' \neq 0)$ محل برخورد مجانبها، یعنی $\omega(\frac{-b'}{a'},\frac{a}{a'})$ مرکز تقارن است.

۳ـ در تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$، نقطهٔ عطف که طول آن $\frac{-b}{3a}$ است، مرکز تقارن منحنی است.

۴ـ مرکز تقارن توابع به صورت $a(x-\alpha)^2 + b(y-\beta)^2 = c$، نقطهٔ $\omega(\alpha,\beta)$ می‌باشد.

۵ـ مرکز تقارن توابع به صورت $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0 \ , \ (a,b \neq 0)$، نقطهٔ $\omega(\frac{-c}{2a},\frac{-d}{2b})$ می‌باشد.

۶ـ مرکز تقارن توابع به صورت $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x+b'}$، محل برخورد مجانب قائم و مجانب مایلش می‌باشد و مختصات آن عبارتست از $\omega(\frac{-b'}{a'} \ , m(\frac{-b'}{a'})+n)$، که در آن $y = mx + n$، معادلهٔ مجانب مایل آن می‌باشد. ضمناً عرض مرکز تقارن را می‌توان با قرار دادن $-\frac{b'}{a'}$ در هوپیتال تابع نیز بدست آورد. $\omega(\frac{-b'}{a'} \ , \frac{2a(-\frac{b'}{a'})+b}{a'}) \rightarrow \omega(\frac{-b'}{a'},\frac{ba'-2ab'}{a'^2})$

معادلهٔ هوپیتال تابع عبارتست از: $y = \frac{2ax+b}{a'}$

۷ـ در توابع به صورت $y = \frac{x^2+px+q}{x^2+p'x+q'}$، اگر $p'(p-p') = 2(q-q')$ باشد. نقطهٔ $\omega \left| \begin{array}{l} -\frac{p'}{2} \\ 1 \end{array} \right.$ مرکز تقارن است.

۸ـ مرکز تقارن توابع به صورت کلی $A(x-\alpha)^{2n} \pm B(y-\beta)^{2m} = c$، نقطهٔ $\omega \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right.$ است.

۹ـ مرکز تقارن توابع به معادلهٔ کلی $f(x) = a_1(x-\alpha)^{2k+1} + a_2(x-\alpha)^{2k-1} + \ldots + \beta$، نقطهٔ $\omega \left| \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right.$ است.

۱۰ـ مرکز تقارن توابع به صورت $y = \alpha x + \beta \pm \sqrt{ax^2+bx+c}$، نقطهٔ $\omega(\frac{-b}{2a},\alpha(\frac{-b}{2a})+\beta)$ است.

۱۱ـ مرکز تقارن تابع $y = (ax+b)^n$، اگر $n = 2k+1$، نقطهٔ $\omega(\frac{-b}{a},0)$ است. در صورت زوج بودن n، تابع مرکز تقارن ندارد.

۱۲ـ در توابع $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$، برای تعیین مرکز تقارن (در صورت وجود) به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\text{I)} \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2ax + by + d = 0 \\ 2cy + bx + e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{(e-d)b}{2ab-2bc} = \frac{e-d}{2(a-c)} \\ y = \frac{-2ae+2cd}{2ba-2bc} = \frac{cd-ae}{ab-bc} \end{cases}$$

اگر در معادلهٔ مقطع مخروطی فوق، $b = 0$ باشد، هر یک از معادلات دستگاه I یک محور تقارن مقطع مخروطی را نشان می‌دهد.

۱۳ـ مرکز تقارن تابع $y = ax + b + \frac{k}{a'x+b'}$ محل برخورد مجانبهایش بوده و به مختصات $\omega(\frac{-b'}{a'} , -\frac{ab'-ba'}{a'})$ می‌باشد.

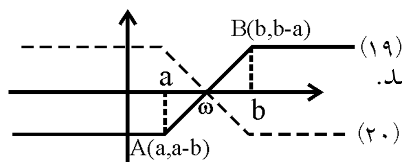
۱۴ـ مرکز تقارن تابع $xy + ax + by + c = 0$، نقطهٔ $\omega\ (-b,-a)$ می‌باشد.

۱۵ـ مرکز تقارن تابع $ax + bxy + cy + d = 0$ نقطهٔ $\omega(\frac{-c}{b},\frac{-a}{b})$ است.

۱۶ـ مرکز تقارن تابع $(ax+b)(a'y+b') = k$، نقطهٔ $\omega(\frac{-b}{a},\frac{-b'}{a'})$ است.

۱۷ـ مرکز تقارن تابع $(ax+by+c)(a'x+b'y+c') = k$، جواب دستگاه $\begin{cases} ax+by+c = 0 \\ a'x+b'y+c' = 0 \end{cases}$ است.

۱۸ـ مرکز تقارن تابع $|x-a|+|y-b|=k$ $(k>0)$ که معادلهٔ مربعی به مرکز $\omega(a,b)$ و به قطر ۲k بوده و قطرهای آن موازی محورهای مختصات می‌باشد، مرکزش یعنی $\omega(a,b)$ می‌باشد.



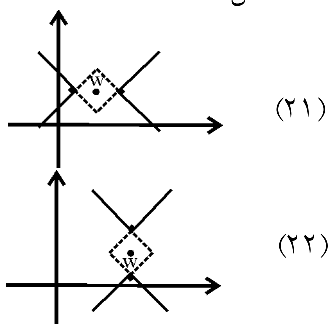
۱۹ـ مرکز تقارن تابع $y=|x-a|-|x-b|$ $(b>a)$ نقطهٔ $\omega\left|\begin{matrix}\frac{a+b}{2}\\ 0\end{matrix}\right.$ می‌باشد.

۲۰ـ مرکز تقارن تابع $y=|x-b|-|x-a|$ $(b>a)$ نقطهٔ $\omega\left|\begin{matrix}\frac{a+b}{2}\\ 0\end{matrix}\right.$ می‌باشد.

۲۱ـ مرکز تقارن تابع $|x-a|-|y-b|=k$ $(k>0)$ نقطهٔ $\omega(a,b)$ می‌باشد. (شکل ۲۱)

۲۲ـ مرکز تقارن تابع $|y-b|-|x-a|=k$ $(k>0)$ نقطهٔ $\omega(a,b)$ می‌باشد. (شکل ۲۲)

۲۳ـ در توابع فرد، $\omega\left|\begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\right.$ مرکز تقارن منحنی است.



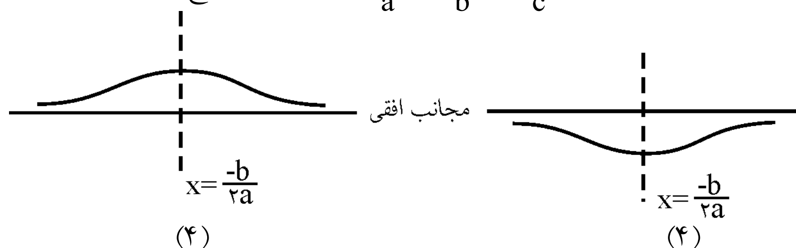
نکاتی راجع به محور تقارن

۱ـ شرط آنکه خط $x=\alpha$ محور تقارن $y=f(x)$ باشد، آن است که $f(x)=f(2\alpha-x)$ باشد اگر تابع به صورت ضمنی $f(x,y)=0$ باشد، خط $x=\alpha$ محور تقارن تابع است اگر و فقط اگر که داشته باشیم: $f(x,y)=f(2\alpha-x\,,\,y)$

۲ـ محور تقارن تابع $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ خط $x=\frac{-b}{2a}$ است.

۳ـ محور تقارن منحنی $x=ay^2+by+c$ $(a\neq 0)$ خط $y=\frac{-b}{2a}$ است.

۴ـ در تابع $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$، هرگاه $ab'-ba'=0$ باشد، خط $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-b'}{2a}$ محور تقارن آن است. در این حالت منحنی فقط دارای یک Max و یک Min است. بنابراین اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد، نمودار تابع یک Max و یک Min دارد.



۵ـ شرط اینکه خط $y=\beta$، محور تقارن تابع $y=f(x)$ باشد، آن است که $2\beta-y=f(x)$ اگر تابع به صورت ضمنی $f(x,y)=0$ باشد، شرط آنکه خط $y=\beta$ محور تقارن تابع باشد آن است که $f(x,y)=f(x\,,\,2\beta-y)$

۶ـ شرط آنکه خط $y=x$ محور تقارن تابع $f(x\,,\,y)=0$ باشد آنستکه $f(x,y)=f(y,x)$

۷ـ شرط آنکه خط $y=-x$ محور تقارن تابع $f(x,y)=0$ باشد آنستکه $f(x,y)=f(-y,-x)$

۸ـ تابع $y=\alpha x+\beta\pm\sqrt{ax^{۲}+bx+c}$ اگر نمایش یک سهمی باشد، معادلهٔ محور تقارن آن که موازی خط $y=\alpha x$ می‌باشد عبارتست از $y=\alpha x+\beta-\frac{\alpha b}{۲(\alpha^{۲}+۱)}$

محور تقارن مایل

۹ـ برای تعیین محور تقارن مایل مقاطع مخروطی به معادلهٔ $ax^{۲}+bxy+cy^{۲}+dx+ey+f=۰$ از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم.

$$y'=\pm\sqrt{\frac{۴a^{۲}+b^{۲}}{۴c^{۲}+b^{۲}}}$$

۱۰ـ معادلات محورهای تقارن تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ عبارتند از: $\begin{cases} y=x+\frac{a+d}{c} \\ y=-x+\frac{a-d}{c}\end{cases}$

نقاط برخورد محور قاطع با تابع $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ از حل معادلهٔ $|y'|=۱$ بدست می‌آیند. این نقاط نزدیکترین نقاط منحنی به مرکز تقارن آن هستند.

تقارن در منحنی‌های مثلثاتی

۱۱ـ تابع $y=\sin x$ بی‌نهایت مرکز تقارن دارد که از $\omega(k\pi,۰)$ بدست می‌آیند $(k\in z)$، ω نقطهٔ عطف منحنی نیز می‌باشد خطوط $x=\frac{(۲k+۱)\pi}{۲}$ محورهای تقارن منحنی هستند $(k\in z)$

۱۲ـ تابع $y=\cos x$ دارای بی‌نهایت مرکز تقارن و محور تقارن است. مراکز تقارن آن از $\omega(\frac{(۲k+۱)\pi}{۲},۰)$ و محورهای تقارن آن از $x=k\pi$ به دست می‌آیند. $(k\in z)$

۱۳ـ مراکز تقارن تابع $y=\tan x$ از $\omega(k\pi,۰)$ بدست می‌آیند. $(k\in z)$

۱۴ـ مراکز تقارن تابع $y=\cot x$ از $\omega(\frac{(۲k+۱)\pi}{۲},۰)$ بدست می‌آیند. $(k\in z)$

تابع مشتق و رسم نمودار آن:

یادآوری:

تعریف: هرگاه تابع $y=f(x)$ در تمام نقاط بازهٔ باز I، مشتق‌پذیر باشد، آنگاه می‌گویند، f روی I مشتق‌پذیر است. در این حالت، تابع جدیدی به نام تابع مشتق، به صورت $f':I\to R$ وجود دارد که برای هر $x\in I$ داریم:

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

این تابع را با f' یا y' نمایش می‌دهند.

تذکر: توجه داشته باشید که حتی اگر f در برخی از نقاط مشتق‌پذیر نباشد، می‌توان تابع مشتق یعنی f' را روی نقاطی که مشتق f در آن نقاط موجود است، تعریف کرد، یعنی

دامنهٔ تابع مشتق عبارتست از:

$$D_{f'} = \{x \in I : \text{موجود است } f'(x)\}$$

در حالت کلی، دامنهٔ تابع f'، عبارتست از مجموعه نقاطی متعلق به دامنهٔ f به طوری که f در آن نقاط مشتق‌پذیر باشد بنابراین همیشه داریم:

$$\boxed{D_{f'} \subseteq D_f}$$

به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال: در توابع زیر تابع مشتق تابع داده شده را نوشته و دامنهٔ آن را تعیین کنید؟

الف) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

حل: واضح است که: $D_f = R$

$f'(x) = 3x^2 - 6x\ ,\ D_{f'} = R$

ب) $f(x) = |x|$

حل: واضح است که: $D_f = R$

$$f(x) = \begin{cases} x & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ \text{موجود نیست} & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases} \Rightarrow D_{f'} = R - \{0\}$$

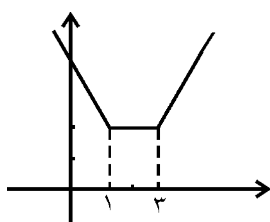
توجه داشته باشید که تابع $f(x) = |x|$ در نقطهٔ ۰، مشتق‌پذیر نیست.

ج) $f(x) = |x - 1| + |x - 3|$

حل: واضح است که $D_f = R$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 4 & ,(x < 1) \\ 2 & ,(1 \le x < 3) \\ 2x - 4 & ,(3 \le x) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -2 & ,(x < 1) \\ \text{موجود نیست} & ,(x = 1) \\ 0 & ,(1 < x < 3) \\ \text{موجود نیست} & ,(x = 3) \\ 2 & ,(x > 3) \end{cases} \Rightarrow D_{f'} = R - \{1, 3\}$$

توجه داشته باشید که نمودار تابع مزبور، به صورت یک گلدان خواهد بود که در نقاط ۱ و ۳، مشتق‌پذیر نیست.



د) $f(x) = Lnx$

حل: واضح است که $D_f = (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \overset{D_{f'} \subset D_f}{\Rightarrow} D_{f'} = (0, +\infty)$$

رسم نمودار تابع f' از روی نمودار تابع f:

برای رسم نمودار تابع f' از روی نمودار تابع f، توجه به نکاتی چند که در زیر می‌آید الزامی است اما ابتدا ترجیح می‌دهیم رابطهٔ بین منحنی تابع f و منحنی تابع f' را در توابع چند جمله‌ای، به صورت شهودی بررسی کنیم، سپس به بیان نتایج می‌پردازیم.

مثال: نمودار تابع f به معادلهٔ $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۱$ را رسم می‌کنیم.

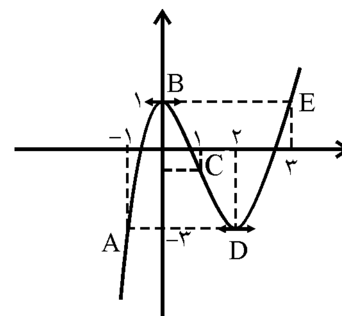
طولهای نقاط Max و Min تابع

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۶x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \end{cases}$$

طول نقطهٔ عطف تابع

$$f''(x) = ۶x - ۶ = ۰ \Rightarrow \{ x = ۱$$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		۲		۳		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	۰	−		−	۰	+		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-۳	↗	۱	↘	-۱	↘	-۳	↗	۱	↗	$+\infty$
					Max نسبی				Min نسبی				



حال تابع مشتق تابع f یعنی تابع $g(x) = f'(x) = ۳x^۲ - ۶x$ را رسم می‌کنیم.

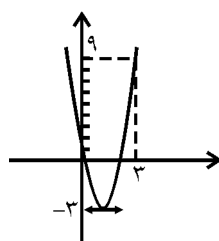
$$f''(x) = g'(x) = ۶x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

$$f'(x) = g(x) = ۳x^۲ - ۶x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \end{cases}$$

همانطوریکه دیده می‌شود ریشهٔ $g'(x) = ۰$، همان ریشهٔ $f''(x) = ۰$ است بنابراین طول نقطهٔ عطف تابع f، برابر است با طول نقطهٔ اکسترمم تابع g همچنین ملاحظه می‌شود که ریشه‌های $g(x) = ۰$، همان ریشه‌های $f'(x) = ۰$ است بنابراین طولهای اکسترمم تابع f برابر است با طولهای نقاط برخورد تابع g با محور xها.

لذا داریم:

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		۲		۳		$+\infty$
$g'(x)$		−		−		−	۰	+		+		+	
$g(x)$	$-\infty$	↘	۹	↘	۰	↘	-۳	↗	۰	↗	۹	↗	$+\infty$
							Min نسبی						



۱ـ به طوریکه در مثال فوق دیدیم، $x = ۰$ و $x = ۲$ طولهای نقاط اکسترمم تابع f بودند ضمناً طولهای نقاط برخورد منحنی تابع f' با محور xها نیز هستند.

نتیجهٔ اول: طولهای نقاط اکسترمم منحنی تابع f برابر است با طولهای نقاط برخورد منحنی تابع f' با محور xها، البته به شرطی که در نقاط اکسترمم منحنی تابع f، $f'(x)$ برابر صفر باشد.

۲ـ با کمی دقت متوجه می‌شویم که طول نقطهٔ عطف تابع f برابر ۱ است، از طرفی طول نقطهٔ اکسترمم منحنی تابع f' نیز برابر ۱ است پس می‌توان گفت:

نتیجهٔ دوم: طولهای نقاط عطف منحنی تابع f برابراند با طولهای نقاط اکسترمم منحنی تابع f'

۳ـ به طوریکه در شکل تابع f دیده می‌شود تقعر (گودی) تابع f در فاصلهٔ نقاط A تا C یعنی قطعه منحنی ABC به طرف پایین بوده، لذا y'' در این فاصله، یعنی در فاصلهٔ $[-۱,۱]$ منفی است، اما چون $f''(x)$ همان $g'(x)$ است پس $g'(x)$ در این فاصله منفی است، بنابراین تابع g در این فاصله، اکیداً نزولی است.

نتیجهٔ سوم: اگر تقعر منحنی تابع f در فاصلهٔ $[a,b]$ به سمت پائین (به سمت yهای منفی) باشد، منحنی f' در این فاصله اکیداً نزولی است.

۴ـ هم چنین از روی نمودار تابع f، دیده می‌شود که تقعر تابع f در فاصلهٔ نقاط C تا E یعنی قطعه منحنی CDE به طرف بالا بوده، لذا y'' در این فاصلهٔ یعنی $[۱,۳]$ مثبت است بنابراین $g'(x)$ در این فاصله مثبت است و لذا تابع g در این فاصله، اکیداً صعودی است.

نتیجهٔ چهارم: اگر تقعر منحنی تابع f در فاصلهٔ $[c,d]$ به سمت بالا (به سمت yهای مثبت) باشد، منحنی f' در این فاصله اکیداً صعودی است.

۵ـ مجدداً به منحنی تابع f توجه کنید. منحنی این تابع روی قطعه منحنی AB، اکیداً صعودی است یعنی تابع f در فاصلهٔ $[-۱,۰]$ اکیداً صعودی است پس تابع $f'(x)$ در این فاصله مثبت یا صفر است اما چون $f'(x)$ همان $g(x)$ است پس $g(x)$ در این فاصله مثبت یا صفر است لذا نمودار تابع g در این فاصله، بالای محور xها یا روی محور xهاست.

نتیجهٔ پنجم: اگر منحنی تابع f در فاصلهٔ $[a,b]$ اکیداً صعودی باشد، آنگاه تابع $f'(x)$ در این فاصله مثبت یا صفر است بنابراین نمودار f' که همان نمودار تابع $g(x)$ است در این فاصله بالای محور xها یا روی محور xهاست.

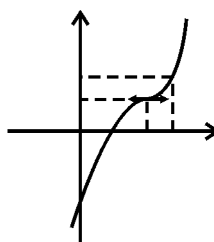
۶ـ تابع f روی منحنی BCD، اکیداً نزولی است یعنی تابع f در فاصله‌ی $[۰,۲]$ اکیداً نزولی است پس تابع $f'(x)$ در این فاصله منفی یا صفر است بنابراین نمودار f' که همان نمودار تابع $g(x)$ است در این فاصله زیر محور xها یا روی محور xهاست.

۷ـ تابع $f(x) = (x-۲)^۳ + ۱$ را در نظر می‌گیریم.

$f'(x) = ۳(x-۲)^۲ \geq ۰ \Rightarrow$ تابع اکسترمم ندارد.

$f''(x) = ۶(x-۲) = ۰ \Rightarrow x = ۲$ طول نقطهٔ عطف

x	$-\infty$	۱	۲	۳	$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	۰ ↗	۱ عطف ↗	۲ ↗	$+\infty$



حال شیب خط مماس در نقطهٔ عطف را بدست می‌آوریم. $m = f'(۲) = ۰$

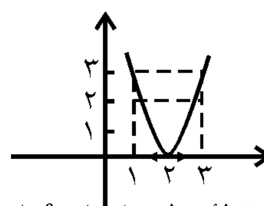
بنابراین خط مماس در نقطهٔ عطف موازی محور طولهاست.

اکنون نمودار $g = f'$ را رسم می‌کنیم. $g(x) = f'(x) = ۳(x - ۲)^۲$

$f''(x) = g'(x) = ۶(x - ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۲$ طول اکسترمم

x	$-\infty$		۲		$+\infty$
g'(x)		−	۰	+	
g(x)	$+\infty$	↘	۰	↗	$+\infty$

Min نسبی

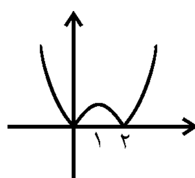


چون $x = ۲$ طول نقطهٔ عطف تابع f است.

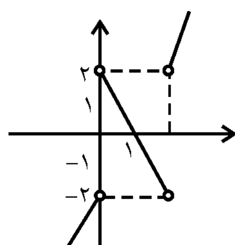
پس بنا به نتیجهٔ (۲)، $x = ۲$ طول اکسترمم تابع f' است.

نتیجهٔ هفتم: اگر $x = a$ طول نقطهٔ عطفی از تابع f باشد که خط مماس در این نقطه موازی محور xها باشد، آنگاه نقطهٔ $M \left| \begin{matrix} a \\ ۰ \end{matrix} \right.$، نقطهٔ اکسترمم منحنی تابع f' است.

۸ـ تابع f به معادلهٔ $f(x) = |x^۲ - ۲x|$ را در نظر می‌گیریم. نمودار این تابع چنین است.



چون f' در نقطهٔ $x = ۱$، برابر صفر است لذا این نقطه طول نقطهٔ برخورد تابع f با محور xهاست، ضمناً چون f در نقاط $x = ۰$ و $x = ۲$ مشتق‌پذیر نیست. لذا تابع f' در این نقاط، ناپیوسته است و در نتیجه نمودار f' به صورت زیر است.



البته تابع مشتق تابع فوق به صورت زیر است.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۲x & ,(x \le ۰ \text{ یا } x \ge ۲) \\ -x^۲ + ۲x & ,(۰ \le x \le ۲) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲x - ۲ & ,(x < ۰ \text{ یا } x > ۲) \\ \text{موجود نیست} & ,(x = ۰ \text{ یا } ۲) \\ -۲x + ۲ & ,(۰ < x < ۲) \end{cases}$$

نتیجهٔ هشتم: اگر تابع f در نقطهٔ $x = a$ متعلق به دامنهٔ تابع، مشتق‌پذیر نباشد آنگاه نمودار تابع f' در این نقطه، ناپیوسته است.

۹ـ تابع کسری $y=\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^n$، $(n\in N)$ را در نظر می‌گیریم.

به عنوان مثال: توابع $y=\frac{ax+b}{a'x+b'}$ و $y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ حالتهای خاصی از تابع فوق هستند.

تابع به صورت فوق دارای یک مجانب افقی به معادلهٔ $y=\frac{a^n}{a'^n}$ و یا به طور خلاصه $y=\frac{p}{q}$ است. حال ثابت می‌کنیم تابع y' یک مجانب افقی به معادلهٔ $y=0$ دارد، زیرا:

$$y'=n\left(\frac{ab'-ba'}{(a'x+b')^2}\right)\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{n-1}=\frac{n(ab'-ba')(ax+b)^{n-1}}{(a'x+b')^{n+1}}$$

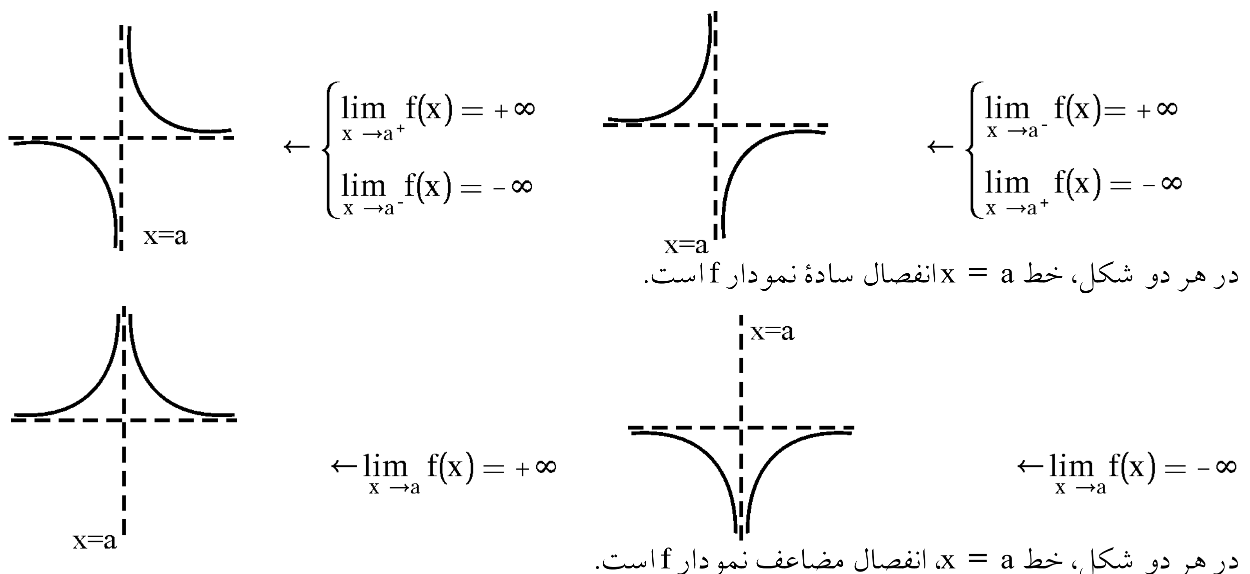
همانطور که دیده می‌شود در تابع y'، درجهٔ مخرج، بیشتر از درجهٔ صورت است پس هنگامیکه $x\to\infty$ آنگاه $y'\to 0$، پس خط $y=0$ مجانب افقی منحنی تابع y' است.

نتیجهٔ نهم: اگر تابع f دارای مجانب افقی باشد، آنگاه خط $y=0$ مجانب افقی منحنی تابع f' است.

یادآوری: اگر معادلهٔ تابع f به صورت $f(x)=\frac{g(x)}{(x-a)^{2n-1}}$، $(n\in N)$ باشد و $g(a)\neq 0$ و $g'(a)\neq 0$، آنگاه خط $x=a$، معادلهٔ مجانب قائم منحنی تابع f است چون، $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ یا $-\infty$ لذا نوع انفصال ایجاد شده در نقطهٔ $x=a$ را انفصال ساده می‌گوئیم.

اگر معادلهٔ تابع f به صورت $f(x)=\frac{g(x)}{(x-a)^{2n}}$، $(n\in N)$ و $g(a)\neq 0$ و $g'(a)\neq 0$، آنگاه خط $x=a$، معادلهٔ مجانب قائم منحنی تابع f است چون: $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ و یا $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$، لذا نوع انفصال ایجاد شده در نقطهٔ $x=a$ را در این حالت، انفصال مضاعف می‌گوییم.

به شکلهای زیر توجه کنید.



در هر دو شکل، خط $x=a$ انفصال سادهٔ نمودار f است.

در هر دو شکل، خط $x=a$، انفصال مضاعف نمودار f است.

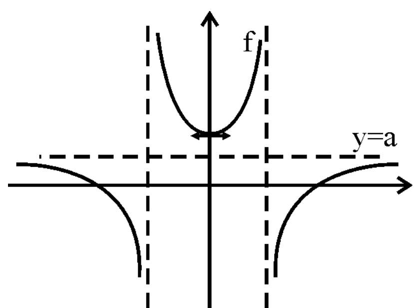
نکتهٔ دهم: اگر منحنی تابع f مجانب قائمی به معادلهٔ $x = a$ داشته باشد (انفصال ساده) آنگاه منحنی تابع f' دارای مجانب قائمی به معادلهٔ $x = a$ خواهد بود که $x = a$ انفصال مضاعف تابع f' است.

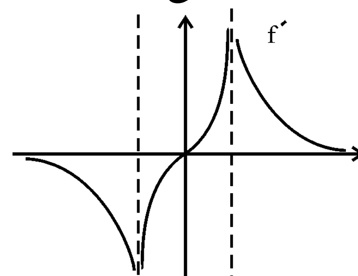
اثبات: فرض می‌کنیم معادلهٔ تابع f به صورت $f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^{2n-1}}$ و $(n \in N)$ باشد و $g(a) \neq 0$ و $g'(a) \neq 0$ می‌دانیم که در این حالت $x = a$ انفصال سادهٔ تابع f است، پس از مشتق‌گیری و ساده کردن داریم:

$$f'(x) = \frac{(x-a)g'(x) - (2n-1)g(x)}{(x-a)^{2n}}$$

همانطوریکه دیده می‌شود، منحنی تابع f' دارای مجانب قائمی به معادلهٔ $x = a$ است، ضمناً چون توان $(x - a)$ در مخرج f'، زوج است پس انفصال حاصل در f'، انفصال مضاعف است.

مثال: اگر منحنی تابع f به صورت زیر باشد، منحنی f' را رسم کنید؟



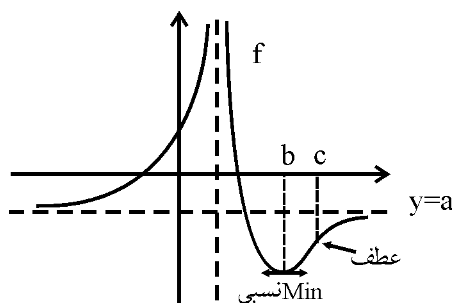


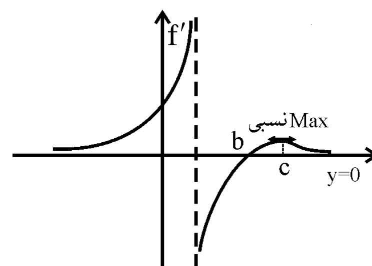
با کمی دقت، دیده می‌شود که مجانبهای قائم به انفصالهای مضاعف تبدیل شده است و مجانب افقی تابع که به صورت $y = k > 0$ است به $y = 0$ تبدیل شده است.

نکتهٔ یازدهم: اگر منحنی تابع f دارای مجانب قائمی به صورت $x = a$ باشد و $x = a$ انفصال مضاعف تابع f باشد، آنگاه منحنی تابع f' دارای مجانب قائمی به معادلهٔ $x = a$ است ولی انفصال حاصل در منحنی f'، انفصال ساده خواهد بود.

اثبات: مشابه اثبات نکتهٔ دهم است.

مثال: اگر منحنی تابع f به صورت زیر باشد، منحنی f' را رسم کنید؟





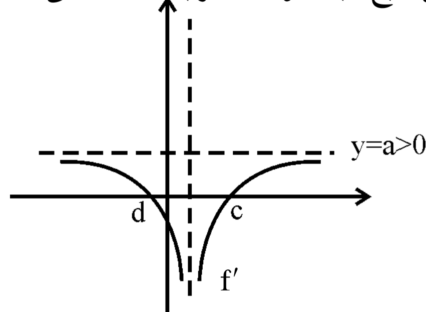
نکتهٔ دوازدهم: اگر در توابع کسری، خط $y = ax + b$، معادلهٔ مجانب مایل تابع $y = f(x)$ باشد، آنگاه خط $y = a$، مجانب افقی تابع f' خواهد بود.

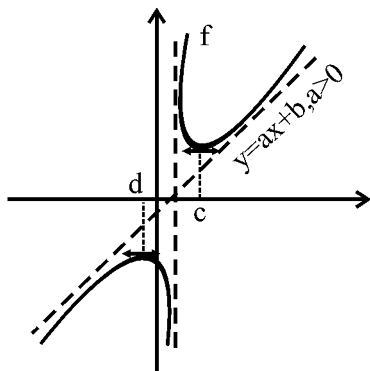
اثبات: فرض می‌کنیم $y = ax + b$ معادلهٔ مجانب مایل تابع $y = f(x)$ باشد، لذا می‌توان فرض کرد معادلهٔ f به صورت $f(x) = ax + b + \frac{g(x)}{h(x)}$ باشد که در آن درجهٔ $h(x)$ از درجهٔ $g(x)$ حداقل یک واحد بیشتر است. با مشتقگیری داریم:

$$f'(x) = a + \frac{g'(x)h(x) - h'(x)g(x)}{(h(x))^۲}$$

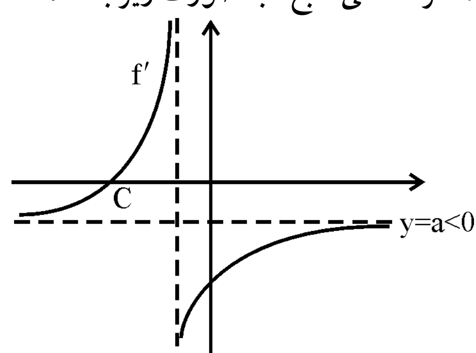
اگر درجهٔ $g(x)$، برابر n و درجهٔ $h(x)$ برابر $n+۱$ باشد $(n \in N)$ (البته در حالت کلی درجهٔ $h(x)$، بزرگتر یا مساوی $n+۱$ است) در این صورت درجهٔ صورت کسر $f'(x)$ مساوی $۲n$ و درجهٔ مخرج آن $(۲n+۲)$ است پس $\lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = a$ و لذا خط $y = a$، مجانب افقی تابع f' است.

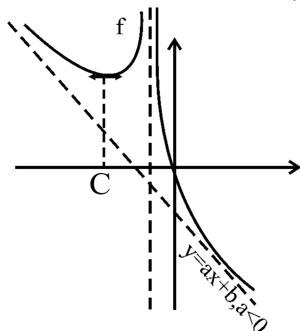
مثال: اگر منحنی تابع f به صورت زیر باشد، منحنی f' را رسم کنید.





مثال: اگر منحنی تابع f به صورت زیر باشد، منحنی f' را رسم کنید.





نکتهٔ سیزدهم: در توابع رادیکالی، اگر D_f فاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ نباشد، $(a < b \ , \ a,b \in R)$ آنگاه منحنی f' مجانب افقی خواهد داشت. همچنین اگر $x = a$ ریشهٔ زیر رایکال باشد، آنگاه $x = a$، مجانب قائم منحنی تابع f' خواهد شد.

مثال: تابع به معادلهٔ $f(x) = \sqrt{x - a}$ را در نظر می‌گیریم داریم:

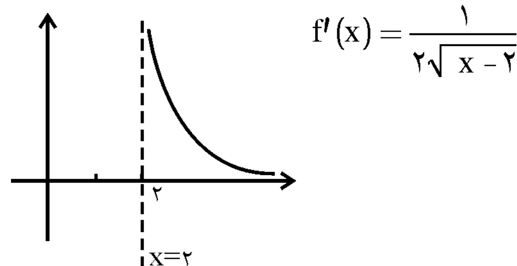
$D_f = [a, +\infty)$

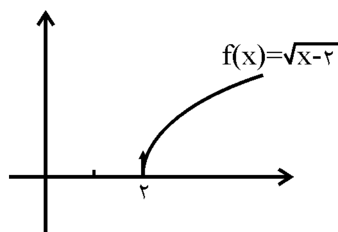
$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x-a}}$$

چون $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = ۰$ لذا خط $y = ۰$ مجانب افقی تابع f' است ضمناً چون $\lim_{x \to a^+} f'(x) = +\infty$ لذا خط $x = a$ مجانب قائم تابع f' است.

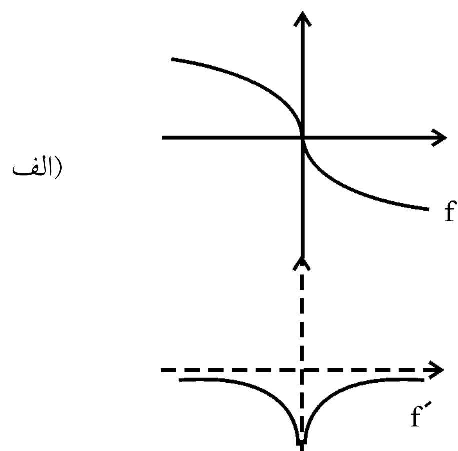
مثال: نمودار تابع f به صورت زیر است، نمودار f' را رسم کنید؟

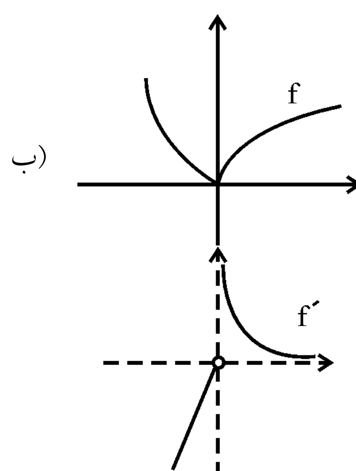
$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x-۲}}$$

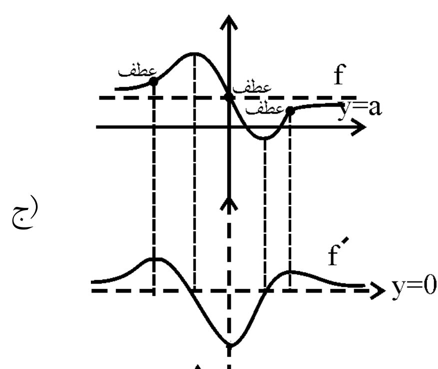


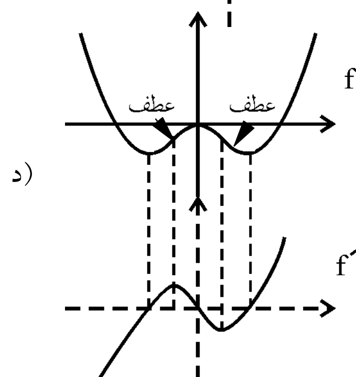


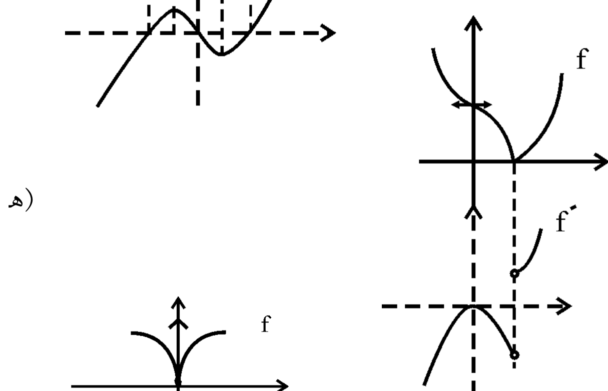
به مثالهای زیر توجه کنید، در این مثالها نمودار f و نمودار f' در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند.

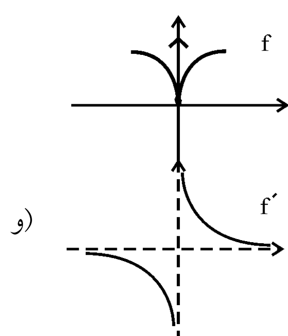








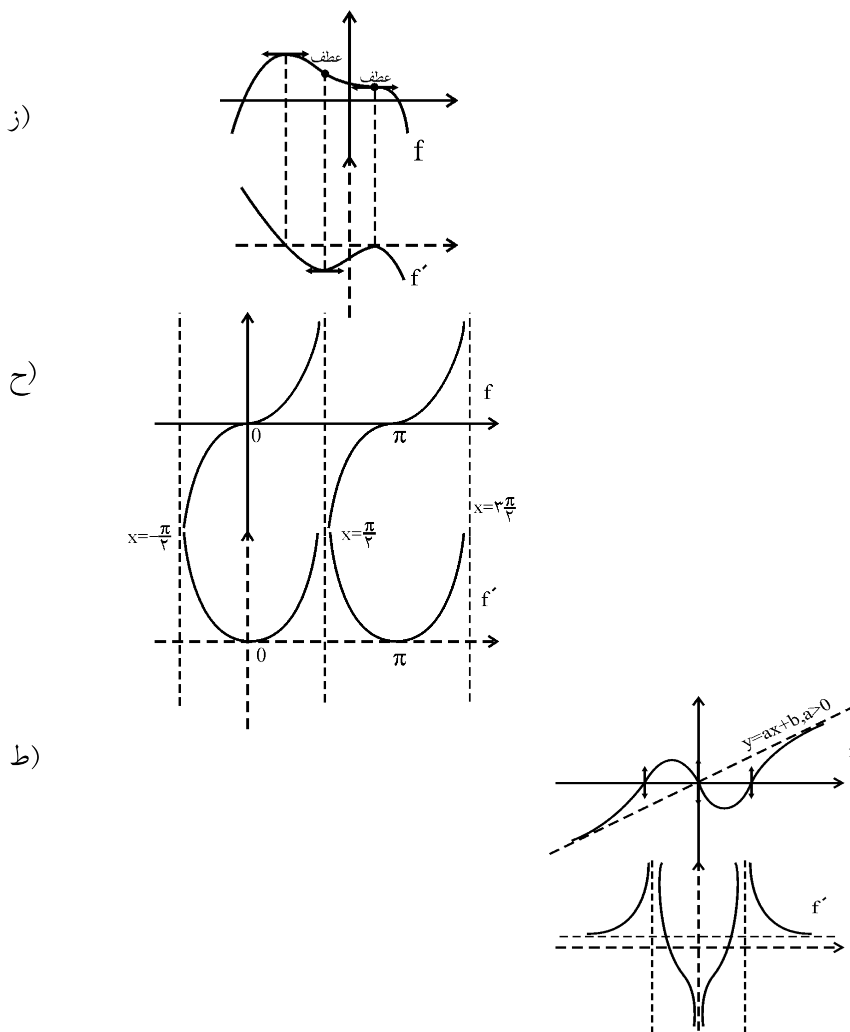




ز)

ح)

ط)



تعیین ریشه‌های تقریبی $f(x) = 0$

می‌دانیم که ما قادر به حل هر معادله‌ای نیستیم، بسیاری از معادلات هستند که تعیین دقیق ریشه‌های آنها مشکل و یا حتی غیرممکن است، امروزه حل بسیاری از مسائل علوم مختلف از جمله مهندسی، فیزیک، اقتصاد، مهندسی پزشکی و ... منجر به حل یک معادله مانند $f(x) = 0$ می‌شود. بنابراین تعیین ریشه‌های تقریبی یک معادله مورد توجه فراوان قرار گرفته و روشهای مختلفی برای آن به دست آمده است که نتیجه‌ی آن بحث آنالیز عددی و محاسبات عددی می‌باشد، به طور طبیعی برای تعیین ریشه‌های تقریبی معادله‌ی $f(x) = 0$، ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم نموده و نقاط برخوردش را با محور xها پیدا می‌کنیم، طولهای نقاط برخورد منحنی با محور xها ریشه‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ می‌باشند، چنانچه رسم نمودار مشکل باشد، می‌توان معادله‌ی $f(x) = 0$ را به صورت $g(x) = h(x)$ در آورده و پس از رسم نمودار توابع $y = g(x)$ و $y = h(x)$ طولهای نقاط برخوردشان را پیدا کنیم. این روش را روش ترسیم می‌گویند. (قبلاً مثالهائی از حل معادلات به روش ترسیم در مبحث معادلات آورده شده است) روشهای دیگری از جمله روش نصف کردن، روش نیوتن، روش وترها نیز برای یافتن

ریشه‌های یک معادله با دقت‌های کافی وجود دارد که ما در اینجا به بیان دو روش اکتفا می‌کنیم.

۱ـ روش نصف کردن: اساس این روش قضیه‌ی بولترانو (نتیجه‌ی قضیه‌ی مقدار میانی) می‌باشد می‌دانیم که هرگاه f در $[a,b]$ پیوسته و $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامه باشند ($f(a)\times f(b) \leq 0$)، آنگاه f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$، حداقل یک ریشه دارد. فرض می‌کنیم $c = \frac{a+b}{2}$، چنانچه $f(c) = 0$ باشد، آنگاه c، خود ریشهٔ معادله است در غیر این صورت ریشه‌ی معادله در یکی از دو بازه‌ی $[a,c]$ و $[c,b]$ قرار دارد، واضح است که طول هر کدام از این دو بازه، نصف طول بازه‌ی قبلی بوده و برابر $\frac{b-a}{2}$ است اگر این عمل را به همین ترتیب ادامه دهیم، در مرحله‌ی دوم طول بازه برابر $\frac{b-a}{4}$ و در مرحله‌ی سوم برابر $\frac{b-a}{8}$ و ... و در مرحله‌ی nام برابر $\frac{b-a}{2^n}$ خواهد بود، پس از n مرحله، بازه‌ای مانند $[a_n,b_n]$ به دست می‌آوریم که طولش برابر $\frac{b-a}{2^n}$ است، در این حالت هر عددی واقع در این بازه، تقریبی برای ریشه‌ی معادله است که البته با ریشه‌ی معادله کمتر از $\frac{b-a}{2^n}$ فاصله دارد، به عنوان مثال اگر ریشه‌ی معادله بین $[k,k+0/01]$ باشد، گوئیم ریشه‌ی تقریبی معادله با خطای کمتر از ۰/۰۱ به دست آمده است k را تقریب نقصانی و $k + 0/01$ را تقریب اضافی می‌گوئیم.

چنانچه مقدار تقریبی ریشه تا k رقم اعشار مورد نظر باشد، دوسر بازه‌های به دست آمده را در هر مرحله تا k رقم اعشار گرد نموده، چنانچه برابر شوند، محاسبات را متوقف نموده و ریشه‌ی تقریبی معادله را برابر مقدار مشترک گرد شده‌ی دو سر بازه در نظر می‌گیریم، به عنوان مثال، اگر ریشه‌ی معادله‌ای را تا دو رقم اعشار بخواهیم و در یکی از مراحل به بازه‌ی $[0/375,0/381]$ رسیده باشیم، چون گرد شده‌ی دو سربازه تا دو رقم اعشار برابر ۰/۳۸ است می‌توان عدد ۰/۳۸ را ریشه‌ی تقریبی معادله تا دو رقم اعشار تلقی کرد.

یادآوری: برای گرد کردن هر عدد اعشاری تا k رقم، اگر رقم $(k+1)$ ام، ۰ تا ۴ باشد آنرا حذف می‌کنیم و چنانچه، ۵ تا ۹ باشد، آنرا حذف نموده و به رقم kام، ۱ واحد اضافه می‌کنیم.

مثال: ریشه‌ی معادله‌ی $x^3 + 4x - 7 = 0$ را با روش نصف کردن با تقریب ۰/۱ پیدا کنید.

حل: تابع $f(x) = x^3 + 4x - 7$ را در نظر می‌گیریم، چون $f(1)f(2) < 0$ است و f در بازه‌ی $[1,2]$ پیوسته است پس f در بازه‌ی $[1,2]$ حداقل یک ریشه دارد، از طرفی چون $f'(x) = 3x^2 + 4 > 0$ است پس f اکیداً صعودی بوده، لذا تنها یکبار محور xها را قطع می‌کند و بنابراین فقط یک ریشه دارد، نام این ریشه را x_0 می‌نامیم، حال روش نصف کردن را به کار می‌بریم.

$f(1/5) = 2/375 > 0 \Rightarrow x_0 \in [1,1/5]$

$f(1/25) = -0/046 < 0 \Rightarrow x_0 \in [1/25,1/5]$

$f(1/375) = 1/5 > 0 \Rightarrow x_0 \in [1/25,1/375]$

$f(1/3125) = 0/51 > 0 \Rightarrow x_0 \in [1/25,1/3125]$

چون گرد شده‌ی اعداد ۱/۲۵ و ۱/۳۱۲۵ تا یک رقم اعشار برابر ۱/۳ می‌باشد، لذا می‌توان ریشه‌ی معادله را با ۰/۱ تقریب، ۱/۳ فرض کرد.

تست: با اجرای حداقل چند بار روش نصف کردن، می‌توان ریشه‌ی معادله‌ی $x^3 + 4x - 7 = 0$ را در بازه‌ی $[1,2]$ تا $0/01$ تقریب پیدا کرد؟

۱) ۷　　۲) ۸　　۳) ۶　　۴) ۱۰

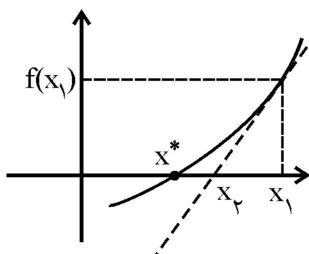
بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است. $\frac{b-a}{2^n} < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{2-1}{2^n} < \frac{1}{100} \Rightarrow 2^n > 100 \Rightarrow n \geq 7$

۲ـ روش نیوتن: در این روش، فرض می‌کنیم مطابق شکل، نمودار $y = f(x)$، محور xها را در نقطه‌ای به طول x^* قطع کرده باشد و x_1 عددی نزدیک به ریشه (x^*) باشد، مطابق شکل در نقطه‌ی $(x_1, f(x_1))$، خطی بر نمودار f مماس می‌کنیم (البته به شرطی که f در x_1 مشتق‌پذیر باشد) و معادله‌ی این خط مماس را می‌نویسیم: $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$

سپس طول نقطه‌ی برخورد این خط با محور xها را به دست آورده، آنرا x_2 می‌نامیم.

$$y = 0 \Rightarrow -f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Rightarrow x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad , \quad (f'(x_1) \neq 0)$$



حال همین عمل را در نقطه‌ی $(x_2, f(x_2))$ تکرار نموده و طول نقطه‌ی برخورد خط مماس با محور xها را x_3 می‌نامیم، داریم:

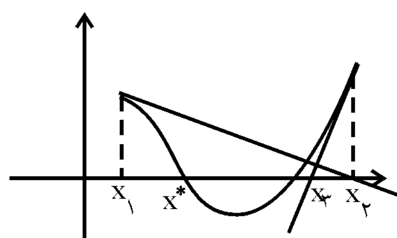
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \quad , \quad (f'(x_2) \neq 0)$$

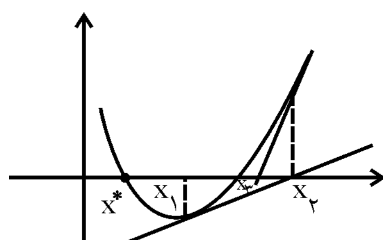
با تکرار این عمل دنباله‌ای بازگشتی مانند $\{x_n\}$ به صورت $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$، ($x$ جدید $= x$ قدیم $- \frac{f(\text{قدیم } x)}{f'(\text{قدیم } x)}$) به دست می‌آوریم که به x^* همگراست.

نکته: اگر در بازه‌ی (x_1, x^*) و (x^*, x_1)، تحدّب (برآمدگی) منحنی f به طرف محور xها باشد، روش نیوتن به x^* همگراست.

نکته: اگر در یکی از مراحل، f در نقاط x_1 یا x_2 یا ... یا x_n مشتق‌پذیر نباشد و یا مشتق در یکی از این نقاط صفر شود، این روش، کارآیی ندارد، البته اگر مثلاً $f'(x_n) = 0$ باشد، ممکن است $f(x_n)$ نیز صفر باشد که در این صورت x_n ریشه‌ی مشترک $f(x) = 0$ و $f'(x) = 0$ خواهد بود، یعنی نمودار f در x_n بر محور xها مماس است بنابراین هرگاه $f'(x_n) = 0$ شود، بهتر است $f(x_n)$ را نیز حساب کنیم.

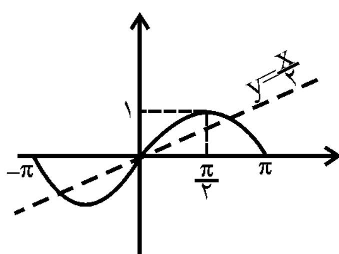
نکته: هرگاه نقطه‌ی آغازین (x_1)، به اندازه‌ی کافی به ریشه، نزدیک نباشد، ممکن است نقاط بعدی از ریشه دور شوند و نتیجه‌ای دور از انتظار به دست آید، به شکلهای زیر توجه کنید.





مثال: ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $2\sin x - x = 0$ را تا دو رقم اعشار بیابید؟

حل: با استفاده از رسم توابع $y = \sin x$ و $y = \frac{x}{2}$ در می‌یابیم که ریشه‌ی مثبت معادله بین $(\frac{\pi}{2}, 2)$ قرار دارد.



$$f(x) = 2\sin x - x \quad \Rightarrow f'(x) = 2\cos x - 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2\sin x_n - x_n}{2\cos x_n - 1}$$

از $x_1 = 2\,rad$ شروع می‌کنیم، داریم:

n	۱	۲	۳	۴
x_n	۲	۱/۹	۱/۸۹۵	۱/۸۹۴

بنابراین ریشه‌ی معادله با تقریب دو رقم اعشار برابر ۱/۸۹rad است.

مثال: مقدار $\sqrt{2}$ را با روش نیوتن با ۰/۰۱ تقریب حساب کنید؟

می‌دانیم $\sqrt{2}$ ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $x^2 - 2 = 0$ است لذا:

$$f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$$

با $x_1 = 1$ شروع می‌کنیم، داریم:

n	۱	۲	۳	۴
x_n	۱	۱/۵	۱/۴۱۶	۱/۴۱۴

بنابراین مقدار $\sqrt{2}$ با روش نیوتن با ۰/۰۱ تقریب برابر ۱/۴۱ است.

نکته: در حالت کلی برای محاسبه‌ی $\sqrt{a}$ از معادله‌ی $x^2 - a = 0$ استفاده کرده و داریم:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$$

نکته: برای محاسبه‌ی $\sqrt[3]{5}$ از معادله‌ی $x^3 - 5 = 0$ استفاده می‌کنیم.

مثال: با روش نیوتن، دنباله‌ای بیابید که به عدد $e^{\sqrt{2}}$ همگرا باشد.

حل: فرض می‌کنیم $x = e^{\sqrt{2}}$ لذا $\operatorname{Ln}x = \sqrt{2}$ و بنابراین $e^{\sqrt{2}}$ ریشه‌ی معادله‌ی $\operatorname{Ln}x - \sqrt{2} = 0$ است.

$$f(x) = \operatorname{Ln}x - \sqrt{2} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\operatorname{Ln}x_n - \sqrt{2}}{\frac{1}{x_n}} \quad \Rightarrow x_{n+1} = x_n(1 + \sqrt{2} - \operatorname{Ln}x_n)$$

برای اینکه بدانیم دنباله‌ی به دست آمده به $e^{\sqrt{2}}$ همگراست، فرض می‌کنیم $\{x_n\}$ همگرا به l باشد لذا $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$ و $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = l$ و بنابراین با حدگیری از رابطه‌ی بازگشتی فوق داریم:

$$l = l(1 + \sqrt{2} - \operatorname{Ln}l)$$

$$\overset{l\neq 0}{\Rightarrow} \quad 1 = 1 + \sqrt{2} - \operatorname{Ln}l \quad \Rightarrow \operatorname{Ln}l = \sqrt{2} \quad \Rightarrow l = e^{\sqrt{2}}$$

تست ۱:

۱ـ هرگاه $f(x)=\cos x$**، حاصل** $\lim_{h\to 0}\frac{f(\frac{\pi}{6}+5h)-f(\frac{\pi}{6}-h)}{3h}$ **کدام است؟**

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $2\sqrt{3}$

۲ـ هرگاه $f(x)=\begin{cases}\cos\pi x & ,(x\ge 1)\\ \sin\pi x-1 & ,(x<1)\end{cases}$**، حاصل** $\lim_{n\to\infty}n^2(f(1+\frac{1}{n^2})-f(1))$ **کدام است؟**

۱) π ۲) $-\pi$ ۳) 1 ۴) 0

۳ـ هرگاه به ازاء هر دو عدد حقیقی u و v داشته باشیم: $f(u+v)-f(u)=8u^2v-2v^2+uv$ **،** $f'(x)$ **کدام است؟**

۱) $8x^2$ ۲) $8x^2-1$ ۳) $8x^2-x$ ۴) $8x^2+x$

۴ـ هرگاه $f(x)=\begin{cases}x^3-8 & ,(x\ge 2)\\ 8-x^3 & ,(x<2)\end{cases}$**، حاصل** $A=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2)-f(2+h)}{h}$ **کدام است؟**

۱) ۱۲ ۲) ۸- ۳) ۱۲- ۴) موجود نیست

۵ـ هرگاه $f(x)=\sqrt[3]{x}$**، حاصل** $A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^3(x+\Delta x)-f^3(x)}{\Delta x}$ **کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) x ۴) $\sqrt[6]{x}$

۶ـ هرگاه $f(x)=\sqrt{x}$**، حاصل** $A=\lim_{h\to 0}\frac{f''(0/25+h)-f''(0/25)}{h}$ **کدام است؟**

۱) ۱۲ ۲) ۱۲- ۳) ۲- ۴) ۲

۷ـ حاصل $C=\lim_{h\to 0}\frac{(x^4+1+3h)^2-(x^4+1)^2}{h}$ **کدام است؟**

۱) $8x^3(x^4+1)$ ۲) $6(x^4+1)$ ۳) $3(x^4+1)$ ۴) $4x^3(x^4+1)$

۸ـ هرگاه $f(x)=x\tan x$**، حاصل** $D=\lim_{x\to(-\frac{\pi}{4})}\frac{f(x)-f(-\frac{\pi}{4})}{4x+\pi}$ **کدام است؟**

۱) $\frac{2-\pi}{8}$ ۲) $\frac{2+\pi}{8}$ ۳) $\frac{-2-\pi}{8}$ ۴) $-1-\frac{\pi}{2}$

۹ـ هرگاه $f(x)=\begin{cases}x^2 & ,(x>1)\\ 0 & ,(x=1)\\ (x-1)^2 & ,(x<1)\end{cases}$ **حاصل** $\lim_{h\to+\infty}hf(1-\frac{1}{h})$ **کدام است؟**

۱) ۰ ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲

۱۰ـ کدام گزینه‌ی زیر، برابر مشتق تابع $y=\sqrt{x^2-1}$ **در نقطه‌ی** $x=2$ **می‌باشد؟**

۱) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2-4h+3}-\sqrt{3}}{h}$ ۲) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2+4h+3}-\sqrt{3}}{h}$

۳) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2-4h+4}-\sqrt{3}}{h}$ ۴) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2+4h-3}-\sqrt{3}}{h}$

۱ـ (۱) راه اول:
$$\overset{\text{HOP نسبت به h}}{\Rightarrow} \quad 1=\lim_{h\to 0}\frac{5f'(\frac{\pi}{6}+5h)+f'(\frac{\pi}{6}-h)}{3}=2f'(\frac{\pi}{6})=2(-\frac{1}{2})=-1$$

راه دوم:
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{ph}=\frac{m-n}{p}f'(a)\quad\Rightarrow 1=\frac{5-(-1)}{3}f'(\frac{\pi}{6})=-1$$

۲ـ (۴)
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(1+\frac{1}{n^2})-f(1)}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'_+(1)\quad\Rightarrow x\geq 1\quad\Rightarrow f'(x)=-\pi\sin\pi x=f'_+(1)=0$$

۳ـ (۴)
$$\frac{f(u+v)-f(u)}{v}=8u^2-2v+u\quad\Rightarrow\lim_{v\to 0}\frac{f(u+v)-f(u)}{v}=\lim_{v\to 0}(8u^2-2v+u)$$
$$\Rightarrow\quad f'(u)=8u^2+u\quad\Rightarrow f'(x)=8x^2+x$$

۴ـ (۳)
$$A=-f'_+(2)\quad\Rightarrow x>2\quad\Rightarrow f'(x)=3x^2\quad\Rightarrow A=-12$$

۵ـ (۱) راه حل اول:
$$A=(f^3)'(x)=3f^2(x)f'(x)=3\sqrt[3]{x^2}\times\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=1$$

راه حل دوم:
$$f(x)=\sqrt[3]{x}\quad\Rightarrow f^3(x)=x\quad\Rightarrow (f^3)'(x)=1$$

۶ـ (۱)
$$B=f'''(0/25)\quad\Rightarrow f(x)=x^{\frac{1}{2}}\quad\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\quad\Rightarrow f''(x)=\frac{-1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\quad\Rightarrow$$
$$f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}\quad\Rightarrow f'''(x)=\frac{3}{8\sqrt{x^5}}\quad\Rightarrow f'''(0/25)=\frac{3}{8\sqrt{(\frac{1}{4})^5}}=12$$

۷ـ (۲)
$$\overset{\text{HOP نسبت به h}}{\Rightarrow}\quad\lim_{h\to 0}\frac{2\times 3(x^4+1+3h)-0}{1}=6(x^4+1)$$

۸ـ (۳)
$$D=\frac{1}{4}f'(-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}\times\frac{-(\pi+2)}{2}=\frac{-\pi-2}{8}$$
$$f'(x)=\tan x+x(1+\tan^2x)\quad\Rightarrow f'(-\frac{\pi}{4})=-1-\frac{\pi}{4}(2)=\frac{-(\pi+2)}{2}$$

۹ـ (۱) روش اول:
$$\lim_{h\to+\infty}\frac{f(1-\frac{1}{h})-0}{\frac{1}{h}}=-\lim_{h\to+\infty}\frac{f(1-\frac{1}{h})-f(1)}{-\frac{1}{h}}=-f'_-(1)=-2(x-1)=-2(0-1)=0$$

روش دوم:
$$\frac{0}{0}\overset{\text{HOP}}{\Rightarrow}\quad\lim_{h\to+\infty}\frac{\frac{1}{h^2}f'(1-\frac{1}{h})}{-\frac{1}{h^2}}=-f'_-(-1)=0$$

۱۰ـ (۲)
$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(2+h)^2-1}-\sqrt{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2+4h+3}-\sqrt{3}}{h}$$

تست ۲:

۱ـ هرگاه تابع $f(x) = |(x-2m-1)(x-3)|$ در R مشتق‌پذیر باشد، m کدام است؟

۱) ۱-　۲) ۳　۳) ۱　۴) ۲

۲ـ هرگاه تابع $f(x) = |x^2+3x+m|$ در R مشتق‌پذیر باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m \geq \frac{9}{4}$　۲) $m > \frac{9}{4}$　۳) $m < \frac{9}{4}$　۴) $m \leq \frac{9}{4}$

۳ـ هرگاه تابع $f(x) = (ax^2+ bx + 1)\lfloor x \rfloor$، در $x = 1$ مشتق‌پذیر باشد، a+ b کدام است؟

۱) ۲　۲) ۱　۳) ۱-　۴) ۳

۴ـ تابع $f(x) = |x^6 - x^4|$ مفروض است، $D_{y'}$ کدام است؟

۱) R　۲) $R-\{0\}$　۳) $R-\{-1,1\}$　۴) $R-\{0,-1,1\}$

۵ـ تابع $y = \lfloor x^2 \rfloor$ در بازه‌ی (۲+ و ۲-) در چند نقطه مشتق ندارد؟

۱) ۲　۲) ۳　۳) ۶　۴) ۷

۶ـ هرگاه مشتق چپ، تابع $f(x) = m|\cos x-\sin x|$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{4}$ برابر ۲ باشد، m کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$　۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　۳) $-\sqrt{2}$　۴) $\frac{1}{2}$

۷ـ هرگاه $f(x) = (x^2- 6x + 8)\text{Arccos}\frac{1}{x}$، $f'(2)$ کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{3}$　۲) $-\frac{3\pi}{4}$　۳) $-\frac{2\pi}{3}$　۴) $-\frac{\pi}{6}$

۸ـ هرگاه تابع $f(x) = |x| + ax\lfloor x \rfloor$ در مبدأ مختصات مشتق‌پذیر باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲-　۲) ۰　۳) ۱　۴) ۲

۹ـ هرگاه $f(x) = \sqrt{\sin^2 x - \sin^4 x}$، حاصل $f'_-(0)$ کدام است؟

۱) ۱-　۲) ۱　۳) ۰　۴) $-\frac{1}{2}$

۱۰ـ f تابعی فرد و مشتق‌پذیر است و $f'_+(0) = -1$، مقدار $f'_+(0) + f'_-(0)$ کدام است؟

۱) ۰　۲) ۱-　۳) ۲　۴) ۲-

۱ـ (۳) باید عبارت داخل قدر مطلق، ریشه‌ی مکرّر داشته باشد پس باید: $x - 2m - 1 = x - 3 \Rightarrow m = 1$

۲ـ (۱) باید عبارت داخل قدر مطلق، ریشه‌ی مکرّر داشته باشد. $\Delta \le 0 \Rightarrow 9 - 4m \le 0 \Rightarrow m \ge \frac{9}{4}$

۳ـ (۳) باید عبارت پشت جزء صحیح ریشه‌ی مضاعف $x = 1$ داشته باشد، بنابراین:

$$ax^2 + bx + 1 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1$$

۴ـ (۳) $y = |x^4(x^2-1)| \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ ریشه‌های ساده

$$\Rightarrow D_{y'} = R - \{\pm 1\}$$

۵ـ (۳) $-2 < x < 2 \Rightarrow 0 \le x^2 < 4 \Rightarrow x^2 = 1\ ,\ 2\ ,\ 3 \Rightarrow x = \pm 1\ ,\pm\sqrt{2}\ ,\pm\sqrt{3}$

۶ـ (۳) $x \to (\frac{\pi}{4})^- \Rightarrow x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin x < \cos x \Rightarrow f(x) = m(\cos x - \sin x)$

$$\Rightarrow f'(x) = m(-\sin x - \cos x) \Rightarrow f'_-(\frac{\pi}{4}) = -m\sqrt{2} = 2 \Rightarrow m = -\sqrt{2}$$

۷ـ (۳) $f'(2) = (2 \times 2 - 6)\,\mathrm{Arccos}\frac{1}{2} = -\frac{2\pi}{3}$

مشتق عامل صفر شونده را گرفته‌ایم و مقدارش را در ازاء $x = 2$ حساب کرده‌ایم و ضربدر بقیه کرده‌ایم به جای x، ۲ قرار داده‌ایم.

۸ـ (۱) $x \to 0^- \Rightarrow f(x) = -x - ax \Rightarrow f'(x) = -1 - a \Rightarrow f'_-(0) = -1 - a$

$$x \to 0^+ \Rightarrow f(x) = x + 0 \Rightarrow f'(x) = 1 \Rightarrow f'_+(0) = 1$$

از تعریف مشتق چپ و راست نیز به همین نتیجه می‌رسیم. $-1 - a = 1 \Rightarrow a = -2$

۹ـ (۱) $f(x) = \sqrt{\sin^2 x(1 - \sin^2 x)} = \sqrt{\sin^2 x \cos^2 x} = |\sin x \cos x| = \frac{1}{2}|\sin 2x|$

$$x \to 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x \Rightarrow f'(x) = -\cos 2x \Rightarrow f'_-(0) = -1$$

۱۰ـ (۴) فرد $f \Rightarrow$ زوج $f' \Rightarrow f'_+(0) = f'_-(0) = -1 \Rightarrow f'_+(0) + f'_-(0) = -2$

از همهٔ بندگان خدا آنکس پیش خدا محبوبتر است که برای بندگان خدا سودمندتر است.

«پیامبر اسلام»

تست ۳:

۱ـ هرگاه $f(x) = |x^{۳} - ۹|$، حاصل $f'(۲) + f'(۳)$ کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۵- ۳) ۳۹ ۴) ۳۹-

۲ـ مشتق تابع $f(x) = \frac{x + \sqrt{۲x}}{\sqrt{x} + \sqrt{۲}}$ در نقطه‌ی $x = ۴$، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) ۴ ۴) ۲-

۳ـ هرگاه $f(x) = \cos x(\cos x - ۱)(\cos x - ۲)(\cos x - ۳)$، حاصل $f'(\frac{\pi}{۲})$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۶- ۳) ۱۲ ۴) ۱۲-

۴ـ هرگاه $f(x) = (\sqrt{x^{۲} + ۱} - ۱)^{۱۰}$ و $g(x) = (\sqrt{x^{۲} + ۱} + ۱)^{۱۰}$، حاصل عبارت $A = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۲۰}{x}$ ۲) $-\frac{۲۰}{x}$ ۳) $\frac{۱۰}{x}$ ۴) $-\frac{۱۰}{x}$

۵ـ هرگاه $f(x) = \sqrt[۴]{۵ - \sqrt{۲ - x}}$ و $g(x) = ۴ - \sqrt{۵ - \sqrt{۲ - x}}$، حاصل $f(x)f'(x)$ کدام است؟

۱) $g'(x) - ۱$ ۲) $g'(x)$ ۳) $-\frac{۱}{۲}g'(x)$ ۴) $g'(x) + ۱$

۶ـ هرگاه $x = \text{Arcsin}(x - y)$، y' کدام است؟

۱) $y' = \sin x$ ۲) $y' = ۱ - \sin x$ ۳) $y' = ۱ - \cos x$ ۴) $y' = \cos x$

۷ـ هرگاه $f'(\sin^{۲}x) = \cos ۲x$، مشتق تابع $f(۲x)$ کدام است؟

۱) $۲(۱ + ۴x)$ ۲) $۲(۱ - ۴x)$ ۳) $۲(۱ - ۲x)$ ۴) $۴x - ۲$

۸ـ هرگاه $f'(x) = \frac{۱}{۳x}$، مشتق تابع $f(\sqrt{x})$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶x}$ ۲) $\frac{۱}{۴x}$ ۳) $\frac{۱}{x}$ ۴) $\frac{\sqrt{x}}{۲}$

۹ـ هرگاه $f(x) = \frac{x^{۳} + ۴x\sqrt{x} + ۴}{x\sqrt{x} + ۲}$، حاصل $\frac{f'(۴)}{f'(۱)}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۲ ۴) ۱-

۱۰ـ هرگاه $f'(x) = \tan x$، آنگاه مشتق تابع $y = f(\text{Arctan} x)$، کدام است؟

۱) $\frac{-۱}{۱ + x^{۲}}$ ۲) $\frac{x}{۱ + x^{۳}}$ ۳) $\frac{-۱}{۱ + x^{۲}}$ ۴) $\frac{x}{۱ + x^{۲}}$

۱ـ (۱) $x \to ۲ \Rightarrow x^۳ - ۹ < ۰ \Rightarrow f(x) = -x^۳ + ۹ \Rightarrow f'(x) = -۳x^۲ \Rightarrow f'(۲) = -۱۲$

$x \to ۳ \Rightarrow x^۳ - ۹ > ۰ \Rightarrow f(x) = x^۳ - ۹ \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ \Rightarrow f'(۳) = ۲۷$

$f'(۳) + f'(۲) = ۱۵$

۲ـ (۲) $f(x) = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + ۲)}{\sqrt{x} + \sqrt{۲}} = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \Rightarrow f'(۴) = \frac{۱}{۴}$

۳ـ (۱) $\cos\frac{\pi}{۲} = ۰ \Rightarrow f'(x) =$ بقیه × مشتق عامل صفر شونده $= -\sin x(\cos x - ۱)(\cos x - ۲)(\cos x - ۳)$

$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۲}) = -۱(-۱)(-۲)(-۳) = ۶$

۴ـ (۱) $A = \frac{f'(x)g(x) + g'(x)f(x)}{f(x)g(x)} = \frac{(f(x)g(x))'}{f(x)g(x)} = \frac{۲۰x^{۱۹}}{x^{۲۰}} = \frac{۲۰}{x}$

۵ـ (۳) $g(x) = ۴ - (f(x))^۲ \Rightarrow g'(x) = -۲f(x)f'(x) \Rightarrow f(x)f'(x) = -\frac{۱}{۲}g'(x)$

۶ـ (۳) $x = \text{Arcsin}x\,(x - y) \Rightarrow \sin x = x - y \Rightarrow y = x - \sin x \Rightarrow y' = ۱ - \cos x$

۷ـ (۲) $f'(\sin^۲ x) = ۱ - ۲\sin^۲ x \Rightarrow f'(x) = ۱ - ۲x$

$(f(۲x))' = ۲f'(۲x) = ۲(۱ - ۲(۲x)) = ۲(۱ - ۴x)$

۸ـ (۱) $(f(\sqrt{x}))' = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} f'(\sqrt{x}) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \times \frac{۱}{۳\sqrt{x}} = \frac{۱}{۶x}$

۹ـ (۳) $f(x) = \frac{(x\sqrt{x} + ۲)^۲}{x\sqrt{x} + ۲} = x\sqrt{x} + ۲ = x^{\frac{۳}{۲}} + ۲$

$f'(x) = \frac{۳}{۲}\sqrt{x} \Rightarrow \frac{f'(۴)}{f'(۱)} = \frac{۳}{\frac{۳}{۲}} = ۲$

۱۰ـ (۴) $y' = \frac{۱}{۱ + x^۲} f'(\text{Arctan}x) = \frac{۱}{۱ + x^۲}\tan(\text{Arctan}x) = \frac{x}{۱ + x^۲}$

اگر اشخاص تنبل وقت را می‌کشند مردان ساعی آنرا احیا می‌کنند.

«کلریچ»

تست ۴:

۱ـ دو تابع $f(x)=\frac{x^2+x}{2x^2+1}$ و $g(x)=\frac{4x^2+2x+a-1}{4x^2+2}$ مفروضند، هرگاه داشته باشیم: $\forall x\in R: f'(x)=g'(x)$، a کدام است؟

۱) ۰　۲) ۱−　۳) ۲　۴) ۱

۲ـ هرگاه $f(x)=\frac{x^2-4x+5}{x^2+5}$ و $g(x)=\frac{x}{x^2+5}$، حاصل $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ کدام است؟

۱) ۲　۲) ۲−　۳) ۴　۴) ۴−

۳ـ هرگاه $y + y' = x$ باشد، حاصل $y - y''$ کدام است؟

۱) ۱　۲) $x-1$　۳) $x+1$　۴) $1-x$

۴ـ هرگاه $y=\sqrt{2x+2}$، حاصل عبارت $A=\sqrt{2yy'+2x}$ کدام است؟

۱) y　۲) y'　۳) $\sqrt{y}$　۴) $\sqrt{y'}$

۵ـ هرگاه $x^2=y^2+1$، مقدار $y''y^3+1$ کدام است؟ $(y\neq 0)$

۱) ۰　۲) ۱　۳) ۱−　۴) $\frac{1}{2}$

۶ـ هرگاه $f(\sqrt{x})+g(\sqrt[3]{x})=x$ و $f'(8)=32$ باشد، $g'(4)$ برابر است با:

۱) ۴۸−　۲) ۴۸　۳) ۲۴　۴) ۲۴−

۷ـ هرگاه $f(x)=(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$، حاصل $f(x)+(x-1)f'(x)$ کدام است؟

۱) $8x^7$　۲) $16x^{15}$　۳) $15x^4$　۴) $9x^8$

۸ـ مشتق دوم تابع $y=\text{Arcsinx}$ کدام است؟

۱) $\sec^2 y\tan y$　۲) $\sec y\tan y$　۳) $\sin y\tan y$　۴) $\cos y\cot y$

۹ـ مشتق nام تابع $y=f(\frac{x}{a})$ کدام است؟

۱) $a^n f^{(n)}(\frac{x}{a})$　۲) $\frac{f^{(n)}(\frac{x}{a})}{a^n}$　۳) $a^n n! f^{(n)}(\frac{x}{a})$　۴) $\frac{f^{(n)}(\frac{x}{a})}{a^{2n}}$

۱۰ـ هرگاه $u=(\tan x-1)^5$ و $y=\sqrt{u^2+u}$، مقدار مشتق دوم y برحسب x در $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) ۱−　۲) ۰　۳) ۲　۴) ۵

۱ـ (۳)
$$g'(x)=f'(x) \Rightarrow g(x)-f(x)=c \Rightarrow g(x)-f(x)=\frac{2x^2+a-1}{4x^2+2}=c$$
برای اینکه کسر فوق ثابت باشد، باید داشته باشیم: $\frac{2}{4}=\frac{a-1}{2} \Rightarrow 4a-4=4 \Rightarrow a=2$

۲ـ (۴)
$$f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+5}-\frac{4x}{x^2+5}=1-4g(x) \Rightarrow f'(x)=-4g'(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)}=-4$$

۳ـ (۲)
$$y+y'=x \Rightarrow \begin{cases} y'+y''=1 \\ y+y'=x \end{cases} \Rightarrow y-y''=x-1$$

۴ـ (۱)
$$y=\sqrt{2x+2} \Rightarrow y^2=2x+2 \Rightarrow 2yy'=2 \Rightarrow 2yy'+2x=2+2x$$
$$\sqrt{2yy'+2x}=\sqrt{2x+2} \Rightarrow A=y$$

۵ـ (۱)
$$x^2=y^2+1 \Rightarrow 2x=2yy' \Rightarrow yy'=x \Rightarrow \begin{cases} y'=\frac{x}{y} \\ y'^2+yy''=1 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2}+yy''=1 \Rightarrow x^2+y''y^3=y^2 \Rightarrow y''y^3+1=y^2-x^2+1=-1+1=0$$

۶ـ (۱)
$$\frac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}g'(\sqrt[3]{x})=1 \overset{x=64}{\Rightarrow} \frac{1}{16}f'(8)+\frac{1}{48}g'(4)=1$$
$$\Rightarrow \frac{32}{16}+\frac{g'(4)}{48}=1 \Rightarrow g'(4)=-48$$

۷ـ (۲)
$$(x-1)f(x)=x^{16}-1 \Rightarrow f(x)+(x-1)f'(x)=16x^{15}$$

۸ـ (۱)
$$y=\text{Arcsin}x \Rightarrow x=\sin y \Rightarrow 1=y'\cos y \Rightarrow y'=\frac{1}{\cos y}$$
$$\Rightarrow y''=\frac{0-(-y'\sin y)}{(\cos y)^2}=y'.\sec y.\tan y=\sec^2 y\tan y$$

۹ـ (۲)
$$(f(\frac{x}{a}))'=\frac{1}{a}f'(\frac{x}{a}) \Rightarrow (f(\frac{x}{a}))^{(n)}=(\frac{1}{a})^n f^{(n)}(\frac{x}{a})=\frac{f^{(n)}(\frac{x}{a})}{a^n}$$

۱۰ـ (۲)
$$y=\sqrt{(\tan x-1)^{10}+(\tan x-1)^5}=\sqrt{(\tan x-1)^5[(\tan x-1)^5+1]}$$
$$=\sqrt{(\tan x-1)^5}.\sqrt{(\tan x-1)^5+1}=(\tan x-1)^{\frac{5}{2}}\sqrt{g(x)}$$
چون مرتبه‌ی عامل صفر شونده، یعنی $\tan x-1$ از مرتبه‌ی مشتق بیشتر است ($\frac{5}{2}>2$)، لذا مشتق دوم در این نقطه صفر است.

افسوس که در جوانی نمی‌دانیم و در پیری نمی‌توانیم. «یونانی»

تست ۵:

۱ـ مشتق مرتبه nام تابع $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ کدام است؟

۱) $4^{n-1}\cos(4x + \frac{n\pi}{2})$ ۲) $4^{n-1}\sin(4x + \frac{n\pi}{2})$ ۳) $2^{n-1}\cos(2x + \frac{n\pi}{2})$ ۴) $2^{n-1}\sin(2x + \frac{n\pi}{2})$

۲ـ هرگاه $|x| < 1$ و $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$، $f'(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{1+x^2}$ ۲) $\frac{1}{1-x^2}$ ۳) $\frac{x}{1-x^2}$ ۴) $\frac{x}{1+x^2}$

۳ـ مشتق دوم تابع $y = (x^2-4)(x^2-4x+4)\sin x\cos 5x$ در نقطه‌ی $x = 2$، کدام است؟

۱) 1 ۲) 0 ۳) -1 ۴) $\cos 10$

۴ـ مشتق سوم تابع $y = \cos^3 x\sin x - \sin^3 x\cos x$، به ازاء $x = \frac{\pi}{16}$ کدام است؟

۱) $-16\sqrt{2}$ ۲) $16\sqrt{2}$ ۳) $8\sqrt{2}$ ۴) $-8\sqrt{2}$

۵ـ مشتق سوم تابع $f(x) = \frac{13}{x^2+5}$، به ازاء $x = 0$ کدام است؟

۱) 1 ۲) 0 ۳) -1 ۴) -2

۶ـ هرگاه $f(x) = (x-2)^2(x-3)^3$، حاصل $f''(2)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) -1 ۳) 1 ۴) -2

۷ـ هرگاه $f(x) = \sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\sin\frac{x}{4}$ باشد، $f'(\pi)$ چقدر است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۳) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ۴) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$

۸ـ هرگاه $f(a-bx^3) = g(b+ax^2)$ باشد، حاصل $\frac{f'(a-bx^3)}{g'(b+ax^2)}$ کدام است؟

۱) $\frac{2a}{3b}x$ ۲) $\frac{-2a}{3bx}$ ۳) $\frac{b}{a}x$ ۴) $-\frac{b}{a}x$

۹ـ هرگاه u و v و w توابعی مشتق‌پذیر باشند و $y = uvw$، حاصل $\frac{y'}{y}$ کدام است؟

۱) $\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}$ ۲) $\frac{u'+v'+w'}{u+v+w}$ ۳) $u'v + v'w + w'u$ ۴) $\frac{u}{u'} + \frac{v}{v'} + \frac{w}{w'}$

۱۰ـ حد کسر $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)f(x+2h) - f^2(x)}{h}$ کدام است؟

۱) $f(x)f'(x)$ ۲) $2f(x)f'(x)$ ۳) $3f(x)f'(x)$ ۴) $f^2(x)f'(x)$

۱ـ (۱) $y = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$

$y^{(n)} = \frac{1}{4} \times 4^n \cos(4x + \frac{n\pi}{2}) = 4^{n-1}\cos(4x + \frac{n\pi}{2})$

۲ـ (۱) $f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ... = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$

۳ـ (۲) $y = (x-2)^3(x+2)\sin x \cos 5x$

چون مرتبه‌ی عامل صفر شونده از مرتبه‌ی مشتق بیشتر است، لذا مشتق خواسته شده در نقطه‌ی $x = 2$ صفر است.

۴ـ (۴) $y = \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2}\sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4}\sin 4x$

$y''' = \frac{1}{4} \times 4^3(-\cos 4x) \quad \Rightarrow f'''(\frac{\pi}{16}) = 16(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -8\sqrt{2}$

۵ـ (۲) چون f زوج است لذا f' فرد، f'' زوج و f''' فرد است و بنابراین $f'''(0) = 0$ است.

۶ـ (۴) $y = (x-2)^2 \Rightarrow y' = 2(x-2)$, $y'' = 2$ $\Rightarrow f''(2) = 2(2-3)^3 = -2$ | $x = 2$ بقیه × مشتق دوم عامل صفر شونده

۷ـ (۴) $\Rightarrow f'(\pi) = \cos\pi \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = (-1)(1)(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{-\sqrt{6}}{4}$ | $x = \pi$ بقیه × مشتق عامل صفر شونده

۸ـ (۲) $f(a - bx^3) = g(b + ax^2) \quad \xRightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} \quad -3bx^2 f'(a - bx^3) = 2ax g'(b + ax^2)$

$\frac{f'(a-bx^3)}{g'(b+ax^2)} = \frac{2ax}{-3bx^2} = \frac{-2a}{3bx}$

۹ـ (۱) $\frac{y'}{y} = \frac{u'vw + v'uw + w'uv}{uvw} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}$

۱۰ـ (۳) $\frac{0}{0} \quad \xRightarrow{\text{HOP نسبت به}} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h)f(x+2h) + 2f'(x+2h)f(x+h) - 0}{1} = f'(x)f(x) + 2f'(x)f(x)$

$= 3f'(x)\,f(x)$

انسان نمی‌تواند دو معبود داشته باشد یکی خدا و دیگری مال. «حضرت مسیح»

از عهدهٔ حل مسئله‌ای برنیامدن دلیل عدم وجود و حقیقت آن نیست. «فلاماریون»

تست ۶:

۱ـ هرگاه $f(3x+1) = f(3x^2-1)$، مقدار عبارت $A=\frac{4f'(4)+3f'(2)}{5f'(2)}$ کدام است؟ ($f'(2) \neq 0$)

۱) $\frac{5}{11}$ ۲) $\frac{6}{5}$ ۳) $\frac{11}{8}$ ۴) $\frac{11}{5}$

۲ـ مشتق تابع پارامتری $\begin{cases} x = \text{Arcsin}\frac{1}{1+t^2} \\ y = \text{Arccos}\frac{1}{1+t^2} \end{cases}$، کدام است؟

۱) 1 ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

۳ـ هرگاه $f''(x) = \frac{4}{x^2}$، در این صورت مشتق $f'(\frac{2}{x})$ کدام است؟

۱) 2 ۲) -2 ۳) $\frac{4}{x}$ ۴) $-\frac{4}{x}$

۴ـ حاصل $\lim_{x \to u} \frac{uf(x)-xf(u)}{x-u}$، کدام است؟ (f تابعی مشتق‌پذیر است)

۱) $f(u)$ ۲) $f(u)-f'(u)$ ۳) $uf(u)-f'(u)$ ۴) $uf'(u)-f(u)$

۵ـ مشتق تابع $y = f(x^5+x^3)$، نسبت به متغیر x^3، کدام است؟

۱) $\frac{5}{3}x+1$ ۲) $(\frac{5}{3}x+1)f'(x^5+x^3)$ ۳) $(\frac{5}{3}x^2+1)f'(x^5+x^3)$ ۴) $f'(\frac{5}{3}x+1)$

۶ـ هرگاه $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$، $\lim_{x \to 0} f'(x)$ کدام است؟

۱) 0 ۲) 1 ۳) -1 ۴) موجود نیست

۷ـ مشتق تابع $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\dots}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2y-1}$ ۲) $\frac{1}{2y+1}$ ۳) $\frac{x}{2y-1}$ ۴) $\frac{x}{2y+1}$

۸ـ مشتق nام تابع $y = 2\cos^2\frac{x}{2}$ کدام است؟

۱) $y^{(n)} = \sin(x+\frac{n\pi}{2})$ ۲) $y^{(n)} = \cos(x+\frac{n\pi}{2})$

۳) $y^{(n)} = \sin(\frac{n\pi}{2}-x)$ ۴) $y^{(n)} = \cos(\frac{n\pi}{2}-x)$

۹ـ هرگاه $f(x) = \begin{cases} 3x & ,(x \geq 3) \\ x^3 & ,(x < 3) \end{cases}$ ، $g(x) = \begin{cases} x^2+1 & ,(x \geq 3) \\ 2x-5 & ,(x < 3) \end{cases}$ باشد، مشتق تابع $y = (fog)(x)$ با شرط $x < 1$ کدام است؟

۱) $3(2x-5)^2$ ۲) $6(2x-5)^2$ ۳) 6 ۴) $6x$

۱۰ـ هرگاه برای هر x و y، رابطه‌ی $f(x+y) = f(x)f(y)$ برقرار باشد و $f(5) = 2$ و $f'(5) = k$ باشد، $f'(0)$ کدام است؟

۱) $\frac{k}{2}$ ۲) $2k$ ۳) $3k$ ۴) $4k$

۱ـ (۴) از طرفین فرض مشتق می‌گیریم. $\Rightarrow 3f'(3x+1) = 6xf'(3x^2-1) \overset{x=1}{\Rightarrow} 3f'(4) = 6f'(2) \Rightarrow f'(4) = 2f'(2)$

$$A = \frac{8f'(2) + 3f'(2)}{5f'(2)} = \frac{11}{5}$$

۲ـ (۲)

روش اول:

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{1+t^2} \\ \cos y = \frac{1}{1+t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \cos y \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow y' = -1 \\ 0 < \frac{1}{1+t^2} < 1 \end{cases}$$

روش دوم:

$$\text{Arcsin}\frac{1}{1+t^2} + \text{Arccos}\frac{1}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x + y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow y' = -1$$

۳ـ (۲)

$$(f'(\frac{2}{x}))' = \frac{-2}{x^2} f''(\frac{2}{x}) = \frac{-2}{x^2} \times \frac{4}{(\frac{2}{x})^2} = -2$$

یادآوری: $(f(u))' = u'f'(u)$

۴ـ (۴)

$$\frac{0}{0} \overset{\text{HOP نسبت به } x}{\Rightarrow} \lim_{x \to u} \frac{uf'(x) - f(u)}{1} = uf'(u) - f(u)$$

۵ـ (۳)

$$y'_{x^3} = \frac{y'_x}{(x^3)'_x} = \frac{(5x^4 + 3x^2) f'(x^5 + x^3)}{3x^2} = (\frac{5}{3}x^2 + 1) f'(x^5 + x^3)$$

۶ـ (۲)

$$f'(x) = \frac{2x^2 \cos x^2 - \sin x^2}{x^2} = 2\cos x^2 - \frac{\sin x^2}{x^2} \qquad (x \neq 0)$$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = 2 - 1 = 1$$

۷ـ (۱)

$$y^2 = x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}} \Rightarrow y^2 - x - y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{-1}{2y-1} = \frac{1}{2y-1}$$

۸ـ (۲)

$y = 1 + \cos x$ (فرمول طلائی) $\Rightarrow y^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$

۹ـ (۲)

$$x < 1 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow g(x) = 2x - 5 \Rightarrow y = (fog)(x) = f(g(x)) = f(2x - 5)$$

$$x < 1 \Rightarrow g(x) = 2x - 5 < 3 \Rightarrow f(2x - 5) = (2x - 5)^3$$

$$x < 1 \Rightarrow (fog)(x) = (2x - 5)^3 \Rightarrow (fog)'(x) = 6(2x - 5)^2$$

۱۰ـ (۱) لازم به ذکر است که برای تابع $f(x) = a^x$ ، رابطه‌ی $f(x+y) = f(x)f(y)$ برقرار است. $f(5) = 2 \Rightarrow a^5 = 2$

$$f'(x) = a^x \text{Ln}a \Rightarrow f'(5) = k \Rightarrow a^5 \text{Ln}a = k \Rightarrow \text{Ln}a = \frac{k}{2} \Rightarrow f'(0) = \text{Ln}a = \frac{k}{2}$$

تست ۷:

۱ـ هرگاه $f(۲x) = f'(x)\, f''(x)$ باشد، آنگاه $f(x)$ برابر است با:

۱) $۲x^۳$ ۲) $\frac{۴}{۹}x^۳$ ۳) $\frac{۹}{۴}x^۳$ ۴) $۳x^۳$

۲ـ هرگاه $f(x)$ یک تابع درجه‌ی دوم و α و β ریشه‌های معادله‌ی $f(x) = ۰$ باشند، حاصل $f'(\alpha)+f'(\beta)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱− ۳) ۰ ۴) $\alpha+\beta$

۳ـ هرگاه $f(x) = e^x \sin x$ باشد، حاصل $y'' - ۲y' + ۲y$ کدام است؟

۱) $۱-x$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) $۱+x$

۴ـ در رابطه‌ی $Ln(x+y) - \sin(x+y) = ۰$، مقدار مشتق y نسبت به x برابر است با:

۱) $\frac{۱}{x+y}$ ۲) $\frac{-۱}{x+y}$ ۳) ۱ ۴) ۱−

۵ـ هرگاه $\forall x \in R: f(x) > ۰$ باشد و f در $x = ۱$ مشتق‌پذیر باشد و $f^۲(x) + f(x^۲) = ۱۲x$ باشد، $f'(۱)$ برابر است با:

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۶ـ هرگاه نمودار تابع $f(x) = |x^۳ - ۲x^۲ + ax|$، فقط یک نقطه‌ی زاویه‌ی دار داشته باشد، a کدام است؟ $(a \neq ۰)$

۱) $|a| \leq ۱$ ۲) $|a| \geq ۱$ ۳) $|a| < ۱$ ۴) $a \geq ۱$

۷ـ هرگاه $f^۲(x) + g^۲(x) = x$ باشد حاصل $\frac{g(x)}{f'(x)} + \frac{f(x)}{g'(x)}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{f'(x)g'(x)}$ ۲) $\frac{۱}{۲f'(x)g'(x)}$ ۳) $f'(x)g'(x)$ ۴) $۲f'(x)g'(x)$

۸ـ مشتق مرتبه‌ی دوم $y = x^۲|x|$ کدام است؟

۱) $۲|x| + x^۲$ ۲) $۳|x|$ ۳) $۶|x|$ ۴) $۳\frac{x^۲}{|x|} + ۶x$

۹ـ هرگاه $x = a(t + \sin t)$ و $y = a(۱ - \cos t)$ و $a \neq ۰$، آنگاه y'_x بازاء $t = \frac{\pi}{۴}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲} - ۱$ ۲) $\sqrt{۲} + ۱$ ۳) $۲ - \sqrt{۳}$ ۴) $۲ + \sqrt{۳}$

۱۰ـ مقدار مشتق عبارت $Z = \sin(x + \frac{۵\pi}{۳})\cos(x - \frac{\pi}{۳}) + \cos(x + \frac{۵\pi}{۳})\sin(x - \frac{\pi}{۳})$ در نقطه‌ی $x = \frac{\pi}{۶}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) ۱

۱ـ (۲) با توجه به گزینه‌ها، فرض می‌کنیم $f(x) = ax^۳$ بنابراین:

$$\begin{cases} f(۲x) = ۸ax^۳ \\ f'(x) = ۳ax^۲ \\ f''(x) = ۶ax \end{cases} \Rightarrow ۸ax^۳ = (۳ax^۲)(۶ax) \Rightarrow a = \frac{۴}{۹} \Rightarrow f(x) = \frac{۴}{۹}x^۳$$

۲ـ (۳)

$$f(x) = ax^۲ + bx + c \Rightarrow f'(x) = ۲ax + b$$

$$f'(\alpha) + f'(\beta) = (۲a\alpha + b) + (۲a\beta + b) = ۲a(\alpha + \beta) + ۲b = ۲a(-\frac{b}{a}) + ۲b = ۰$$

یادآوری: $S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

۳ـ (۲)

$$y' = e^x \sin x + e^x \cos x \Rightarrow y' = y + e^x \cos x$$

$$y'' = y' + \underbrace{e^x \cos x}_{y'-y} - \underbrace{e^x \sin x}_{y} = ۲y' - ۲y \Rightarrow y'' - ۲y' + ۲y = ۰$$

۴ـ (۴)

$$y' = -\frac{f'x}{f'y} = -\frac{\frac{۱}{x+y} - \cos(x+y)}{\frac{۱}{x+y} - \cos(x+y)} = -۱$$

۵ـ (۳)

مشتق می‌گیریم. $\Rightarrow ۲f(x)f'(x) + ۲x f'(x^۲) = ۱۲ \overset{x=۱}{\Rightarrow} ۲f(۱)f'(۱) + ۲f'(۱) = ۱۲ \quad (۱)$

اکنون $f(۱)$ را حساب می‌کنیم ، برای این منظور به جای x در رابطه‌ی داده شده (۱) می‌گذاریم.

$$f^۲(۱) + f(۱) - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (f(۱)+۴)(f(۱)-۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} f(۱) = -۴ & \text{غیرقابل قبول} \\ f(۱) = ۳ \end{cases}$$

$$(۱) \quad \Rightarrow ۶f'(۱) + ۲f'(۱) = ۱۲ \Rightarrow f'(۱) = \frac{۳}{۲}$$

۶ـ (۴)

$$f(x) = |x(x^۲ - ۲x + a)| \Rightarrow x^۲ - ۲x + a = ۰ \Rightarrow \Delta' \le ۰ \Rightarrow ۱ - a \le ۰ \Rightarrow a \ge ۱$$

توجه داشته باشید که $x = ۰$ برای تابع فوق، نقطه‌ی زاویه‌دار است.

۷ـ (۲)

مشتق می‌گیریم. $\Rightarrow ۲f(x)f'(x) + ۲g(x)g'(x) = ۱$

$$f(x)f'(x) + g(x)g'(x) = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{f(x)f'(x) + g(x)g'(x)}{g'(x)f'(x)} = \frac{۱}{۲f'(x)g'(x)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g'(x)} + \frac{g(x)}{f'(x)} = \frac{۱}{۲f'(x)g'(x)}$$

۸ـ (۳)

$$y = \begin{cases} x^۳ & ,(x \ge ۰) \\ -x^۳ & ,(x < ۰) \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} ۳x^۲ & (x \ge ۰) \\ -۳x^۲ & (x < ۰) \end{cases} \Rightarrow y'' = \begin{cases} ۶x & ,(x \ge ۰) \\ -۶x & ,(x < ۰) \end{cases} \Rightarrow y'' = ۶|x|$$

۹ـ (۱)

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a + a\cos t} \overset{t=\frac{\pi}{۴}}{\Rightarrow} y' = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}a}{a + \frac{\sqrt{۲}}{۲}a} = \frac{\sqrt{۲}a}{۲a + \sqrt{۲}a} = \frac{\sqrt{۲}}{۲ + \sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲} + ۱} = \sqrt{۲} - ۱$$

۱۰ـ (۴)

$$Z = \sin(x + \frac{۵\pi}{۳} + x - \frac{\pi}{۳}) = \sin(۲x + \frac{۴\pi}{۳})$$

$$Z' = ۲\cos(۲x + \frac{۴\pi}{۳}) \overset{x=\frac{\pi}{۶}}{\Rightarrow} Z'(\frac{\pi}{۶}) = ۲\cos(\frac{۵\pi}{۳}) = ۲\cos\frac{\pi}{۳} = ۱$$

تست ۸:

۱ـ f تابعی مشتق‌پذیر و معکوس‌پذیر است که از نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}-۱\\ ۳\end{matrix}\right.$ می‌گذرد و داریم:

$\lim\limits_{h \to ۰} \frac{f^{-۱}(۳+h) - f^{-۱}(۳)}{۳h} = ۱۵$ در این صورت مقدار $f'(-۱)$ کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) $\frac{۱}{۴۵}$ ۳) $\frac{۱}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۲ـ هرگاه $f(x) = \sqrt[۳]{x^۳ - ۲}$، حاصل $(f^{-۱})'(-۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) ۵

۳ـ هرگاه $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ &,(x > ۱) \\ \sqrt[۳]{x - ۱} &,(x \leq ۱) \end{cases}$، حاصل $(f^{-۱})'(۳)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۴ـ در نقطه‌ی A واقع بر منحنی به معادله‌ی $y = x(x^۴ + ۱)$، مماسی بر آن رسم کرده‌ایم، نقطه‌ی A'، نقطه‌ی متناظر A روی تابع معکوس f است، اگر خطوط مماس در نقاط A و A'، موازی باشند، مختصات A کدام است؟

۱) (۱ و ۰) ۲) (۱ و ۱) ۳) (۰ و ۰) ۴) (۱ و ۲)

۵ـ هرگاه $\lim\limits_{x \to ۳} \frac{f^{-۱}(x) - f^{-۱}(۳)}{۲x - ۶} = ۱۰$ باشد، مشتق تابع $y = f^{-۱}(\frac{۱}{x})$ در $x = \frac{۱}{۳}$ کدام است؟

۱) ۹۰- ۲) ۱۸۰ ۳) ۱۸۰- ۴) ۴۵-

۶ـ هرگاه $f(x) = x^۵ + x$، حاصل $(f^{-۱})''(۲)$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲۰}$ ۲) $\frac{-۵}{۵۴}$ ۳) $\frac{۵}{۵۴}$ ۴) $-\frac{۴}{۹}$

۷ـ زاویه‌ی بین دو نیم مماس مرسوم بر منحنی نمایش تابع $y = x\sqrt{x^۲ - ۲x + ۱}$ در نقطه‌ای از آن به طول $x = ۱$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴}$

۸ـ از نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}۶\\ ۰\end{matrix}\right.$ مماسی بر منحنی $y = \frac{۲}{x}$ رسم کرده‌ایم، طول نقطه‌ی تماس کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) ۲

۹ـ زاویه‌ی بین منحنی $y = x^۳ + x$ و منحنی تابع معکوس آن کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۶}$

۱۰ـ منحنی $x^۲ + y^۲ - xy = ۱$، محور xها را با چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

۱) $\text{Arctan}\frac{۱}{۲}$ ۲) Arctan۲ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) ۰

۱ـ (۲) $\frac{۱}{۳}(f^{-۱})'(۳) = ۱۵ \Rightarrow (f^{-۱})'(۳) = ۴۵ \Rightarrow (f^{-۱})'(۳) = \frac{۱}{f'(۱)} \Rightarrow ۴۵ = \frac{۱}{f'(۱)} \Rightarrow f'(۱) = \frac{۱}{۴۵}$

۲ـ (۱) $A \left| \begin{array}{l} a = ۱ \\ b = -۱ \end{array} \right. \Rightarrow -۱ = \sqrt[۳]{x^۳ - ۲} \Rightarrow x = ۱$

$A' \left| \begin{array}{l} b = -۱ \\ a = ۱ \end{array} \right. \Rightarrow f'(x) = \frac{۱ \times ۳x^۲}{۳\sqrt[۳]{(x^۳ - ۲)^۲}} \Rightarrow f'(۱) = \frac{۳}{-۳} = ۱ \Rightarrow (f^{-۱})'(-۱) = \frac{۱}{f'(۱)} = ۱$

۳ـ (۴) $x^۲ - ۱ = ۳ \Rightarrow x = ۲ \overset{۲>۱}{\Rightarrow} a = ۲$

$x > ۱ \Rightarrow f'(x) = ۲x \Rightarrow f'(۲) = ۴$

$(f^{-۱})'(۳) = \frac{۱}{f'(۲)} = \frac{۱}{۴}$

توجه داشته باشید که به ازاء $b = ۳$، فقط عبارت $x^۲ - ۱$ می‌تواند مساوی ۳ باشد. زیرا:

$\sqrt[۳]{x - ۱} = ۳ \Rightarrow x = ۲۸$ غیرقابل قبول

۴ـ (۳) $(f^{-۱})'(y) = \frac{۱}{f'(x)} \Rightarrow \frac{۱}{f'(x)} = f'(x) \Rightarrow f'(x) = \pm ۱ \Rightarrow ۵x^۴ + ۱ = ۱ \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow y = ۰ \Rightarrow (۰, ۰)$

۵ـ (۳) $\Rightarrow \frac{۱}{۲}(f^{-۱})'(۳) = ۱۰ \Rightarrow (f^{-۱})'(۳) = ۲۰$

$y = f^{-۱}(\frac{۱}{x}) \Rightarrow y' = \frac{-۱}{x^۲}(f^{-۱})'(\frac{۱}{x}) \Rightarrow y'(\frac{۱}{۳}) = (-۹)(۲۰) = -۱۸۰$

۶ـ (۲) $A \left| \begin{array}{l} a = ۱ \\ b = ۲ \end{array} \right. \Rightarrow ۲ = x^۵ + x \Rightarrow x = ۱$

$f(x) = x^۵ + x$

$f'(x) = ۵x^۴ + ۱ \Rightarrow f'(۱) = ۶$

$A' \left| \begin{array}{l} b = ۲ \\ a = ۱ \end{array} \right.$

$f''(x) = ۲۰x \Rightarrow f''(۱) = ۲۰$

$\Rightarrow (f^{-۱})''(۲) = \frac{-۲۰}{۲۱۶} = \frac{-۵}{۵۴}$

۷ـ (۳) $y = x|x - ۱| \Rightarrow \begin{cases} f'_+(۱) = \lim\limits_{x \to ۱^+} \frac{x|x - ۱| - ۰}{x - ۱} = ۱ = m \\ f'_-(۱) = \lim\limits_{x \to ۱^-} \frac{x|x - ۱| - ۰}{x - ۱} = -۱ = m \end{cases} \Rightarrow mm' = -۱ \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{۲}$

$A \left| \begin{array}{l} ۶ \\ ۰ \end{array} \right.$

۸ـ (۱) نقطه تماس $\left| \begin{array}{l} \alpha \\ \frac{۲}{\alpha} \end{array} \right. \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{-۲}{\alpha^۲} \Rightarrow y - \frac{۲}{\alpha} = \frac{-۲}{\alpha^۲}(x - \alpha) \Rightarrow ۰ - \frac{۲}{\alpha} = \frac{-۲}{\alpha^۲}(۶ - \alpha) \Rightarrow \alpha = ۳$

۹ـ (۴)

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^3 + x \end{cases} \Rightarrow x^3 + x = x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = f'(0) = \sqrt{3} \\ m' = (f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\tan\alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right| = \left| \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$

۱۰ـ (۲)

$$y = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow A \left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right. \Rightarrow y' = -\frac{2x - y}{2y - x} \Rightarrow m = 2 \Rightarrow \tan\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \text{Arctan}\,2$$

من نیز که مسیح هستم، نیامده‌ام تا کسی به من خدمت کند، بلکه آمده‌ام تا به دیگران کمک کنم و جانم را در راه آزادی دیگران فدا سازم. «انجیل مرتسی باب ۱۰ آیهٔ ۴۵)

ای من به فدای آن کس که دلش با زبانش یکی است.

«استاد شهریار»

امید دارویی است که شفا نمی‌دهد، اما درد را قابل تحمل می‌کند.

«مارسل آشار»

تست ۹:

۱ـ تانژانت زاویه‌ی بین منحنی $y=\sqrt[n]{x}$ و منحنی وارون آن در ربع اول، کدام است؟

۱) $\frac{n^2-1}{n}$ ۲) $\frac{n^2+1}{2n}$ ۳) $\frac{n^2-1}{2n}$ ۴) $\frac{n^2+1}{n}$

۲ـ به ازاء چه مقدار m، منحنی $y=x^3-3x+m-1$ بر محور xها، مماس است؟

۱) ۱- یا ۳ ۲) ۱ یا ۳- ۳) ۱- یا ۳- ۴) ۱ یا ۳

۳ـ شیب خط مماس برمنحنی به معادله‌ی $x=\text{Arctan}\frac{y}{x}$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $1-\frac{\pi}{2}$ ۲) $1+\frac{\pi}{4}$ ۳) $1+\frac{\pi}{2}$ ۴) $1-\pi$

۴ـ زاویه‌ی منحنی $y=\frac{\sqrt{3}x+1}{x^2+1}$ با محور yها، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۵ـ از نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر منحنی $y=x^2-9$، قائمی بر منحنی $y=x^2$ رسم شده، طول پای قائم کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۶ـ هرگاه شیب خط مماس بر تابع f در نقطه‌ی (۳ و ۲) واقع بر تابع، برابر ۵ باشد، حاصل $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{(f(x))^2-9}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$ ۲) $\frac{1}{15}$ ۳) $-\frac{1}{15}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۷ـ از نقطه‌ی C(۳ و ۱-)، چند عمود، می‌توان بر منحنی $x^2+y^2+2x-6y-15=0$ رسم کرد؟

۱) بیشمار ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) مماس نمی‌توان رسم کرد

۸ـ f تابعی است فرد و در سرتاسر R مشتق‌پذیر است، هرگاه معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ای به طول (۲) واقع بر منحنی به صورت $y=3x+4$ باشد، معادله‌ی خط مماس بر این تابع در نقطه‌ای به طول (۲-) واقع بر آن کدام است؟

۱) $y=4x+3$ ۲) $y=4x-3$ ۳) $y=3x-4$ ۴) $y=3x+4$

۹ـ هرگاه c عددی مربوطه به قضیه‌ی رول، در مورد تابع $y=(x-1)\sin x$ بر بازه‌ی $[0,1]$ باشد، tanc کدام است؟

۱) $\frac{1}{1-c}$ ۲) $\frac{1}{1+c}$ ۳) $1-c$ ۴) $1+c$

۱۰ـ اگر c، عدد مربوط به قضیه‌ی مقدار میانگین (قضیه‌ی لاگرانژ)، در مورد تابع $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$، $(\alpha\neq 0)$ روی بازه‌ی [a,b]، برابر $\sqrt{3}$ باشد، a+b کدام است؟

۱) $2\sqrt{3}$ ۲) $3\sqrt{3}$ ۳) $2+\sqrt{3}$ ۴) $3+\sqrt{3}$

۱ـ (۳)

$$\begin{cases} y=\sqrt[n]{x} \\ y=x^n \end{cases} \Rightarrow x=1 \Rightarrow \begin{cases} y'=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \Rightarrow m=f'(1)=\dfrac{1}{n} \\ y'=nx^{n-1} \Rightarrow m'=f'(1)=n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan\omega = \left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right| = \left|\frac{\frac{1}{n}-n}{1+1}\right| = \frac{n^2-1}{2n}$$

۲ـ (۱)

$$\begin{cases} y=0 \Rightarrow x^3-3x+m-1=0 \overset{x=\pm 1}{\Rightarrow} \begin{cases} 1-3+m-1=0 \\ -1+3+m-1=0 \end{cases} \Rightarrow m=-1 \text{ یا } 3 \\ y'=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm 1 \end{cases}$$

۳ـ (۳)

$$\mathrm{Arctan}\frac{y}{x}=x \Rightarrow \frac{y}{x}=\tan x \Rightarrow y=x\tan x$$

$$y'=\tan x+x(1+\tan^2x) \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+\frac{\pi}{4}(1+1)=1+\frac{\pi}{2}$$

۴ـ (۲)

$$x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow A\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \Rightarrow y'=\frac{\sqrt{3}(x^2+1)-2x(\sqrt{3}x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$\Rightarrow y'(0)=\sqrt{3} \Rightarrow \alpha=60^\circ$ زاویه با محور xها $\Rightarrow \beta=30^\circ$ زاویه با محور yها

۵ـ (۲)

$A\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right. \Rightarrow$ پای قائم $M\left|\begin{matrix}\alpha\\\alpha^2\end{matrix}\right. \Rightarrow y'=2x \Rightarrow$ مماس $m=2\alpha$ $\quad A\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right.$

قائم $m=\dfrac{-1}{2\alpha} \Rightarrow y-\alpha^2=\dfrac{-1}{2\alpha}(x-\alpha) \Rightarrow -\alpha^2=\dfrac{-1}{2\alpha}(3-\alpha) \Rightarrow 2\alpha^3+\alpha-3=0 \Rightarrow$ مجموع ضرایب صفر است

$\Rightarrow \alpha=1$

۶ـ (۲)

$f'(2)=5\ ,\ f(2)=3$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{(f(x))^2-9}=\frac{0}{0} \overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x\to 2}\frac{2x-2}{2f(x)f'(x)}=\frac{1}{15}$$

۷ـ (۱) معادله‌ی داده شده، معادله‌ی یک دایره به مرکز (۳ و ۱−) است، $(x+1)^2+(y-3)^2=25$ چون شعاعهای هر دایره، بر دایره عمودند، پس از مرکز دایره، بی‌شمار خط عمود، که همان شعاعهای دایره می‌باشند، می‌توان بر دایره عمود کرد.

۸ـ (۳)

$A\left|\begin{matrix}2\\10\end{matrix}\right.$ $\qquad y=3(2)+4=10$

$f(-2)=-f(2)=-10$

$B\left|\begin{matrix}-2\\-10\end{matrix}\right.$ $\qquad$ فرد $f \Rightarrow$ زوج $f' \Rightarrow y=3x+4 \Rightarrow f'(2)=3 \Rightarrow f'(-2)=3$

$\Rightarrow y+10=3(x+2) \Rightarrow y=3x-4$

۹ـ (۳)

$$y'=\sin x+(x-1)\cos x=0 \Rightarrow f'(c)=0 \Rightarrow \sin c+(c-1)\cos c=0 \Rightarrow \tan c=1-c$$

۱۰ـ (۱)

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \Rightarrow \frac{\alpha(b^2-a^2)+\beta(b-a)}{b-a}=2\alpha c+\beta$$

$$\alpha(b+a)+\beta=2\alpha c+\beta \Rightarrow b+a=2c=2\sqrt{3}$$

تست ۱۰:

۱ـ به ازاء چند مقدار a، منحنی $y = (x-1)(x^2+ax+4)$، بر محور xها مماس است؟

۱) یک مقدار ۲) دو مقدار ۳) سه مقدار ۴) هیچ مقدار

۲ـ به ازاء کدام مقدار a، نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{2\cos x + a}{\cos x - 1}$ بر محور xها مماس است؟

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۱− ۴) ۲

۳ـ هرگاه f اکیداً نزولی و g بر R_f اکیداً صعودی باشد، gof چگونه است؟

۱) اکیداً نزولی ۲) اکیداً صعودی

۳) گاهی صعودی و گاهی نزولی ۴) ثابت است.

۴ـ تابع $y = (x^2-1)^3$ در دامنه‌ی خود چند بار تغییر انحنا می‌دهد؟

۱) یک بار ۲) دو بار ۳) سه بار ۴) چهار بار

۵ـ هرگاه مماس مشترک دو منحنی $y = x^2 - 2x + 3$ و $y = -x^2 + 2ax$، موازی محور xها باشد، a چقدر است؟

۱) ± 1 ۲) $\pm\sqrt{2}$ ۳) ± 2 ۴) $\pm\sqrt{3}$

۶ـ هرگاه Max نسبی تابع $y = x^3 - 3x + a$ برابر ۵ باشد، a کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۴ ۴) ۶

۷ـ هرگاه خط $4x + 3y = m$ از نقاط اکسترمم منحنی تابع $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ بگذرد، m چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۲− ۳) ۷− ۴) ۷

۸ـ در تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x + 1$، حاصل $f(2+k) + f(2-k)$ چقدر است؟

۱) ۱۰ ۲) $10+k$ ۳) ۵ ۴) $10-k$

۹ـ اگر نقطه‌ای به طول یک، نقطه‌ی بازگشت تابع $y = \sqrt[3]{x^3 + ax + b}$ باشد، b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰ـ اگر نقطه‌ی عطف تابع $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$، در ناحیه‌ی چهارم محورهای مختصات باشد، حدود m کدام است؟

۱) $m > 1$ ۲) $m < 1$ ۳) $m > 0$ ۴) $m < 0$

۱ـ (۳) فرض می‌کنیم: $(x-1)(x^2+ax+4)=0 \Rightarrow (x-1)(x-x')(x-x'')=0$

در دو حالت، معادله‌ی فوق ریشه‌ی مضاعف دارد یا اینکه $x'=x''$ باشد یعنی $\Delta=0$ لذا $a^2-16=0$ و از آنجا $a=\pm 4$ و یا اینکه یکی از x' و x'' برابر ۱ باشند یعنی $1+a+4=0$ در نتیجه $a=-5$

۲ـ (۴) $y=0 \Rightarrow \cos x=-\frac{a}{2}$

برای اینکه معادله‌ی مزبور ریشه‌ی مضاعف داشته باشد باید $\cos x=1$ یا $\cos x=-1$ (***یادآوری:*** معادلات $\cos x=1$ و $\cos x=-1$ ریشه‌ی مضاعف دارند)، اما با توجه به مخرج، $\cos x=1$، غیرقابل قبول است پس فقط $-\frac{a}{2}=-1$ و لذا $a=2$

۳ـ (۱) $x_1<x_2 \overset{\text{اکیداً نزولی } f}{\Rightarrow} f(x_1)>f(x_2) \overset{\text{اکیداً صعودی } g}{\Rightarrow} g(f(x_1))>g(f(x_2)) \Rightarrow (gof)(x_1)>(gof)(x_2) \Rightarrow gof$ اکیداً نزولی

راه دوم: $\left.\begin{matrix} f \text{ اکیداً نزولی} \Rightarrow f'<0 \\ g \text{ اکیداً صعودی} \Rightarrow g'>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (gof)'=f'\times g'(f)<0 \Rightarrow gof$ اکیداً نزولی

۴ـ (۴) $f'(x)=6x(x^2-1)^2 \Rightarrow f''(x)=6[(x^2-1)^2+4x^2(x^2-1)]=6(x^2-1)(5x^2-1)$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=\pm 1 \;,\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$　چهار ریشه‌ی ساده $\Leftarrow$ چهار عطف دارد $\Leftarrow$ چهار بار تغییر انحنا می‌دهد

۵ـ (۲) فقط در نقاط اکسترمم دو تابع می‌توان، مماس موازی محور xها بر دو منحنی رسم کرد، برای اینکه مماس مشترک دو منحنی موازی محور xها باشد، باید عرض ماکزیمم و می‌نیمم دو منحنی با هم برابر باشد.

$$\left.\begin{matrix} y'=2x-2=0 \Rightarrow Min(1,2) \\ y'=-2x+2a=0 \Rightarrow Max(a,a^2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^2=2 \Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$$

۶ـ (۱) $y'=3x^2-3=0 \Rightarrow x=\pm 1$

$y''=6x \Rightarrow y''(1)>0 \Rightarrow x=1$ طول Min , $y''(-1)<0 \Rightarrow x=-1$ طول Max

$\Rightarrow y_{Max}=-1+3+a=5 \Rightarrow a=3$

۷ـ (۴) خطی که از نقاط اکسترمم بگذرد، از نقطه‌ی عطف نیز می‌گذرد.

$$\begin{cases} x_{\text{عطف}}=\frac{-b}{3a}=1 \\ y_{\text{عطف}}=1 \end{cases} \Rightarrow 3y+4x=m \overset{(1,1)}{\Rightarrow} 3+4=m \Rightarrow m=7$$

۸ـ (۱) مرکز تقارن تابع، همان نقطه‌ی عطفش یعنی نقطه‌ی (۵ و ۲) است، نقاط $2-k$ و $2+k$ نسبت به نقطه‌ی عطف قرینه‌ی یکدیگرند پس: $f(2-k)+f(2+k)=2y_{\text{عطف}}=10$

۹ـ (۲) باید $x=1$ ریشه‌ی مضاعف زیر رادیکال باشد. یعنی باید:

$$\begin{cases} f(1)=0 \Rightarrow 1+a+b=0 \\ f'(x)=3x^2+a=0 \Rightarrow 3+a=0 \Rightarrow a=-3 \Rightarrow 1-3+b=0 \Rightarrow b=2 \end{cases}$$

۱۰ـ (۲) $x=\frac{-b}{3a}=1$ طول عطف $\Rightarrow y=1-3+m+1<0 \Rightarrow m-1<0 \Rightarrow m<1$

تست ۱۱:

۱ـ مشتق تابع f به صورت $f'(x) = x(x+2)^2(x+1)^3(x-2)^6$ است، این تابع چند اکسترمم است؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۲ـ کدام تابع نقاط بحرانی ندارد؟

۱) $y = x - \lfloor x \rfloor$ ۲) $y = |x| + |x-2|$ ۳) $y = \text{Ln}x$ ۴) $y = \sqrt{x}$

۳ـ هرگاه تابع $y = |x^2 + x + a|$، دارای سه نقطه‌ی بحرانی باشد، a کدامیک از مقادیر زیر را می‌تواند اختیار کند؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{1}{8}$

۴ـ در تابع $y = (x^3 - 3x + 2)(x^2 - 1)^2$، $x = 1$ طول چه نقطه‌ای است؟

۱) Max نسبی ۲) Min نسبی ۳) عطف ۴) عادی

۵ـ طول Min مطلق تابع $y = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 2)^4$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{3}$ ۳) $-\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

۶ـ مقدار Max مطلق تابع $y = 2\sin x + \cos 2x$ در بازه‌ی $[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}]$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۷ـ هرگاه $f'(a) = f(a) = 0$ و $f''(a) < 0$ باشد، نقطه‌ی (a و ۰) کدام است؟

۱) Min روی محور xها ۲) Min روی محور yها ۳) Max روی محور xها ۴) Max روی محور yها

۸ـ هرگاه مقدار Min تابع با ضابطه‌ی $y = (m-1)x^2 + x$، برابر (۱−) باشد، m چقدر است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{9}{8}$

۹ـ هرگاه اعداد $\frac{1}{2}$ و ۲، طولهای نقاط عطف تابع $y = \sqrt[3]{2x^2 + ax + b}$ باشند، a و b کدامند؟

۱) $\begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} a = -5 \\ b = 2 \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} a = -5 \\ b = -2 \end{cases}$

۱۰ـ تابع $y = \sqrt[3]{2 - x^2}$، چند عطف و چند اکسترمم دارد؟

۱) یک عطف و یک اکسترمم ۲) دو عطف و دو اکسترمم

۳) دو عطف و یک اکسترمم ۴) دو عطف دارد و اکسترمم ندارد

۱ـ (۳) چون $x=\circ$ و $x=-۱$ ریشه‌های ساده و از مرتبه‌ی فرد مشتق هستند، لذا مشتق در این نقاط تغییر علامت داده و بنابراین f، دارای ۲ اکسترمم است.

۲ـ (۳) $y=Lnx \Rightarrow D_f=(\circ,+\infty)$

تابع $y=Lnx$ در دامنه‌اش، همه جا مشتق‌پذیر است $y'=\frac{۱}{x} \Rightarrow D_{f'}=(\circ,+\infty) \quad , y'\neq\circ$

و ضمناً مشتقش در این نقاط مخالف صفر است، پس نقطه‌ی بحرانی ندارد.

۳ـ (۴) تابع وقتی سه نقطه‌ی بحرانی دارد که دلتای عبارت داخل قدر مطلق، مثبت باشد.

$\Delta=۱-۴a>\circ \Rightarrow a<\frac{۱}{۴} \Rightarrow a=\frac{۱}{۸}$

۴ـ (۲) چون $x^۳-۳x+۲=(x-۱)^۲(x+۲)$، لذا $y=(x-۱)^۴(x+۲)(x+۱)^۲$، حال چون $x=۱$ ریشه‌ی مکرر زوج از مرتبه‌ی ۴ معادله‌ی $y=\circ$ است، لذا y در $x=۱$، اکسترمم دارد و چون $(۱+۱)(۲+۱)^۲>\circ$، پس در $x=۱$، Min نسبی دارد.

۵ـ (۴) $y=((x-\sqrt{۲})^۲)^۴=(x-\sqrt{۲})^۸\geq\circ \quad \Rightarrow x=\sqrt{۲}$

Min مطلق تابع برابر صفر است که به ازاء $x=\sqrt{۲}$ به دست می‌آید.

۶ـ (۳) $y=۲\sin x+۱-۲\sin^۲x=-۲(\sin^۲x-\sin x)+۱=\underbrace{-۲(\sin x-\frac{۱}{۲})^۲}_{\text{همواره نامنفی}}+\frac{۳}{۲} \Rightarrow Max(y)=\frac{۳}{۲}$

توجه داشته باشید که به ازاء $x=\frac{\pi}{۶}$ متعلق به بازه‌ی داده شده، پرانتز صفر می‌شود.

۷ـ (۳) چون $f'(a)=\circ$ و $f''(a)<\circ$ است، لذا طبق آزمون مشتق دوم، f در a، Max نسبی داشته و چون $f(a)=\circ$ است، لذا نقطه‌ی $(a,\circ)$، نقطه‌ی Max نسبی f روی محور طولهاست.

۸ـ (۴) $\begin{cases}a>\circ\\ y_{Min}=-\frac{\Delta}{۴a}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}m-۱>\circ \quad \Rightarrow m>۱\\ -۲=\frac{-۱}{۴(m-۱)} \quad \Rightarrow m=\frac{۹}{۸}\end{cases}$

۹ـ (۲) اعداد $\frac{۱}{۲}$ و ۲، ریشه‌های ساده‌ی عبارت زیر رادیکال هستند.

$x'x''=\frac{c}{a} \Rightarrow ۱=\frac{b}{۲} \Rightarrow b=۲$

$x'+x''=\frac{-b}{a} \Rightarrow \frac{۵}{۲}=\frac{-a}{۲} \Rightarrow a=-۵$

۱۰ـ (۳) $y'=\frac{-۲x}{۳\sqrt[۳]{(۲-x^۲)^۲}}=\circ \quad \Rightarrow x=\circ$ ریشه‌ی ساده‌ی مشتق ⇐ طول اکسترمم

$y=\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}-x)(\sqrt{۲}+x)} \quad \Rightarrow \pm\sqrt{۲}$ ریشه‌های ساده‌ی زیر رادیکال با فرجه‌ی فرد ⇐ طول عطف

تست ۱۲:

۱ـ می‌نیمم مطلق تابع $y = ۲\cos^۲x - \sin ۲x$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $-\sqrt{۲}$ ۳) $-\sqrt{۲}+۱$ ۴) $-\sqrt{۲}-۱$

۲ـ کوتاهترین فاصله‌ی مبدأ مختصات از منحنی $y = ۱ - x^۲$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

۳ـ هرگاه $xy + yz + zx = ۴۸$ باشد، بیشترین مقدار عبارت $A = xyz$ کدام است؟

۱) ۴۸ ۲) ۸ ۳) ۱۲۸ ۴) ۶۴

۴ـ Min عبارت $A=\frac{x^۳+۹}{x\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۵ـ کمترین فاصله‌ی مبدأ مختصات از نقطه‌ی $A \left| \begin{matrix} m \\ m-۱ \end{matrix} \right.$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۶ـ کوتاهترین فاصله‌ی منحنی $y = x^۲$ از خط $y = ۲x - ۲$ برابر است با:

۱) $\sqrt{۵}$ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

۷ـ ماکزیمم عبارت $y=\frac{x^۴}{(x^۴+۴)^۲}$، کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) $\frac{۱}{۱۶}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۹}{۱۶}$

۸ـ ماکزیمم عبارت $y=\frac{x^۲}{x^۴+۲x^۲+۱}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۹ـ قطر مستطیلی که اضلاع آن متغیرند، ۲۰ سانتی متر است، ماکزیمم مساحت این مستطیل برابر است با:

۱) ۸۰۰ ۲) ۴۰۰ ۳) ۲۰۰ ۴) ۱۰۰

۱۰ـ هرگاه x زاویه‌ای حاده باشد، ماکزیمم $y = \sin^۲x\cos^۳x$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}\sqrt[۳]{\frac{۹}{۲۵}}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$ ۳) $\frac{۱۰۸}{۱۶۹}\sqrt{۳}$ ۴) $\frac{۶}{۲۵}\sqrt{\frac{۳}{۵}}$

۱ـ (۳) $y = ۱ + \cos ۲x - \sin ۲x \quad \Rightarrow Min(y) = -\sqrt{a^۲ + b^۲} + c = -\sqrt{۲} + ۱$

۲ـ (۳) فرض می‌کنیم نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right.$ واقع بر منحنی، از مبدأ کمترین فاصله را دارا باشد، $y = ۱ - x^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱ - y$

$Z = OA = \sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{۱ - y + y^۲} \quad \Rightarrow Z'_y = \frac{۲y - ۱}{۲\sqrt{y^۲ - y + ۱}} = ۰ \quad \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}$

$Min(z) = \sqrt{\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۲} + ۱} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳ـ (۴) $A^۲ = x^۲y^۲z^۲ = (xy)(yz)(zx)$

$xy + yz + zx = ۴۸ \Rightarrow xy = yz = zx = ۱۶$

چون مجموع ثابت است، لذا حاصلضرب زمانی Max می‌شود که سه کمیت مساوی باشند.

$xy = yz = zx \Rightarrow x = y = z \Rightarrow x^۲ + x^۲ + x^۲ = ۴۸ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow Max(A) = ۶۴$

۴ـ (۲) $A = \sqrt{x^۳} + \frac{۹}{\sqrt{x^۳}}$ $\qquad \sqrt{x^۳} \times \frac{۹}{\sqrt{x^۳}} = ۹$ ثابت

$\sqrt{x^۳} = \frac{۹}{\sqrt{x^۳}} \quad \Rightarrow x^۳ = ۹$ ثابت $\Rightarrow x = \sqrt[۳]{۹} \quad \Rightarrow Min(A) = \frac{۹ + ۹}{\sqrt{۹}} = ۶$

۵ـ (۱) $d = OA = \sqrt{m^۲ + (m - ۱)^۲} \quad \Rightarrow d' = \frac{m + m - ۱}{\sqrt{m^۲ + (m - ۱)^۲}} = ۰ \quad \Rightarrow m = \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow$

$Min(d) = \sqrt{\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۶ـ (۳) فرض می‌کنیم نقطه‌ی به طول α روی منحنی $y = x^۲$، نزدیکترین نقطه به خط $y = ۲x - ۲$ باشد، داریم:

$M\left|\begin{matrix} \alpha \\ a^۲ \end{matrix}\right. \quad \Rightarrow d = \frac{|\alpha^۲ - ۲\alpha + ۲|}{\sqrt{۵}}$

لذا باید Min عبارت $A(\alpha) = \alpha^۲ - ۲\alpha + ۲$ را حساب کنیم.

$A'(\alpha) = ۲\alpha - ۲ = ۰ \Rightarrow \alpha = ۱ \quad \Rightarrow Min(A) = ۱^۲ - ۲(۱) + ۲ = ۱ \quad \Rightarrow Min(d) = \frac{۱}{\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۵}}{۵}$

۷ـ (۲) y هنگامی Max است که $\frac{۱}{y}$, Min باشد. $\quad \frac{۱}{y} = (\frac{x^۴ + ۴}{x^۲})^۲ = (x^۲ + \frac{۴}{x^۲})^۲$

$x^۲ \cdot \frac{۴}{x^۲} = ۴$ ثابت $\Rightarrow x^۴ = ۴ \Rightarrow Max(y) = \frac{۴}{(۴ + ۴)^۲} = \frac{۱}{۱۶}$

۸ـ (۲) $y = \frac{x^۲}{(x^۲ + ۱)^۲} = (\frac{x^۲}{x^۲ + ۱})(\frac{۱}{x^۲ + ۱}) \quad \Rightarrow \frac{x^۲}{x^۲ + ۱} + \frac{۱}{x^۲ + ۱} = ۱$ ثابت

$\frac{x^۲}{x^۲ + ۱} = \frac{۱}{x^۲ + ۱} \quad \Rightarrow x^۲ = ۱ \quad \Rightarrow Max(y) = \frac{۱}{۴}$

۹ـ (۳) قطر $d = \sqrt{x^۲ + y^۲} \quad \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۴۰۰$ ثابت $\Rightarrow x^۲ = y^۲ \quad \Rightarrow ۲x^۲ = ۴۰۰$

$x^۲ = ۲۰۰ \quad \Rightarrow x = y = ۱۰\sqrt{۲} \quad \Rightarrow s = xy = x^۲ = (۱۰\sqrt{۲})^۲ = ۲۰۰$

۱۰ـ (۴) $y = (\sin^۲ x)^۱ (\cos^۲ x)^{\frac{۳}{۲}} \quad \Rightarrow \sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$ ثابت $\Rightarrow \frac{\sin^۲ x}{۱} = \frac{\cos^۲ x}{\frac{۳}{۲}}$

$۳\sin^۲ x = ۲ - ۲\sin^۲ x \quad \Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۲}{۵} \quad \Rightarrow \cos^۲ x = \frac{۳}{۵} \quad \Rightarrow Max(y) = (\frac{۲}{۵})(\frac{۳}{۵}\sqrt{\frac{۳}{۵}}) = \frac{۶}{۲۵}\sqrt{\frac{۳}{۵}}$

تست ۱۳:

۱ـ هرگاه a و x زوایای حاده باشند، در تابع $y = \tan x \tan a + \cot x \cot a$، داریم:

۱) $Min(y) = ۲$ ۲) $Max(y) = ۳$ ۳) $Max(y) = ۲$ ۴) $Min(y) = ۳$

۲ـ هرگاه $x + y = ۱۱$ باشد، $(y \geq ۰, x \geq ۰)$، Max عبارت $A = x^۲\sqrt[۵]{y}$ کدام است؟

۱) ۱۰۰ ۲) $۲۵\sqrt[۵]{۶}$ ۳) $۳۶\sqrt[۵]{۵}$ ۴) ۱۲۱

۳ـ هرگاه در تابع $y = f(x)$، داشته باشیم $f(۴) = -۳$ و $f'(۴) = ۱۲$، آنگاه مقدار $f(\frac{۱۳}{۳})$ تقریباً چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) $\frac{۳}{۴}$

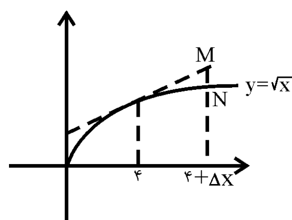
۴ـ برای محاسبه‌ی وارون عدد a با روش نیوتن، کدامیک از دنباله‌های زیر، مناسب است؟

۱) $x_{n+۱} = x_n(۲ - ax_n)$ ۲) $x_{n+۱} = x_n(۲ + ax_n)$ ۳) $x_{n+۱} = x_n(a - x_n)$ ۴) $x_{n+۱} = x_n(a + x_n)$

۵ـ هرگاه Δy نمو و dy دیفرانسیل تابع $y = x^۴ + ۳x^۲$ باشند، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\Delta y > dy$ ۲) $\Delta y < dy$ ۳) $\Delta y = dy$ ۴) $\begin{cases}\Delta y > dy, x > ۰\\ \Delta y < dy, x < ۰\end{cases}$

۶ـ در شکل مقابل $\Delta x = dx = ۰/۴۱$، فاصله‌ی MN کدام است؟



۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۰۰۲۵ ۳) ۰/۰۱۲۵ ۴) ۰/۰۶۲۵

۷ـ در تابع $y = \sqrt{\sin x}$، در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{۶}$، هرگاه متغیر به اندازه‌ی ۱° نمو کند، مقدار نمو تابع به کمک دیفرانسیل چقدر است؟

۱) $\frac{\pi\sqrt{۶}}{۱۸۰}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{۶}}{۷۲۰}$ ۳) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۱۸۰}$ ۴) $\frac{\pi\sqrt{۳}}{۲۰}$

۸ـ آهنگ تغییر حجم کره‌ای به شعاع R، نسبت به تغییر سطح آن چقدر است؟

۱) $۴\pi R^۲$ ۲) R ۳) ۲R ۴) $\frac{R}{۲}$

۹ـ ذره‌ای برروی مسیر $y = ۲\cos^۲ x - ۱$ حرکت می‌کند، در نقطه‌ای باکدام طول، سرعت مؤلفه‌ی x ذره با سرعت مؤلفه‌ی y آن، برابر است؟

۱) $\frac{۵\pi}{۶}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۱۲}$ ۳) $\frac{۷\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{۷\pi}{۶}$

۱۰ـ هرگاه با آهنگ ۱۰ متر مکعب در دقیقه، روی توده‌ی مخروطی شکلی، شن ریخته شود، به طوری که ارتفاع توده‌ی شن، همواره ۲ برابر شعاع قاعده‌ی آن باشد، وقتی ارتفاع توده‌ی شن به ۸ متر می‌رسد، ارتفاع با چه آهنگی در حال افزایش است؟

۱) $\frac{۵}{۸\pi}$ متر در دقیقه ۲) $\frac{۵}{۱۶\pi}$ متر در دقیقه

۳) $\frac{۵}{۴\pi}$ متر در دقیقه ۴) $\frac{۵}{۲\pi}$ متر در دقیقه

۱ـ (۱) $(\tan a \tan x)(\cot a \cot x) = ۱$ ثابت $\Rightarrow \tan a \tan x = \cot a \cot x$

$\Rightarrow \tan^2 a \tan^2 x = ۱ \Rightarrow \tan a \tan x = ۱ \Rightarrow \cot a \cot x = ۱ \Rightarrow Min(y) = ۱ + ۱ = ۲$

۲ـ (۱) $A = x^2 y^{\frac{1}{5}} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{\frac{1}{5}} = \frac{x+y}{\frac{11}{5}} = \frac{11}{\frac{11}{5}} = 5 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \times 5 = 10 \\ y = \frac{1}{5} \times 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow Max(x^2 \sqrt[5]{y}) = 10^2 \sqrt[5]{1} = 100$

۳ـ (۳) $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x \Rightarrow f(\frac{13}{3}) = f(4 + \frac{1}{3}) \approx f(4) + f'(4)\frac{1}{3} = (-3) + 12(\frac{1}{3}) = 1$

۴ـ (۱) $f(x) = \frac{1}{x} - a = 0 \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\frac{1}{x_n} - a}{-\frac{1}{x_n^2}} = x_n(2 - ax_n)$

۵ـ (۱) $y' = 4x^3 + 6x \Rightarrow y'' = 12x^2 + 6 > 0 \Rightarrow$ تقعر منحنی به طرف بالاست.

پس مماس زیر منحنی است و بنابراین $dy < \Delta y$

۶ـ (۲) MN همان اختلاف $(dy - \Delta y)$ است.

$dy = f'(x)\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x}} . \Delta x = \frac{1}{4} \times 0/41 = 0/1025$

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(4/41) - f(4) = 2/1 - 2 = 0/1$

$dy - \Delta y = 0/1025 - 0/1000 = 0/0025$

۷ـ (۲) $dy = f'(x)\Delta x = \frac{\cos 30^\circ}{2\sqrt{\sin 30^\circ}} \times \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{6}}{4} \times \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{6}\pi}{720}$

۸ـ (۴) $\begin{cases} V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3 \\ S(R) = 4\pi R^2 \end{cases} \Rightarrow V'(S) = \frac{V'(t)}{S'(t)} = \frac{4\pi R^2}{8\pi R} = \frac{R}{2}$

۹ـ (۴) $y'_t = -2\sin x \cos x \times x'_t \Rightarrow x'_t = -2\sin x \times x'_t \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$

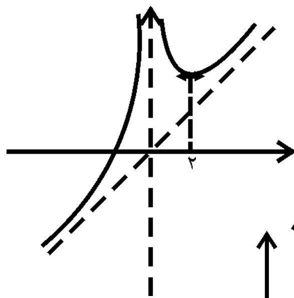
۱۰ـ (۱) $h = 2R$ $\quad V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Rightarrow V'(t) = \frac{1}{3}\pi(2RR'(t)h + R^2 h'(t))$

$h'(t) = 2R'(t)$ $\quad V'(t) = \frac{1}{3}\pi(2RR'(t) . 2R + R^2 . 2R'(t))$

$V'(t) = \frac{1}{3}\pi(6R^2 R'(t)) \Rightarrow 10 = 2\pi(16 \times R'(t))$

$\Rightarrow R'(t) = \frac{5}{16\pi} \Rightarrow h'(t) = 2R'(t) = \frac{5}{8\pi}$ متر در دقیقه

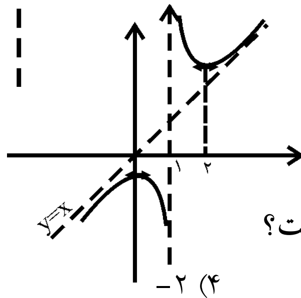
تست ۱۴:



۱ـ هرگاه نمودار تابع $y=\frac{x^۳+a}{x^۲+bx+c}$ به صورت مقابل باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴



۲ـ هرگاه نمودار تابع $y=\frac{x^۲+ax+b}{x+c}$ به صورت مقابل باشد، b چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲

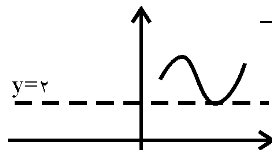
۳) ۱- ۴) ۲-

۳ـ هرگاه عرض نقطه‌ی ماکزیمم تابع $y=\frac{x^۲+a}{x^۲+x+۱}$ برابر ۲ باشد، a چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

۴ـ به ازاء چه مقدار m، طول نقطه‌ی Max یا Min تابع $y=\frac{۲x^۲+m-۱}{۲x-۱}$ برابر ۱ می‌باشد؟

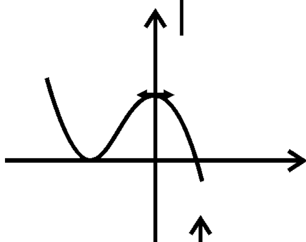
۱) ۲ ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) ۲-



۵ـ قسمتی از نمودار تابع $y=\sin x+\cos x+c$، شکل مقابل است، k کدام است؟

۱) $۲-\sqrt{۲}$ ۲) $۲+\sqrt{۲}$

۳) ۲ ۴) ۳

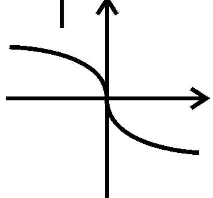


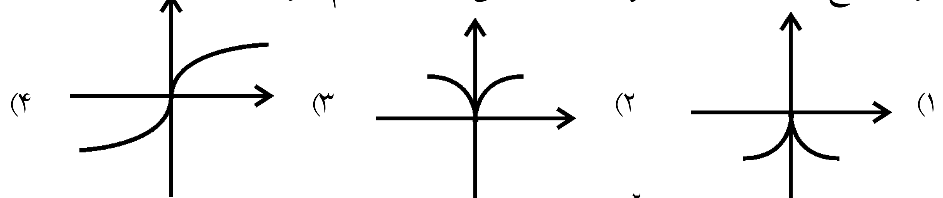
۶ـ شکل مقابل نمودار تابع $y=-x^۳+ax^۲+bx+۴$ است، زوج مرتب (a,b)، کدام است؟

۱) (۱ و ۳) ۲) (۰ و ۳)

۳) (۱ و ۳-) ۴) (۰ و ۳-)

۷ـ نمودار تابع $y=\sqrt[۳]{x^۳-۳x^۲}$، در همسایگی مبدأ به کدام صورت است؟



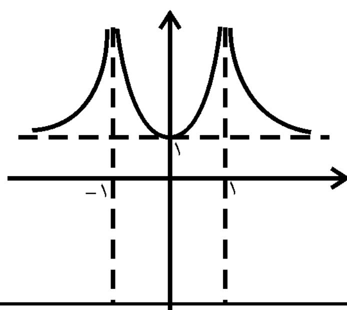


۸ـ هرگاه نمودار تابع $y=\frac{x^۲+mx+n}{x^۲+x+۱}$ به صورت (شکل) باشد، کدام گزینه‌ی زیر، الزاماً درست است؟

۱) $m=۱>n$ ۲) $m=۱<n$ ۳) $n=۱>m$ ۴) $n=۱<m$

۹ـ خط واصل بین نقاط Max و Min تابع $y=\frac{x^۲-\sqrt{۳}x+۳}{۲x-۱}$ با جهت مثبت محور xها، چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۱) $\frac{\pi}{۱۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۳}$



۱۰ـ قانون نمودار تابع مقابل، کدام است؟

۱) $y=\frac{x^۲+۱}{(x^۲-۱)^۲}$ ۲) $y=\frac{(x^۲+۱)^۲}{(x^۲-۱)^۲}$

۳) $y=\frac{(x^۲-۱)^۲}{x^۲+۱}$ ۴) $y=\frac{(x^۲-۱)^۲}{(x^۲+۱)^۲}$

۱ـ (۴) چون $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ لذا f در ۰ انفصال مضاعف دارد بنابراین مخرج بایستی ریشه‌ی مضاعف $x = 0$ داشته باشد یعنی $b = c = 0$ و $f(x) = \frac{x^3 + a}{x^2}$، از طرفی $f'(2) = 0$ است. بنابراین:

$$f'(x) = \frac{3x^4 - 2x(x^3 + a)}{x^4} = \frac{x^3 - 2a}{x^3} \Rightarrow f'(2) = 0 \quad \Rightarrow 8 - 2a = 0 \quad \Rightarrow a = 4$$

۲ـ (۱) خط $x = 1$ مجانب قائم تابع است بنابراین: $c = -1$ لذا:

$$y = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = x + a + 1 \ \text{مجانب مایل} \end{cases} \Rightarrow a + 1 = 0 \quad \Rightarrow a = -1 \quad \Rightarrow y = \frac{x^2 - x + b}{x - 1} \quad \Rightarrow y' = \frac{(2x - 1)(x - 1) - (x^2 - x + b)}{(x - 1)^2} \Rightarrow$$

$$f'(2) = 0 \quad \Rightarrow 3 - (2 + b) = 0 \quad \Rightarrow b = 1$$

۳ـ (۱)

$$x^2 y + xy + y = x^2 + a \quad \Rightarrow (1 - y)x^2 - yx + a - y = 0$$

$$\Delta = 0 \quad \Rightarrow y^2 - 4(1 - y)(a - y) = 0 \quad \overset{y = 2}{\Rightarrow} \quad 4 - 4(1 - 2)(a - 2) = 0 \quad \Rightarrow a = 1$$

۴ـ (۳) نقطه‌ی $\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix}$ Max یا Min $\Rightarrow y = 2 \overset{x = 1}{\Leftarrow} y = \frac{4x}{2} = 2x \Leftarrow$ HOP تابع

$$\overset{\text{در خود تابع}}{\Rightarrow} \quad 2 = \frac{2 + m - 1}{1} \quad \Rightarrow m = 1$$

۵ـ (۲) می‌دانیم:

$$c - \sqrt{2} \le \sin x + \cos x + c \le c + \sqrt{2}$$

چون نمودار تابع بالای خط $y = 2$ و بر آن مماس است، لذا کمترین مقدار تابع برابر ۲ است، پس $k - \sqrt{2} = 2$ در نتیجه $k = 2 + \sqrt{2}$

۶ـ (۴) چون طول Max صفر است لذا:

$$y' = -3x^2 + 2ax + b = 0 \quad \overset{x = 0}{\Rightarrow} \quad b = 0$$

از طرفی طول نقطه‌ی عطف $x = \frac{a}{3} < 0$ است، پس $a < 0$ و در نتیجه زوج مرتب (۰ و ۳−) قابل قبول است.

۷ـ (۱)

$$y = \sqrt[3]{x^2(x - 3)} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{طول بازگشت} \\ x = 3 & \text{طول عطف} \end{cases} \quad \Rightarrow g(x) = x - 3 \quad \Rightarrow g(0) = -3 < 0 \quad \Rightarrow Max$$

۸ـ (۱)

$$\text{مخرج}\ \Delta < 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{m}{1} \quad \Rightarrow m = 1 \\ ac' - ca' > 0 \quad \Rightarrow 1 - n > 0 \quad \Rightarrow n < 1 \end{cases} \quad \Rightarrow n < 1 = m$$

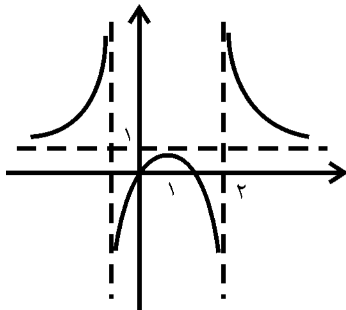
۹ـ (۳)

$$HOP \quad \Rightarrow y = \frac{2x - \sqrt{3}}{2} = x - \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow m = 1 = \tan\alpha \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

۱۰ـ (۲) خطوط $x = \pm 1$ مجانبهای قائم تابع‌اند لذا گزینه‌ی صحیح یکی از دو گزینه‌ی (۱) یا (۲) است، اما چون خط $y = 1$ مجانب افقی تابع است لذا پاسخ صحیح گزینه‌ی (۲) می‌باشد.

تست ۱۵:

۱ـ قانون نمودار تابع مقابل، کدام است؟



۱) $y=\dfrac{2x-x^2}{x^2-2x-3}$ ۲) $y=\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x-3}$

۳) $y=\dfrac{x^2+2x}{x^2-2x-3}$ ۴) $y=\dfrac{2x+x^2}{3-2x-x^2}$

۲ـ جدول علامت مشتق تابع $y=x+\sqrt{2-x^2}$ کدام است؟

۱)

x	$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$
y'	∞	$-$	0	$+$	∞

۲)

x	$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$
y'	∞	$+$	0	$-$	∞

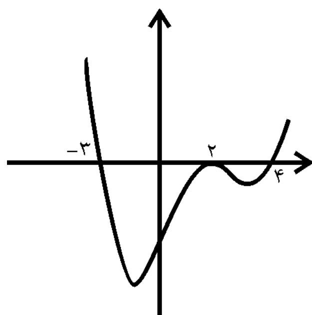
۳)

x	$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$
y'	∞	$+$	0	$-$	∞

۴)

x	$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$
y'	∞	$-$	0	$+$	∞

۳ـ قانون نمودار تابع مقابل، کدام است؟



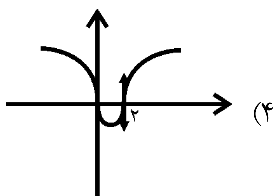
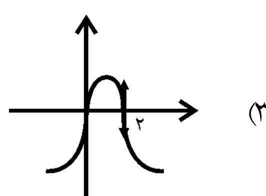
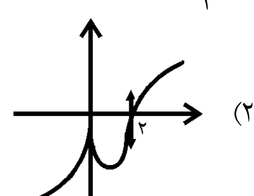
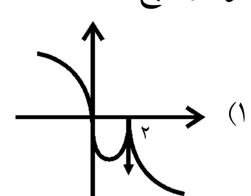
۱) $y=(x+2)^2(x+3)(x-4)$

۲) $y=(x-2)^2(x+3)(x-4)$

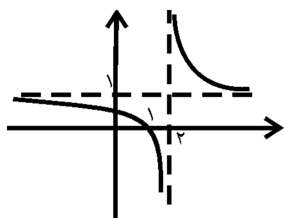
۳) $y=(x+2)^2(x+3)(4-x)$

۴) $y=(x-2)^2(x+3)(4-x)$

۴ـ نمودار تابع $y=\sqrt[3]{x^2-2x}$ کدام است؟

۴)  ۳)  ۲)  ۱) 

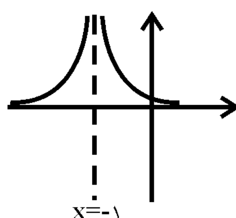
۵ـ هرگاه نمودار مقابل، مربوط به تابع $xy+ay+bx+c=0$ باشد، c کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۱− ۴) ۲−

۶ـ نمودار مقابل، مربوطه به کدام تابع زیر است؟



۱) $y=\dfrac{x}{(x+1)^2}$ ۲) $y=\dfrac{1}{x+1}$

۳) $y=\dfrac{1}{|x+1|}$ ۴) $y=\dfrac{1}{|x-1|}$

۷ـ مشتق تابع $y = f(x)$ **به صورت** $y' = \frac{x^{2}(x-3)}{(x-1)^{3}}$ **می‌باشد، کدام گزینه‌ی زیر، در مورد این تابع درست می‌باشد؟**

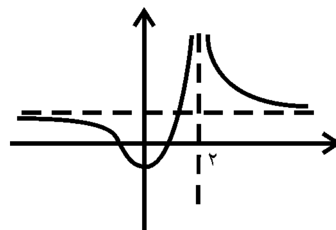
۱) نقطه‌ای به طول ۳، نقطه‌ی Min تابع است. ۲) نقطه‌ای به طول ۳، نقطه‌ی Max تابع است.

۳) نقطه‌ای به طول صفر، نقطه‌ی Min تابع است. ۴) نقطه‌ای به طول صفر، نقطه‌ی Max تابع است.

۸ـ نمودار تابع $y = \frac{x^{2} - x}{x^{2} - x + 1}$ **چند نقطه‌ی عطف دارد؟**

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹ـ قانون نمودار تابع مقابل کدام است؟



۱) $y = \frac{x^{2}-1}{(x-2)^{2}}$

۲) $y = \frac{x^{2}+1}{(x-2)^{2}}$

۳) $y = \frac{x^{2}-1}{(x+2)^{2}}$

۴) $y = \frac{x^{2}+1}{(x+2)^{2}}$

۱۰ـ هرگاه منحنی $y = x^{2}$ **از نقاط اکسترمم تابع** $y = \frac{x^{2}+3x+a}{x+b}$ **بگذرد،** $a - b$ **کدام است؟**

۱) ۰ ۲) -1 ۳) ۱ ۴) ۲

من ریاضیات را دوست دارم، نه تنها به این خاطر که پایه‌ی صنعت ما بر آن گذاشته شده است، بلکه ضمناً به این خاطر که بسیار زیباست و همیشه و همه جا بلندگوی این شعار است که فعالیت و استعداد آدمی پایان‌ناپذیر است.

«رزاپتر»

۱ـ (۲) خط $y = 1$ مجانب افقی تابع است لذا پاسخ صحیح یکی از دو گزینه‌ی (۲) یا (۳) است و چون $y = 0$ دارای دو ریشه‌ی $x = 0$ و $x = 2$ است لذا گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۲ـ (۳) علامت مشتق بستگی به علامت صورتش دارد. $D_f = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$$y' = 1 + \frac{-x}{\sqrt{2 - x^2}} = \frac{\sqrt{2 - x^2} - x}{\sqrt{2 - x^2}} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \sqrt{2 - x^2} = x \Rightarrow 2 - x^2 = x^2$$

$\Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x = 1$ قابل قبول $f'(0) = 1 > 0$ پس گزینه‌ی صحیح گزینه‌ی (۳) می‌باشد. $(1 > 0 > -\sqrt{2})$

۳ـ (۲) ریشه‌های تابع با توجه به شکل عبارتند از $x = 4$ و $x = -3$ که ریشه‌های ساده می‌باشند و $x = 2$ که ریشه‌ی مضاعف می‌باشد پس گزینه‌ی صحیح، گزینه‌ی (۲) یا (۴) است اما $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ بنابراین گزینه‌ی (۲) صحیح است.

۴ـ (۴) $x = 0$ و $x = 2$ ریشه‌های ساده‌ی زیر رادیکال و لذا طول نقطه‌ی عطف‌اند بنابراین گزینه‌ی صحیح یکی از دو گزینه‌ی (۲) یا (۴) است اما چون $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ لذا گزینه‌ی (۴) صحیح می‌باشد.

۵ـ (۳) $(x + a)y = -bx + c \Rightarrow y = \dfrac{-bx + c}{x + a}$

خطوط $x = 2$ و $y = 1$ به ترتیب مجانبهای قائم و افقی تابع‌اند و بنابراین $a = -2$ و $b = -1$ لذا:

$$y = \frac{x + c}{x - 2} \overset{(1,0)\in f}{\Rightarrow} 0 = \frac{1 + c}{0 - 2} \Rightarrow c = -1$$

۶ـ (۳) چون خط $x = -1$ مجانب قائم تابع است و تابع در $x = 1$ انفصال مضاعف دارد لذا، یکی از دو گزینه‌ی (۱) یا (۳) صحیح می‌باشد اما چون $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$ لذا گزینه‌ی (۳) صحیح است. البته می‌توان گفت که چون گزینه‌ی (۱) از مبدأ می گذرد لذا این گزینه نادرست است.

۷ـ (۱) چون $x = 3$ ریشه‌ی ساده‌ی مشتق است پس $x = 3$ طول نقطه‌ی اکسترمم تابع است و چون علامت مشتق در $x = 3$ از منفی به مثبت تغییر می‌کند $(f(2) < 0\ ,\ f(4) > 0)$ لذا $x = 3$ طول Min تابع است.

۸ـ (۲) $\Delta < 0$ مخرج

$\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'} \Rightarrow$ تابع یک اکسترمم و دو عطف دارد.

۹ـ (۱) چون $x = 2$ مجانب قائم تابع بوده و تابع در این نقطه انفصال مضاعف دارد لذا یکی از دو گزینه‌ی (۱) یا (۲) صحیح است، اما چون تابع دوبار محور xها را قطع کرده است (یعنی $y = 0$ دو ریشه دارد) بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است.

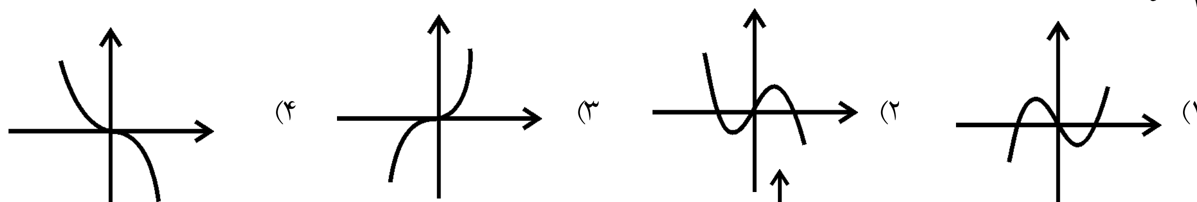
۱۰ـ (۳) چون هوپیتال تابع از نقاط اکسترمم تابع می‌گذرد و خط $y = x^2$ نیز چنین است، لذا نقاط اکسترمم تابع، نقاط تلاقی این دو معادله است.

$$HOP \Rightarrow y = \frac{2x + 3}{1} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

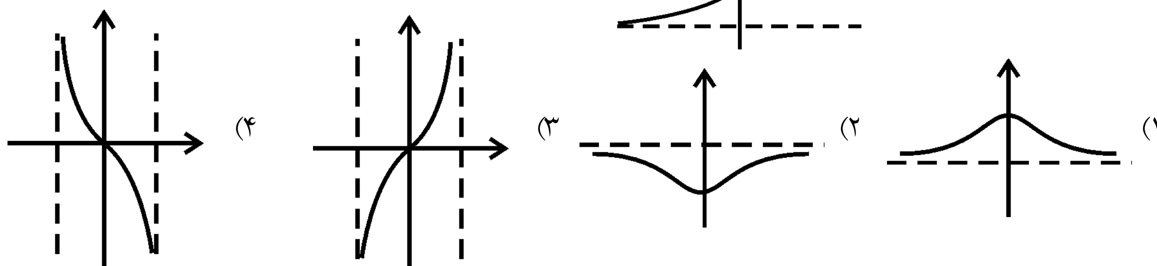
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow A \left| \begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \right. \quad B \left| \begin{matrix} 3 \\ 9 \end{matrix} \right. \overset{\text{در خود تابع}}{\Rightarrow} \begin{cases} 1 = \dfrac{1 - 3 + a}{-1 + b} \Rightarrow \\ 9 = \dfrac{9 + 9 + a}{3 + b} \Rightarrow \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a - 9b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow a - b = 1$$

تست ۱۶:

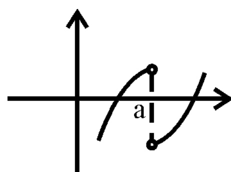
۱ـ نمودار مشتق یک تابع درجه‌ی سوم به صورت (نمودار) **می‌باشد، اگر این تابع از مبدأ بگذرد، نمودار آن به کدام صورت است؟**



۲ـ نمودار یک تابع به صورت (نمودار) **می‌باشد، نمودار مشتق آن کدام است؟**



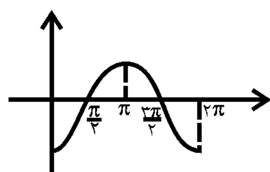
۳ـ هرگاه نمودار مقابل، نمودار مشتق تابع f باشد، نقطه‌ی به طول a، برای تابع f، کدام عنوان را دارد؟



۱) بازگشت و Max ۲) بازگشت و Min

۳) زاویه‌دار و Max ۴) زاویه‌دار و Min

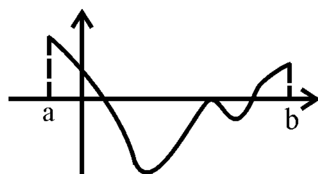
۴ـ هرگاه نمودار مشتق تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل باشد، تقعر تابع $y = f(x)$ در کدام فاصله‌ی زیر رو به پائین است؟



۱) $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ ۲) $(۰,\frac{\pi}{۲}) \cup (\frac{۳\pi}{۲},۲\pi)$

۳) $(\pi,۲\pi)$ ۴) $(۰,\pi)$

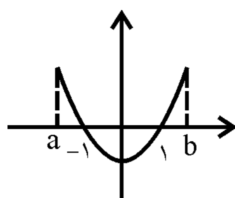
۵ـ هرگاه نمودار مشتق تابعی در فاصله‌ی [a,b] به صورت مقابل باشد، تابع در آن فاصله، چند نقطه‌ی عطف دارد؟



۱) ۳ ۲) ۴

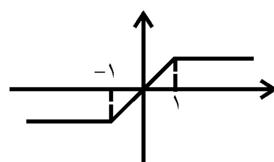
۳) ۵ ۴) ۶

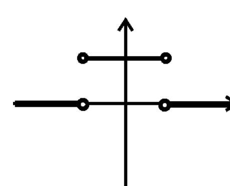
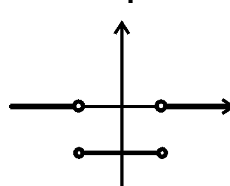
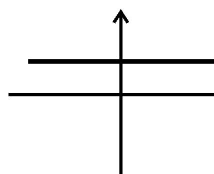
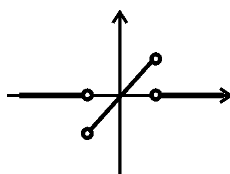
۶ـ هرگاه نمودار مشتق تابع $y = f(x)$ در فاصله‌ی (a,b) به صورت مقابل باشد، نقاط به طولهای ۱- و ۱ در تابع $y = f(x)$، به ترتیب طول چه نقاطی هستند؟

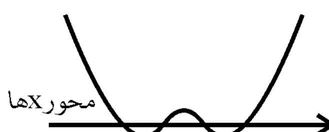


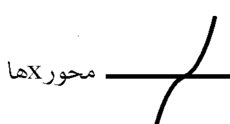
۱) Max و Min ۲) Min و Max

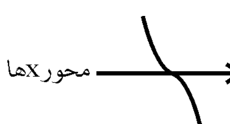
۳) عطف و Max ۴) عطف و Min

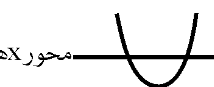
۷ـ هرگاه نمودار تابع f به صورت  باشد، نمودار f' کدام است؟

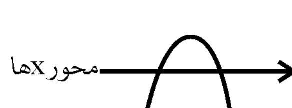
۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۸ـ هرگاه نمودار f به صورت  باشد، نمودار f'' به کدام صورت است؟

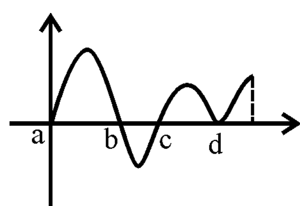
۱) 

۲) 

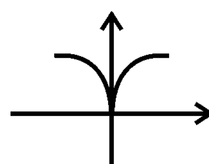
۳) 

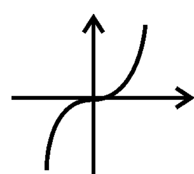
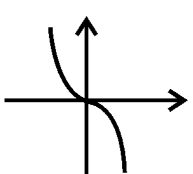
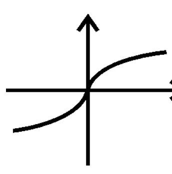
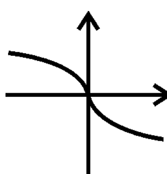
۴) 

۹ـ شکل مقابل منحنی مشتق تابع پیوسته‌ی f می‌باشد، تابع f چند اکسترمم دارد؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۰ـ اگر منحنی f' به صورت  باشد، نمودار تابع f در نزدیکی مبدأ چگونه است؟

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

با دیگران همان طور رفتار کنید که می‌خواهید آنها با شما رفتار کنند، این است خلاصه‌ی تورات و نوشته‌های انبیاء.
«انجیل متی باب ۷ آیه‌ی ۱۲»

۱ـ (۱) چون y' ابتدا مثبت (بالای محور xها)، سپس منفی (پائین محور xها) و مجدداً مثبت است لذا تابع ابتدا صعودی، سپس نزولی و بالاخره مجدداً صعودی است، لذا گزینه‌ی (۱) صحیح است.

۲ـ (۱) چون تابع همواره صعودی است، لذا $y' > 0$ بوده و بنابراین نمودار y' بالای محور xها قرار دارد، بنابراین گزینه‌ی (۱) صحیح است. البته دقت داشته باشید که مجانبهای افقی تابع اصلی تبدیل به مجانبهای افقی به صورت $y = 0$ برای تابع مشتق می‌شوند.

۳ـ (۳) چون مشتقات چپ و راست تابع f در نقطه‌ی a متناهی و نابرابر است، نقطه‌ی a در تابع f نقطه‌ی زاویه‌دار بوده و چون قبل از a، مشتق تابع، مثبت و بعد از a، مشتق تابع، منفی است، پس نقطه‌ی a، نقطه‌ی Max نسبی است.

۴ـ (۳) هر کجا که f' نزولی باشد، $f'' < 0$ بوده و لذا تقعر تابع رو به پائین است، با توجه به شکل f' در فاصله‌ی $(\pi, 2\pi)$ نزولی است (یعنی مشتقش منفی است، $f'' < 0$) بنابراین گزینهٔ (۳) صحیح است.

۵ـ (۱) چون نمودار مشتق در فاصله‌ی $[a,b]$، سه بار تغییر جهت داده است (از نزولی به صعودی، از صعودی به نزولی، از نزولی به صعودی) لذا f'' در فاصله‌ی مزبور سه بار تغییر علامت داده است، بنابراین تابع f در فاصله‌ی $[a,b]$، سه نقطه‌ی عطف دارد.

۶ـ (۱) در نقاط (۱-) و (۱)، مشتق صفر است، چون در نقطه‌ی به طول (۱-)، f' ابتدا مثبت و سپس منفی شده است لذا نقطه‌ی به طول (۱-) طول نقطه‌ی Max است، به همین ترتیب چون در نقطه‌ی به طول (۱)، f' ابتدا منفی و سپس مثبت شده است، لذا نقطه‌ی به طول (۱)، طول نقطه‌ی Min تابع است.

۷ـ (۱) تابع در نقاط به طولهای (۱) و (۱-) مشتق‌پذیر نبوده، لذا نمودار مشتق در این نقاط ناپیوسته است، به ازاء $x > 1$ یا $x < -1$، تابع ثابت بوده، لذا y'، صفر است، در فاصله‌ی $-1 < x < 1$ تابع صعودی بوده، لذا $y' > 0$ است یعنی نمودار y' در این فاصله بالای محور xها قرار دارد بنابراین گزینه‌ی (۱) پاسخ صحیح است.

۸ـ (۳) چون تقعر منحنی ابتدا به سمت بالا، سپس به سمت پائین و مجدداً به سمت بالاست لذا f'' ابتدا مثبت (نمودارش بالای محور xها) سپس منفی (نمودارش زیر محور xها) و مجدداً مثبت (نمودارش بالای محور xها) خواهد بود بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح است.

۹ـ (۲) در نقاط b و c و d، مشتق صفر است، اما فقط در نقاط b و c تغییر علامت داده است (یعنی نمودار مشتق از بالا به پائین و از پائین به بالای محور xها رفته است، به عبارت دیگر از + به − و سپس از − به + تغییر کرده است) بنابراین f، ۲ اکسترمم دارد.

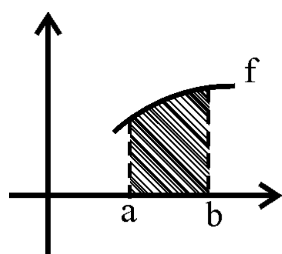
۱۰ـ (۱) با توجه به نمودار f'، دیده می‌شود که چون نمودار همواره بالای محور xها است (یعنی همواره $f' > 0$ است) لذا تابع f همواره اکیداً صعودی بوده، ضمناً چون به ازاء $x > 0$، f' نزولی است لذا $f'' < 0$ بوده و بنابراین تقعر منحنی به سمت پائین است لذا گزینه‌ی (۱) پاسخ صحیح است.

فصل هیجدهم

انتگرال

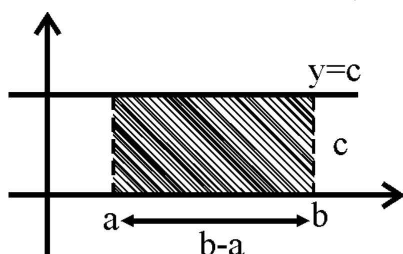
انتگرال معین:

تعریف: فرض می‌کنیم تابع f در فاصلهٔ بستهٔ [a,b] پیوسته و نامنفی باشد، یعنی $\forall x \in [a,b]: f(x) \geq ۰$، به عبارت معادل، نمودار f در فاصلهٔ [a,b] بالای محور xها باشد، در این صورت منظورمان از نماد $\int_a^b f(x)\,dx$ (بخوانید انتگرال از a تا b ی f(x)dx) مطابق شکل مساحت سطح محصور بین نمودار $y = f(x)$ و محور xها و خطوط $x = a$ و $x = b$ می‌باشد.



به این انتگرال، انتگرال معین f نسبت به متغیر x از a تا b می‌گوئیم، a و b را حدود انتگرال‌گیری می‌نامیم. dx نشانگر آنستکه متغیر انتگرال الگیری x است. نماد $\int$ را که در واقع یک s کشیده است و حرف اول کلمه‌ی sum به معنای جمع یا مجموع و surface به معنای سطح می‌باشد) برای اولین بار لایب نیز ریاضی‌دان آلمانی به کار برده است.

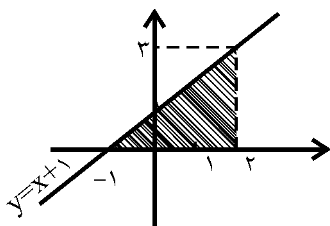
مثال ۱: برای یک تابع ثابت مثبت $f(x) = c$ یا $y = c$ $(c > ۰)$، (خطی موازی محور طولها و بالای محور طولها)، انتگرال معین f بر فاصلهٔ [a,b] برابر است با: $\int_a^b c\,dx = c(b - a)$



در واقع $\int_a^b c\,dx$ برابر مساحت مستطیلی به ابعاد $b - a$ و c است.

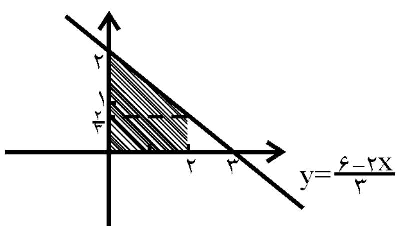
مثال ۲: برای هر تابع درجهٔ اول f، که مقادیر آن برفاصلهٔ مفروض، نامنفی باشد، انتگرال معین آن به روشنی برابر است با مساحت یک مثلث و یا مساحت یک ذوزنقه.

مثال: الف) $\int_{-۱}^{۲} (x + ۱)\,dx$ **را حساب کنید؟**



$$\int_{-۱}^{۲} (x + ۱)\,dx = S = \frac{۳ \times ۳}{۲} = \frac{۹}{۲}$$

مثال: ب) $\int_{۰}^{۲} \frac{۶ - ۲x}{۳}\,dx$ **را حساب کنید؟**



$$\int_{۰}^{۲} \frac{۶ - ۲x}{۳}\,dx = S = \frac{۲(\frac{۲}{۳} + ۲)}{۲} = \frac{۸}{۳}$$

تذکر: اگر $a = b$ باشد، آنگاه انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ برابر مساحت یک پاره‌خط می‌شود که برابر صفر است لذا با فرض اینکه f در $x = a$ تعریف شده باشد، داریم:

$$\int_a^a f(x)\,dx = ۰$$

مثال: $\int_۲^۲ x^۲\,dx = ۰$

تذکر: اگر $b < a$ باشد، آنگاه از تساوی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = -S$$

مثال:
$$\int_۲^{-۱} (x+۱)\,dx = -\int_{-۱}^۲ (x+۱)\,dx = -\frac{۹}{۲}$$

انتگرال معین توابعی که منفی هستند

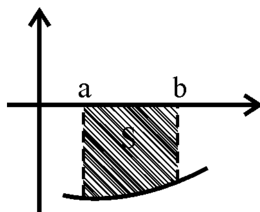
انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ را به عنوان مساحت ناحیهٔ بین نمودار $y = f(x)$ و محور xها و خطوط $x = a$ و $x = b$، در شرایطی تعریف کردیم که:

الف) برای هر x بین a و b، $f(x) \geq ۰$

ب) $a < b$

ج) f در فاصلهٔ [a,b] پیوسته باشد.

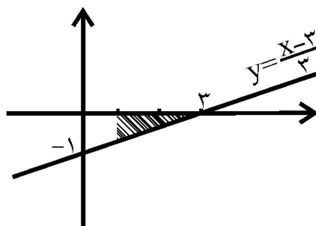
حال اگر f در فاصلهٔ [a,b] منفی باشد (یعنی نمودار f زیر محور xها باشد) انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ را به عنوان قرینهٔ مساحت محصور بین f و محور xها (زیر محور xها) و خطوط $x = a$ و $x = b$ تعریف می‌کنیم لذا انتگرال معین در اینحالت عددی منفی خواهد شد.



$$\int_a^b f(x)\,dx = -S$$

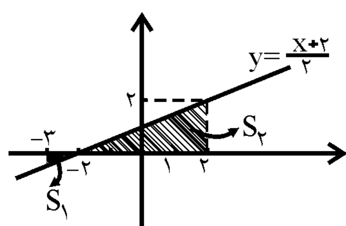
بنابراین در اینگونه موارد برای محاسبهٔ مساحت بایستی قدر مطلق انتگرال را محاسبه کرد.

مثال: $\int_۱^۳ \frac{x-۳}{۳}\,dx$ **را محاسبه کنید؟**



$$\int_۱^۳ \frac{x-۳}{۳}\,dx = -S_{\text{مثلث}} = -\frac{\frac{۲}{۳}\times ۲}{۲} = \frac{-۲}{۳}$$

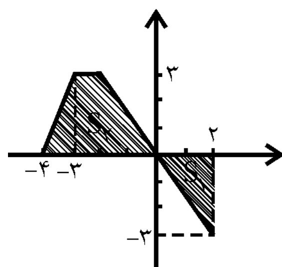
تبصرهٔ مهم: وقتی نمودار یک تابع در قسمتی از یک فاصله بالای محور xها ($f(x) \geq ۰$) و در قسمتی دیگر زیر محور xها (یا پائین محور xها ($f(x) \leq ۰$) باشد، در این صورت برای محاسبهٔ انتگرال معین در این فاصله، انتگرال معین داده شده را به مؤلفه‌های مثبت و منفی آن تجزیه کرده و نتایج حاصله را با هم جمع می‌کنیم.



مثال: مقدار $\int_{-3}^{2} \frac{x+2}{2}dx$ **را محاسبه کنید؟**

$$\int_{-3}^{2} \frac{x+2}{2}dx = \int_{-3}^{-1} \frac{x+2}{2}dx + \int_{-1}^{2}\frac{x+2}{2}dx$$

$$= -s_1 + s_2 = -\frac{\frac{1}{2}\times 1}{2} + \frac{2\times 4}{2} = \frac{-1}{4} + 4 = \frac{15}{4}$$



مثال: اگر نمودار تابع f به صورت مقابل باشد، مطلوبست محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

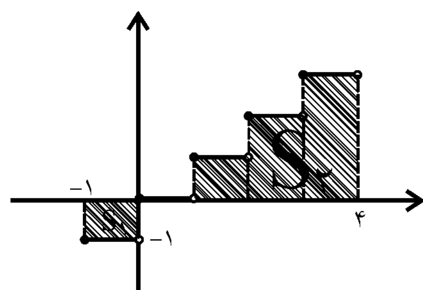
$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = -s_1 = -\frac{2\times 3}{2} = -3$$

$$\int_{-4}^{0} f(x)\,dx = +s_2 = \frac{(4+1)3}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\int_{-4}^{2} f(x)\,dx = \int_{-4}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx = s_2 + (-s_1) = \frac{9}{2}$$

تبصرهٔ مهم: حال این سؤال مطرح می‌شود که چنانچه تابع مورد بحث در فاصلهٔ انتگرالگیری پیوسته نباشد، آیا باز هم می‌توانیم برای آن انتگرال معین تعریف کنیم.

توابعی که پیوسته هستند را اصطلاحاً توابعی خوشرفتار و توابعی که پیوسته نیستند را توابعی بد رفتار می‌گویند، البته برخی از توابع مانند تابع پلهّ‌ای، گرچه در بعضی از نقاط فاصلهٔ مورد نظر ممکن است ناپیوسته باشند، ولی این توابع چندان هم بدرفتار نیستند، در چنین حالتهائی فاصله (حدود) انتگرالگیری را در نقاطی از دامنهٔ (فاصلهٔ) انتگرالگیری، که تابع در آن نقاط پیوسته نیست، تجزیه کرده و فاصله‌های کوچکتری بدست می‌آوریم که تابع مفروض در هر یک از این فواصل پیوسته باشد، سپس طبق آنچه تا کنون گفته‌ایم، انتگرالگیری می‌کنیم.



مثال: $\int_{-1}^{4} [x]dx$ **را حساب کنید؟**

$$\int_{-1}^{4} [x]dx = \int_{-1}^{0} [x]dx + \int_{0}^{1} [x]dx + \int_{1}^{2} [x]dx$$

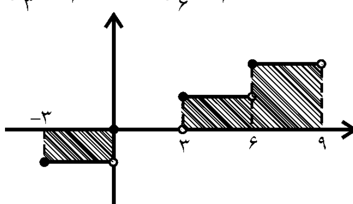
$$+ \int_{2}^{3} [x]dx + \int_{3}^{4} [x]dx = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 5$$

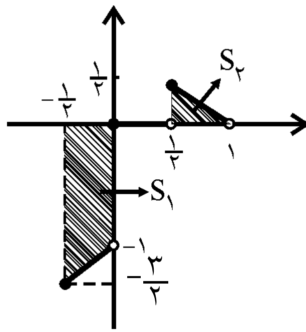
البته به کمک قضیهٔ مساحت بسادگی می‌توان جواب را بدست آورد.

$$\int_{-1}^{4} [x]dx = \int_{-1}^{0} [x]dx + \int_{0}^{4} [x]dx = -s_1 + s_2 = -1 + 6 = 5$$

مثال:

$$\int_{-3}^{9} [\frac{x}{3}]dx = \int_{-3}^{0} [\frac{x}{3}]dx + \int_{0}^{3} [\frac{x}{3}]dx + \int_{3}^{6} [\frac{x}{3}]dx + \int_{6}^{9} [\frac{x}{3}]dx = -3 + 0 + 3 + 6 = 6$$





مثال: $\int_{-\frac{۱}{۲}}^{۱} [۲x]\,|x-۱|\,dx$ **را محاسبه کنید؟**

$$\int_{-\frac{۱}{۲}}^{۱} [۲x]\,|x-۱|\,dx = \int_{-\frac{۱}{۲}}^{۰} \dots + \int_{۰}^{\frac{۱}{۲}} \dots + \int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} \dots$$

$$= -S_۱ + ۰ + S_۲ = -\frac{(۱+\frac{۳}{۲})\times\frac{۱}{۲}}{۲} + ۰ + \frac{\frac{۱}{۲}\times ۱}{۲}$$

$$= -\frac{۵}{۸} + \frac{۱}{۴} = -\frac{۳}{۸}$$

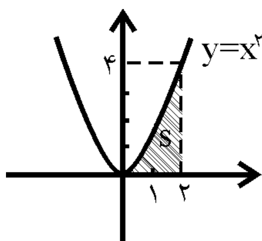
چگونگی رسم نمودار:

$$-\frac{۱}{۲} \le x < ۱ \quad \Rightarrow x-۱<۰ \quad \Rightarrow |x-۱| = ۱-x \quad \Rightarrow y = [۲x](۱-x)$$

حال فاصله را افراز می‌کنیم.

$$\begin{cases} -\frac{۱}{۲} \le x < ۰ \quad \Rightarrow -۱ \le ۲x < ۰ \quad \Rightarrow y = -۱(۱-x) = x-۱ \longrightarrow \begin{array}{c|c} -\frac{۱}{۲} & -\frac{۳}{۲} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} ۰ & -۱ \end{array} \\ ۰ \le x < \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow ۰ \le ۲x < ۱ \quad \Rightarrow y = ۰(۱-x) = ۰ \\ \frac{۱}{۲} \le x < ۱ \quad \Rightarrow ۱ \le ۲x < ۲ \quad \Rightarrow y = ۱(۱-x) = ۱-x \longrightarrow \begin{array}{c|c} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{array} \quad \begin{array}{c|c} ۱ & ۰ \end{array} \end{cases}$$

نکتهٔ مهم: در این بخش، انتگرال توابع ساده‌ای که نمودار آنها خطی یا قطعه‌ای خطی است را به کمک مساحت، محاسبه کرده‌ایم. اکنون این سؤال پیش می‌آید که هرگاه نمودار یک تابع به صورت منحنی باشد، انتگرال معین آن چگونه محاسبه می‌شود، بعنوان مثال $\int_{۰}^{۲} x^۲\,dx$ (در شکل زیر) چگونه محاسبه می‌شود؟



واضح است که $\int_{۰}^{۲} x^۲\,dx = S$، اما چون سطح ایجاد شده یک مثلث یا یک ذوزنقه و یا شکلی نیست که بسادگی بتوان مساحت آنرا محاسبه کرد، لذا نمی‌توان مساحت قسمت هاشور خورده را حساب کرد. در این حالت از روش اِفنا استفاده می‌کنیم. در این روش مساحت زیر نمودار این تابع را با محاسبهٔ مساحت مستطیلهای زیر منحنی (نقصانی) و بالای منحنی (اضافی) محاسبه می‌کنیم. البته چنانچه تعداد این مستطیلها را به بینهایت میل دهیم به نحوی که مساحت هر مستطیل (یا قاعدهٔ آن) به صفر میل کند، در حد مجموع، مساحت مستطیلها برابر مساحت زیر نمودار، یعنی انتگرال مورد نظر است. در قسمتهای بعدی، از این روش، بعنوان اساس تعریف انتگرال معین استفاده می‌کنیم.

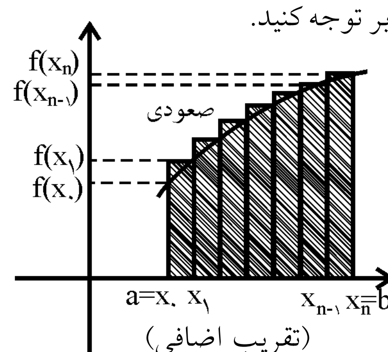
انتگرال معین:

تقریب نقصانی و اضافی سطح زیر منحنی:

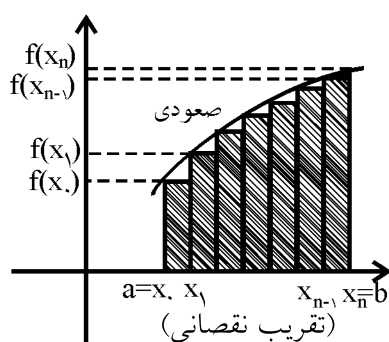
فرض می‌کنیم تابع $y = f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ تابعی پیوسته و نامنفی باشد، $(\forall x \in [a,b]: f(x) \geq ٠)$، یعنی نمودار f در این فاصله، بالای محور xها باشد) می‌خواهیم مقدار تقریبی سطح محصور بین نمودار f و محور xها و دو خط $x = a$ و $x = b$ را پیدا کنیم. به طور کلی می‌دانیم مساحت هر مستطیل برابر حاصلضرب طول در عرض آن است.

حال برای اینکه مساحت سطح زیر نمودار $y = f(x) \geq ٠$ را در بازه‌ی $[a,b]$ پیدا کنیم، سطح را با مستطیلهایی می‌پوشانیم و مجموع مساحتهای این مستطیلها را حساب می‌کنیم. بدیهی است که برای بسیاری از این سطوح، این عمل امکان‌پذیر نیست و قسمتی از سطح باقی می‌ماند (تقریب نقصانی) و یا مجبور می‌شویم سطح بیشتری را بپوشانیم که تقریب اضافی به دست می‌آید.

به دو شکل زیر توجه کنید.



(تقریب اضافی)



(تقریب نقصانی)

در واقع، بازه‌ی $[a,b]$ را به n زیر بازه‌ی

$$[x_٠, x_١], [x_١, x_٢], \quad \dots \quad, [x_{n-١}, x_n]$$

تقسیم می‌کنیم. برای سهولت طول این n بازه را مساوی و برابر Δx اختیار می‌کنیم، در این صورت داریم:

$$\Delta x = x_١ - x_٠ = x_٢ - x_١ = \dots = x_{i-١} - x_i = \dots = x_n - x_{n-١} = \frac{b-a}{n}$$

$$\begin{cases} x_٠ = a \\ x_١ = a + \Delta x \\ x_٢ = a + ٢\Delta x \\ \vdots \\ x_{i-١} = a + (i-١)\Delta x \\ x_i = a + i\Delta x \Rightarrow x_i = a + (\frac{b-a}{n})i \\ \vdots \\ x_n = a + n\Delta x \end{cases}$$

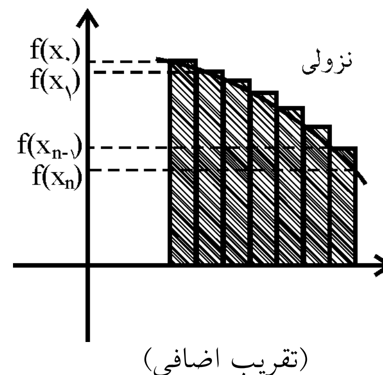
حال اگر تابع f صعودی باشد (مانند شکلهای فوق)، آنگاه تقریب نقصانی و اضافی مساحت به ترتیب عبارتست از:

تقریب نقصانی مساحت = مجموع مساحتهای مستطیلهای پائینی = $\Delta x\, f(x_0) + \Delta x f(x_1) + \dots + \Delta x f(x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_{i-1})$

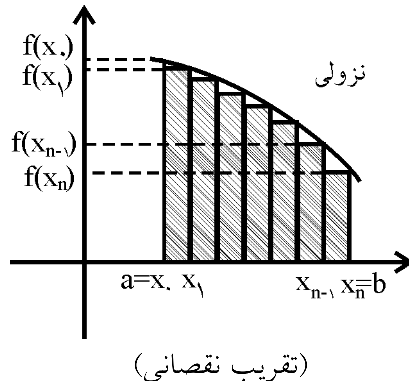
تقریب اضافی مساحت = مجموع مساحتهای مستطیلهای بالائی = $\Delta x f(x_1) + \Delta x f(x_2) + \dots + \Delta x f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x\, f(x_i)$

توجه کنید که عرض همه‌ی مستطیلها، Δx است و طول مستطیلها برابر $f(x_0)$, $f(x_1)$ و ... و $f(x_n)$ می‌باشد.

حال اگر f نزولی باشد، آنگاه عکس این مطلب را داریم:



(تقریب اضافی)



(تقریب نقصانی)

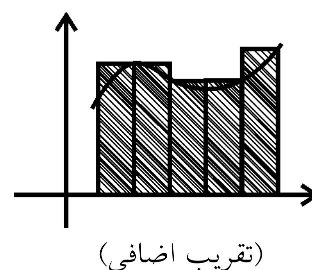
یعنی مطابق شکل جاری تقریب نقصانی و اضافی عوض می‌شوند.

واضح است که در هر دو حالت داریم:

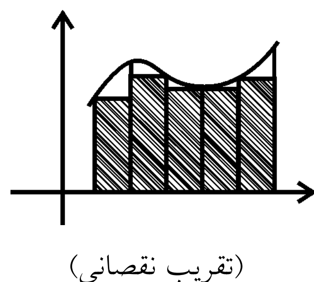
تقریب اضافی $\le$ مساحت شکل $\le$ تقریب نقصانی

حال اگر با افرایش n، (کاهش طول زیر بازه‌های $[x_{i-1}, x_i]$ یا تظریف (ظریفتر کردن) افراز، این دو مقدار به هم نزدیک شوند و در واقع هنگامیکه $n \to \infty$ میل می‌کند، هر دو به یک عدد حقیقی میل کنند، آنگاه این عدد حقیقی، برابر مساحت زیر نمودار $y = f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ می‌باشد.

تذکر: هرگاه تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ فقط صعودی و یا فقط نزولی نباشد (شکلهای زیر) باز هم تقریب نقصانی و اضافی به همان طریقی که تعریف شدند، قابل تعریف‌اند.



(تقریب اضافی)



(تقریب نقصانی)

مثال: ماشینی ۵ ثانیه پس از ترمز گرفتن می‌ایستد، سرعت در لحظات مختلف این ۵ ثانیه در جدول مقابل آمده است.

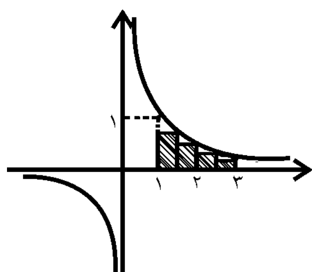
زمان	۰	۱	۲	۳	۴	۵
سرعت برحسب m/s	۴۴	۳۰	۲۰	۱۲/۵	۵	۰

مطلوبست تقریب اضافی و نقصانی برای مسافتی که ماشین در عرض این ۵ ثانیه طی می‌کند؟

حل: چون تابع سرعت در فاصلهٔ [۰,۵] نزولی است لذا:

$$\text{تقریب نقصانی مساحت} = \Delta x[f(x_1) + \dots + f(x_5)]$$
$$= \frac{۵-۰}{۵}(۳۰ + ۲۰ + ۱۲/۵ + ۵ + ۰) = ۶۷/۵ \text{ m}$$
$$\text{تقریب اضافی مساحت} = \Delta x[f(x_0) + \dots + f(x_4)]$$
$$= \frac{۵-۰}{۵}[۴۴ + ۳۰ + ۲۰ + ۱۲/۵ + ۵] = ۱۱۱/۵ \text{ m}$$

مثال: مقدار تقریب نقصانی مساحت زیر منحنی $y = \frac{۱}{x}$ را بین ۱ تا ۳ برای n = ۴ بیابید؟

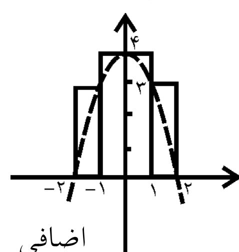


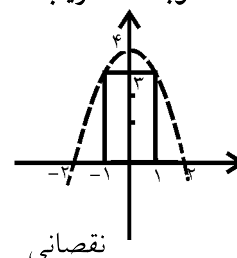
$$\Delta x = \frac{۳-۱}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

حل: f در [۱,۳] نزولی است لذا:

$$\text{تقریب نقصانی مساحت} = \frac{۱}{۲}[f(x_1) + \dots + f(x_4)]$$
$$= \frac{۱}{۲}(\frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۵} + \frac{۱}{۳}) = \frac{۵۷}{۶۰}$$

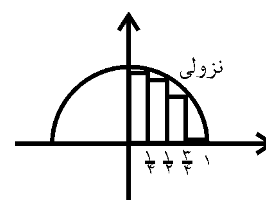
مثال: مطلوبست تقریب نقصانی و اضافی مساحت محصور بین نمودار $y = ۴-x^2$ در بازه‌ی [۲,۲-] برای n = ۴.





$$\text{تقریب نقصانی} = \Delta x\,(f(x_0) + f(x_1) + f(x_3) + f(x_4))$$
$$= ۱\,(۰ + ۳ + ۳ + ۰) = ۶$$
$$\text{تقریب اضافی} = \Delta x\,(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_3))$$
$$= ۱\,(۳ + ۴ + ۴ + ۳) = ۱۴$$

مثال: مطوبست تقریب نقصانی و اضافی مساحت ربع دایره‌ی واحد ($x^2 + y^2 = ۱$) برای n = ۴.



$$\text{تقریب نقصانی مساحت} = \Delta x\,(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4))$$
$$= \frac{۱}{۴}(\frac{\sqrt{۱۵}}{۴} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۷}}{۴} + ۰)$$
$$\text{تقریب اضافی مساحت} = \Delta x\,(f(x_0) + xf(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$$
$$= \frac{۱}{۴}(۱ + \frac{\sqrt{۱۵}}{۴} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۷}}{۴})$$

$x^2 + y^2 = ۱$

$y^2 = ۱ - x^2$

$y = +\sqrt{۱ - x^2}$

معادله نیمدایره‌ی بالائی

تعریف انتگرال معین:

تعریف دقیق انتگرال معین توسط ریمان (Gerorge Frederic Bernard Rieman) ,(1826–1866) ریاضی‌دان برجسته و بزرگ آلمانی در قرن نوزدهم بیان شد.

تعریف مجموع ریمان پائین و مجموع ریمان بالا: فرض می‌کنیم تابع f در [a,b] پیوسته باشد، بازهٔ [a,b] را مطابق قبل به n زیر بازهٔ مساوی تقسیم می‌کنیم (طول زیر بازه‌ها می‌تواند، غیر مساوی نیز باشد، اما برای راحتی، معمولاً طول آنها را

مساوی می‌گیرند)، چون f بر [a,b] پیوسته است لذا f بر هر زیر بازهٔ [a,b] مانند $[x_{i-1}, x_i]$ نیز پیوسته است و طبق قضیه‌ای که در مبحث پیوستگی بیان کرده‌ایم (هر تابع پیوسته در یک بازهٔ بسته Min و Max مطلق دارد)، f در هر یک از بازه‌ها دارای یک Min مطلق و یک Max مطلق است. فرض می‌کنیم. به ازاء هر $1 \le i \le n$، $f(l_i)$ و $f(u_i)$ به ترتیب مقادیر Min مطلق و Max مطلق تابع f در بازهٔ $[x_{i-1},x_i]$ باشند، (سعی کنید مفهوم $f(l_i)$ و $f(u_i)$ را در هر بازه بفمید، این امر بسیار مهم است) در این صورت مجموع ریمان پائین و مجموع ریمان بالای تابع f بر [a,b] را به ترتیب با $L_n(f)$ و $U_n(f)$ نمایش داده و آنها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$L_n(f) := \Delta x f(l_1) + \Delta x f(l_2) + \dots + \Delta x f(l_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(l_i) = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(l_i)$$

$$U_n(f) := \Delta x f(u_1) + \Delta x f(u_2) + \dots + \Delta x f(u_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(u_i) = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(u_i)$$

گاهی مجموع ریمان بالا را بالا ریمان و مجموع پائین ریمان را پائین ریمان نیز می‌گویند.

تعریف مجموع ریمان: اگر همان افراز بالا را برای تابع f در نظر بگیریم، مجموع زیر را مجموع ریمان تابع f بر بازهٔ [a,b] می‌گوئیم و آن را با نماد $R_n(f)$ نمایش می‌دهیم.

$$R_n(f) = \Delta x f(c_1) + \Delta x f(c_2) + \dots + \Delta x f(c_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(c_i) = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(c_i)$$

که در آن c_i، نقطهٔ دلخواهی در بازهٔ $[x_{i-1},x_i]$ است.

تذکر مهم: چون به ازاء هر i، رابطهٔ $f(l_i) \le f(c_i) \le f(u_i)$ برقرار است لذا همواره داریم:

$$L_n(f) \le R_n(f) \le U_n(f)$$

تبصره: اگر تابع f در بازهٔ [a,b] پیوسته نباشد، ولی برای هر یک از بازه‌ها، مقادیر Max مطلق و Min مطلق وجود داشته باشند، باز هم می‌توان $U_n(f)$ و $L_n(f)$ را به همان صورت بالا تعریف کرد.

تعریف انتگرال ریمان بالائی و انتگرال ریمان پائینی تابع f بر [a,b]: انتگرالهای ریمان بالائی و پائینی تابع f بر [a,b] را به ترتیب با نمادهای $\bar{\int} f$ و $\underline{\int} f$ نمایش داده و آنها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\bar{\int_a^b} f := \lim_{n\to\infty} U_n(f) = \inf_P U_n(f)$$

$$\underline{\int_a^b} f : \lim_{n\to\infty} Ln(f) = SUP_P\, Ln(f)$$

که در آن‌ها $\inf_p$ و SUP_p به ترتیب به معنی اینفیمم و سوپریمم مجموعه اعداد $L_n(f)$ و $U_n(f)$ هستند، ضمناً P می‌تواند، همهٔ

افرازهای ممکن [a,b] را اختیار می‌کند.

یادآوری: در واقع دنبالهٔ $\{U_n(f)\}$ دنباله‌ای نزولی و کراندار است و لذا به اینفیمممش همگراست و دنبالهٔ $\{L_n(f)\}$ دنباله‌ای صعودی و کراندار است و لذا به سوپریممیش همگراست.

تعریف انتگرال ریمان تابع f بر [a,b]: تابع f را بر [a,b] انتگرالپذیر (انتگرالپذیریمان) گوئیم هرگاه $\lim_{n\to\infty} L_n(f)$ و $\lim_{n\to\infty} U_n(f)$ هر دو موجود و مساوی باشند لذا:

f بر [a,b] انتگرالپذیر است. $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} Ln(f) = \lim_{n\to\infty} U_n(f) = L \in R$

مقدار مشترک این دو حد را انتگرال معین تابع f بر [a,b] می‌نامند و آنرا با نماد $\int_a^b f(x)\,dx$ نمایش می‌دهند تعریف فوق معادل تعریف زیر است.

تعریف: f بر [a,b] انتگرالپذیر است اگر و فقط اگر که داشته باشیم:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

در این حالت، اگر f بر [a,b] انتگرالپذیر باشد، انتگرال معین f را مقدار مشترک انتگرالهای بالائی و پائینی تعریف می‌کنیم یعنی:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

نکتهٔ ۱: هرگاه $\lim_{n\to\infty} U_n(f)$ و $\lim_{n\to\infty} L_n(f)$ هر دو موجود و مساوی باشند (یعنی f بر [a,b] انتگرالپذیر باشد) آنگاه با توجه به نامساوی $L_n(f) \le R_n(f) \le U_n(f)$، طبق اصل فشار (قضیهٔ ساندویچ)، نتیجه می‌گیریم که $\lim_{n\to\infty} R_n(f)$ نیز موجود است و مقدارش برابر است با مقدار مشترک دو حد فوق، لذا در این حالت می‌توان گفت که اگر f بر [a,b] انتگرالپذیر باشد، آنگاه هر یک از سه حد فوق موجود و برابر $\int_a^b f(x)\,dx$ خواهند بود، یعنی در این حالت:

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = \lim_{n\to\infty} U_n(f) = \lim_{n\to\infty} R_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

در واقع برای هر تابع f، دنباله‌های $\{U_n(f)\}$ و $\{R_n(f)\}$ و $\{L_n(f)\}$ هر سه به $\int_a^b f(x)\,dx$ همگرایند، بنابراین در چنین مواقعی برای محاسبهٔ انتگرال معین f بر [a,b] کافی است فقط یکی از سه حدّ فوق را محاسبه کنیم.

نکتهٔ ۲: چون حد مجموع ریمان به متغیر x بستگی ندارد لذا می‌توان x را به هر متغیر دیگری نیز تبدیل کرد بنابراین همواره داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du = \ldots$$

مثال: در مورد تابع $f(x)=x^۲$، مجموع ریمان بالا و مجموع ریمان پائین f را بربازهٔ [۰,۱] برای یک افراز منظم بدست آورید، سپس $\int_۰^۱ x^۲\,dx$ را بوسیلهٔ حد مجموع ریمان بالا و حد مجموع ریمان پائین حساب کرده و نتیجه را بیان‌کنید؟

حل: ابتدا یک افراز منظم دلخواه برای بازهٔ [۰,۱] در نظر می‌گیریم لذا:

$$x_{i-۱} = a + (i-۱)\Delta x = \frac{i-۱}{n} \quad , x_i = a + i\Delta x = \frac{i}{n} \qquad , \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{۱-۰}{n} = \frac{۱}{n}$$

حال اگر Min مطلق و Max مطلق f را در هر بازه بدست آوریم، (با توجه به اینکه f در بازهٔ [۰,۱] صعودی است، لذا Min مطلق در ابتدای بازه و Max مطلق در انتهای بازه حاصل می‌شوند) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} f(l_i)=f(x_{i-1})=f(\frac{i-1}{n})=(\frac{i-1}{n})^2 \\ f(u_i)=f(x_i)=f(\frac{i}{n})=(\frac{i}{n})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_n(f)=\sum_{i=1}^{n} \Delta x f(l_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}.(\frac{i-1}{n})^2=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2 \\ U_n(f)=\sum_{i=1}^{n}\Delta x f(u_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}.(\frac{i}{n})^2=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_n(f)=\frac{1}{n^3}\times\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} & \text{مجموع ریمان پائین} \\ U_n(f)=\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \text{مجموع ریمان بالا} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} L_n(f) \sim \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{6n^3}=\frac{1}{3} \\ \lim_{n\to\infty} U_n(f) \sim \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{6n^3}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

چون مقدار دو حد فوق مساوی شدند، نتیجه می‌گیریم که f بر $[0,1]$ انتگرالپذیر است و $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$

تذکر: البته اگر مقدار این انتگرال را با توجه به قضیهٔ اساسی دوم حساب کنیم خواهیم داشت:

$$\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1=\frac{1}{3}$$

مثال: مطلوبست مجموع ریمان بالا و مجموع ریمان پائین تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ بر بازهٔ $[1,3]$ برای $n=4$

حل: ابتدا بازهٔ $[1,3]$ را به ۴ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم لذا: $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ x_1=\frac{3}{2} \\ x_2=\frac{4}{2} \\ x_3=\frac{5}{2} \\ x_4=\frac{6}{2} \end{cases}$$

چون $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$ لذا f بر $[1,3]$ نزولی است پس Min مطلق‌ها در انتهای بازه و Max مطلق‌ها در ابتدای بازه حاصل می‌شوند

بنابراین: $L_4(f)=\Delta x\,(f(l_1)+f(l_2)+f(l_3)+f(l_4))$

$$L_4(f)=\Delta x\,(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4))$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\frac{2}{6})=\frac{57}{60}$$

$$U_4(f)=\Delta x\,(f(u_1)+f(u_2)+f(u_3)+f(u_4))$$

$= \Delta x\,(f(x_۰)+f(x_۱)+f(x_۲)+f(x_۳))$

$= \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۱}+\frac{۲}{۳}+\frac{۲}{۴}+\frac{۲}{۵}) = \frac{۷۷}{۶۰}$

توجه کنید که چون n برابر ۴ است جوابها با یکدیگر کمی اختلاف دارند، اما اگر n به ∞ میل کند دو جواب (شرط انتگرالپذیری f) با یکدیگر یکی خواهند شد، البته تابع مزبور بر [۱,۳] انتگرالپذیر هست.

تذکر: واضح است که $L_n(f)$ و $U_n(f)$ ممکن است با هم مساوی نباشند اما اگر f بر [a,b] انتگرالپذیر باشد، آنگاه $\lim_{n\to\infty} L_n(f)$ و $\lim_{n\to\infty} U_n(f)$ (نه خود $L_n(f)$ و $U_n(f)$) با یکدیگر مساوی خواهند شد.

تذکر بسیار مهم: اگر تابع f بر [a,b] پیوسته باشد، آنگاه f در این بازه انتگرالپذیر است.

تذکر: اگر تابع f بر [a,b] پیوسته (و لذا انتگرالپذیر) باشد، آنگاه برای محاسبهٔ $\int_a^b f(x)\,dx$، فقط محاسبه حد یکی از مجموعهای ریمان کافی است.

تذکر مهم: می‌دانیم پیوستگی یک تابع شرطی لازم برای مشتق‌پذیری آن تابع است، اما این شرط کافی نیست (مثال نقض: تابع $y = |x|$ در نقطهٔ ۰ پیوسته است ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست) در حالیکه، برعکسِ مشتق‌گیری، پیوستگی، شرطی کافی برای انتگرالپذیری است ولی لازم نیست، یعنی لزومی ندارد که یک تابع مانند f در یک فاصله پیوسته باشد، تا در آن فاصله انتگرالپذیر باشد، به عبارت دیگر یک تابع ممکن است در یک فاصله پیوسته نباشد ولی انتگرالپذیر باشد به مثال زیر توجه کنید.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} ۰ & ,(x \neq ۰) \\ ۱ & ,(x = ۰) \end{cases}$ **را بر [۱,۱-] در نظر بگیرید. واضح است که این تابع در [۱,۱-] پیوسته نیست (زیرا در نقطهٔ ۰ متعلق به این بازه پیوسته نیست) اکنون نشان می‌دهیم این تابع در [۱,۱-] انتگرالپذیر است. برای نیل به این هدف بازهٔ [۱,۱-] را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و مجموع ریمان پائین و بالای f را در این بازه بدست می‌آوریم.** $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{۱-(-۱)}{n} = \frac{۲}{n}$

هنگامیکه بازهٔ مزبور را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، ممکن است ۰ درون یکی از زیر بازه‌ها مثلاً $[x_{i-1},x_i]$ قرار گیرد و یا ابتدا و انتهای دو زیر بازه به صورت $[x_{i-1},۰]$ و $[۰,x_{i+1}]$ قرار گیرد، واضح است که Min مطلق f در تمام زیر بازه‌ها در هر دو حالت برابر ۰ است لذا: $L_n(f) = \Delta x\,(f(l_۱)+f(l_۲)+...+f(l_n)) = \frac{۲}{n}\;(۰+۰+...+۰) = ۰$

اما Max مطلق f در حالتی که ۰ درون یکی از زیر بازه‌ها مثلاً $[x_{i-1},x_i]$ قرار بگیرد در این زیربازه برابر ۱ و در بقیهٔ زیر بازه‌ها برابر ۰ است و در حالتی که ۰، نقطهٔ انتهائی و ابتدائی (لبهٔ) دو زیر بازه مانند $[x_{i-1},۰]$ و $[۰,x_{i+1}]$ قرار بگیرد، در این دو زیربازه برابر ۱ و در بقیهٔ زیر بازه‌ها برابر ۰ است، لذا:

در حالت اول $\rightarrow U_n(f) = \Delta x\,(۰+۰+...+۰+۱+۰+...+۰) = \frac{۲}{n}$

در حالت دوم $\rightarrow U_n(f) = \Delta x\,(۰+۰+...+۰+۱+۱+۰+....+۰) = \frac{۴}{n}$

پس همواره $۰ \le U_n(f) \le \frac{۴}{n}$

$$\begin{cases} L_n(f) = ۰ \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} L_n(f) = ۰ \\ ۰ \le U_n(f) \le \frac{۴}{n} \quad \underset{\text{طبق قضیهٔ فشار}}{\Rightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} U_n(f) = ۰ \end{cases}$$

چون $\lim_{n\to\infty} U_n(f) = \lim_{n\to\infty} L_n(f) = 0$، لذا f بر [۱,۱-] انتگرالپذیر است و $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ است.

تذکر: البته با توجه به آنچه که قبلاً گفته بودیم داریم:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} 0\,dx = 0 + 0 = 0$$

قضیهٔ مهم: (شرط ریمان برای انتگرالپذیری): f بر [a,b] انتگرالپذیر است اگر و فقط اگر که به ازاء هر $\varepsilon > 0$ مفروض، یک افراز مانند p از [a,b] یافت شود (موجود باشد) بطوریکه: $U_n(f) - L_n(f) < \varepsilon$

این شرط را شرط ریمان، جهت انتگرالپذیری می‌گویند.

تذکر: همانطور که دیدیم پیوستگی یک تابع مانند f در یک فاصله مانند [a,b] شرط کافی برای انتگرالپذیری آن تابع در آن فاصله بود. به کمک شرط ریمان برای انتگرالپذیری، قضیهٔ زیر را که یکی دیگر از شرطهای کافی برای انتگرالپذیری یک تابع بر یک فاصله را ارائه می‌دهد، می‌توان بسادگی اثبات کرد. این شرط یکنوا بودن f بر [a,b] است.

قضیه: اگر f بر [a,b] یکنوا باشد، آن‌گاه f بر [a,b] انتگرالپذیر است.

تذکر: در بعضی از کاربردها، حائز اهمیت است که نشان دهیم یک انتگرال وجود دارد، گرچه ممکن است محاسبهٔ مقدار واقعی انتگرال، یک مسأله مشکل و یا گاهی غیرممکن باشد. اگر بدانیم یک انتگرال موجود است، غالباً می‌توانیم یکی از روشهای بسیار متعدد تقریب مقدار انتگرال (قاعدهٔ ذوزنقه‌ای، قاعدهٔ سیمپسون و ...) را به کار ببریم.

مثال: با فرض $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & ,(x\neq 0)\\ 1 & ,(x=0)\end{cases}$ **نشان دهید** $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ **وجود دارد؟**

واضح است که f به ازاء $x \neq 0$ پیوسته است. حال ثابت می‌کنیم f در ۰ نیز پیوسته است. $f(0) = 1$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

پس f در ۰ نیز پیوسته است.

و لذا بر [۰,۱] پیوسته است بنابراین f بر [۰,۱] انتگرالپذیر است. یعنی $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ موجود است.

مثال: ثابت کنید $\int_{0}^{4} [x]dx$ **موجود است؟**

حل: واضح است که f بر [۰,۴] پیوسته نیست، ولی چون f در این فاصله یکنواست (در واقع صعودی است) طبق قضیهٔ قبل، f بر [۰,۴] انتگرالپذیر است و بنابراین $\int_{0}^{4} [x]dx$ موجود است.

قضیه: اگر f بر [a,b] کراندار باشد و بر این بازه دقیقاً یک نقطهٔ ناپیوستگی داشته باشد، آنگاه f بر [a,b] انتگرالپذیر است.

مثال: تابع $f(x) = [x]$ در فاصلهٔ $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ انتگرالپذیر است. زیر این تابع در این فاصله کراندار است و فقط در $x = 1$ ناپیوسته است.

قضیه: اگر f بر [a,b] کراندار باشد و بر این بازه فقط تعدادی متناهی نقطهٔ ناپیوستگی داشته باشد، آن‌گاه باز هم f بر [a,b] انتگرالپذیر است.

مثال: تابع $f(x) = [x^2]$ در بازهٔ $[0,\sqrt{10}]$ انتگرالپذیر است. زیرا این تابع در این فاصله کراندار است و تنها ده نقطه ناپیوستگی دارد (که عبارتند از $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{10}$)

ویژگیهای انتگرال معین:

کلیهٔ ویژگیهای زیر به شرط وحود انتگرالها برقرار می‌باشند.

۱) اگر f(a) تعریف شده باشد ($a \in D_f$ باشد) آنگاه: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

۲) اگر f بر [a,b] انتگرالپذیر باشد آنگاه: $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

۳) $\int_a^b 0\,dx = 0$

۴) $\int_a^b dx = b - a$

۵) $\int_a^b K\,dx = K(b-a)$ $(K \in R)$

۶) هرگاه f بر [a,b] انتگرالپذیر باشد، آنگاه $\int_a^b Kf(x)\,dx = K\int_a^b f(x)\,dx$

این خاصیت را خاصیت همگنی انتگرال معین می‌گویند. $(K \in R)$

۷) هرگاه توابع f و g هر دو بر فاصلهٔ [a,b] انتگرالپذیر باشند، آنگاه توابع $f \pm g$ نیز بر [a,b] انتگرالپذیرند و

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

در این حالت اگر $K_2 \in R$ و K_1 باشند، آنگاه $K_1 f \pm K_2 g$ نیز بر [a,b] انتگرالپذیرند و

$$\int_a^b (K_1 f(x) \pm K_2\,g(x))\,dx = K_1\int_a^b f(x)\,dx + K_2\int_a^b g(x)\,dx$$

این خاصیت را خاصیت جمعی بودن انتگرال معین می‌گویند.

۸) هرگاه f بر [a,b] انتگرالپذیر باشد و $a < c < b$، آنگاه f بر [a,c] و [c,b] نیز انتگرالپذیر است و

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

در این حالت داریم: $$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx$$

تذکر: لزومی ندارد که c بین a و b باشد به عبارت دیگر هرگاه c بین a و b نباشد اما f در یک فاصلهٔ شامل a و b و c انتگرالپذیر باشد و یا بر بزرگترین بازهٔ بین [a,b] و [b,c] و [a,c] انتگرالپذیر باشد، باز هم تساوی فوق برقرار است.

۹) اگر f بر [a,b] انتگرالپذیر باشد و $[c,d] \subseteq [a,b]$، آنگاه f بر [c,d] نیز انتگرالپذیر است.

۱۰) اگر f و g بر [a,b] انتگرالپذیر باشند و به ازاء هر $x \in [a,b]$ داشته باشیم: $f(x) \leq g(x)$، آنگاه

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

۱۱) اگر f یک تابع انتگرالپذیر نامنفی بر [a,b] باشد یعنی: $\forall x \in [a,b] : f(x) \geq 0$

آنگاه $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$، یعنی اگر نمودار f بالای محور xها باشد، انتگرالش نامنفی است.

۱۲) اگر f یک تابع انتگرالپذیر نامنفی بر [a,b] باشد و در نقطه‌ای مانند x_0 از این بازه پیوسته و مثبت باشد، آنگاه:

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0$$

۱۳) اگر f یک تابع انتگرالپذیر نا مثبت بر [a,b] باشد، یعنی $\forall x \in [a,b] : f(x) \le ۰$ آنگاه $\int_a^b f(x)\,dx \le ۰$، یعنی اگر نمودار f پائین محور xها باشد، انتگرالش منفی یا صفر است.

۱۴) اگر f و g و h توابعی انتگرالپذیر بر [a,b] باشند و به ازاء هر x از این بازه داشته باشیم: $h(x) \le f(x) \le g(x)$ آنگاه:

$$\int_a^b h(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

۱۵) اگر f بر [a,b] انتگرالپذیر باشد، آنگاه |f| نیز بر این فاصله انتگرالپذیر است و

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \Rightarrow -\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

مثال: ثابت کنید:

$$\left|\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۲\pi}{۳}} \text{Cos}^{۷۱}x\,dx\right| \le \frac{\pi}{۳}$$

$$\left|\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۲\pi}{۳}} \text{Cos}^{۷۱}x\,dx\right| \le \int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۲\pi}{۳}} |\cos^{۷۱}x|\,dx \le \int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۲\pi}{۳}} dx = \frac{\pi}{۲}$$

تذکر: عکس قضیهٔ فوق (نکتهٔ شمارهٔ ۱۵) در حالت کلی برقرار نیست.

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} ۱ & ,(x\in Q\cap [a,b]) \\ -۱ & ,(x\in Q'\cap[a,b]) \end{cases}$، $(Q' = R - Q)$ **در فاصلهٔ** [a,b] انتگرالپذیر نیست، اما تابع ثابت $|f(x)| = ۱$ در فاصلهٔ [a,b] انتگرالپذیر است.

نکتهٔ مهم: کرانداری یک تابع در یک فاصله شرط لازم برای انتگرالپذیری آن تابع در آن فاصله است ولی کافی نیست.

به عنوان مثال تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ بر [۱,۱-] انتگرالپذیر نیست زیرا در این بازه کراندار نیست (در واقع $\lim\limits_{x \to ۰^{\pm}} f(x) = \pm\infty$)، از طرفی $f(x) = \begin{cases} ۰ & ,(x\neq ۰) \\ ۱ & ,(x = ۰) \end{cases}$ در بازهٔ [۱,۱-] کراندار است، در حالیکه دیدیم در این فاصله انتگرالپذیر نبود.

نکته: (عکس نقیض نکتهٔ قبل): اگر تابع f در فاصلهٔ [a,b] انتگرالپذیر ریمان باشد، حتماً در این فاصله کراندار است.

تبصره: در آنالیز ریاضی و ریاضیات عالی دانشگاهی، شرط لازم و کافی برای انتگرالپذیری یک تابع، کرانداری آن تابع بر [a,b] بیان شده است، جهت آشنایی بیشتر به کتابهای آنالیز ریاضی رودین، آپاستول، بارتل و آشنائی با آنالیز ریاضی ویلیام ر. پازرینسکی، فیلیپ و، زیپس (ترجمهٔ سید محمود طالبیان) مراجعه کنید.

مجموع پائین و بالای ریمان برای توابع یکنوا:

سعی کنید دو قسمت (الف) و (ب) در ذیل را، به همراه دو نکته‌ی بیان شده برای آنها، به خاطر بسپارید.

الف) اگر f در [a,b] پیوسته و صعودی باشد، در این صورت به ازاء هر $۱ \le i \le n$ داریم:

$$\begin{cases} l_i = x_{i-۱} \\ u_i = x_i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x\, f(l_i) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_{i-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x f(x_i) \\ U_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(u_i) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x\, f(x_i) \end{cases}$$

نکتهٔ مهم: هرگاه f در بازه‌ی [a,b] پیوسته و صعودی باشد داریم: $U_n(f) - L_n(f) = \Delta x(f(b) - f(a))$

ب) اگر f در فاصلهٔ [a,b] پیوسته و نزولی باشد در این صورت به ازاء هر $1 \le i \le n$ داریم:

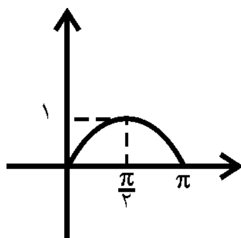
$$\begin{cases} l_i = x_i \\ u_i = x_{i-1} \end{cases}$$

لذا بر عکس حالت صعودی خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \begin{cases} L_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i) \\ U_n(f) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_{i-1}) = \sum_{ii=0}^{n-1} \Delta x f(x_i) \end{cases}$$

نکته‌ی مهم: هرگاه f در بازه‌ی [a,b] پیوسته و نزولی باشد، آنگاه: $U_n(f) - L_n(f) = \Delta x(f(a) - f(b))$

تذکر: اگر یک تابع در قسمتی از یک فاصله صعودی و در قسمتی دیگر نزولی باشد، بایستی در محاسبهٔ $L_n(f)$ و $U_n(f)$ دقت بیشتری نمود و طبق تعریف، مجموعهای ریمان را حساب کرد.



مثال: مجموع ریمان پائین و بالای تابع $f(x) = \sin x$ را در بازه‌ی $[0,\pi]$ برای $n = 6$ بیابید؟

حل: چون تابع f در فاصلهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$ صعودی و در فاصلهٔ $[\frac{\pi}{2},\pi]$ نزولی است لذا:

$$\Delta x = \frac{\pi - 0}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$L_6(f) = \Delta x(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6))$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + 0\right) = (1 + \sqrt{3})\frac{\pi}{6}$$

$$U_6(f) = \Delta x\,(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5))$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = (3 + \sqrt{3})\frac{\pi}{6}$$

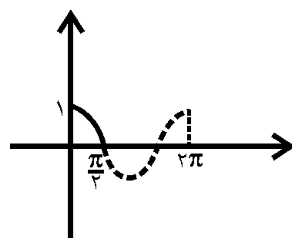
مثال: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ **را به دو طریق محاسبه کنید؟**

الف) به کمک قضیهٔ اساسی دوم ب) با استفاده از حد مجموع ریمان بالا

الف) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

ب) $$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{n} = \frac{\pi}{2n}$$

$$x_0 = 0 \quad , x_i = a + i\Delta x = 0 + \frac{i\pi}{2n} = \frac{\pi}{2n} i$$



چون f در $[\circ,\frac{\pi}{۲}]$ نزولی است لذا در هر زیر بازهٔ مانند $[x_{i-۱},x_i]$، داریم:

$$f(u_i) = f(x_{i-۱}) = f(\frac{\pi}{۲n}(i-۱)) = \cos\frac{\pi}{۲n}(i-۱)$$

بنابراین داریم:

$$U_n(f) = \Delta x \sum_{i=۱}^{n} f(u_i) = \Delta x \sum_{i=۱}^{n} \cos\frac{\pi}{۲n}(i-۱)$$

$$U_n(f) = \frac{\pi}{۲n}\left[\cos\circ + \cos\frac{\pi}{۲n} + \cos\frac{۲\pi}{۲n} + \cos\frac{۳\pi}{۲n} + \dots + \cos\frac{(n-۲)\pi}{۲n} + \cos\frac{(n-۱)\pi}{۲n}\right]$$

حال طرف راست تساوی مزبور را در $(۲\sin\frac{\text{قدر نسبت}}{۲})$ $۲\sin\frac{\pi}{۴n}$ ضرب و تقسیم می‌کنیم. لذا داریم:

$$U_n(f) = \frac{\frac{\pi}{۲n}}{۲\sin\frac{\pi}{۴n}}\left[۲\sin\frac{\pi}{۴n} + ۲\sin\frac{\pi}{۴n}\cos\frac{\pi}{۲n} + ۲\sin\frac{\pi}{۴n}\cos\frac{۲\pi}{۲n} + ۲\sin\frac{\pi}{۴n}\cos\frac{۳\pi}{۲n} + \dots + ۲\sin\frac{\pi}{۴n}\cos\frac{(n-۲)\pi}{۲n} + ۲\sin\frac{\pi}{۴n}\cos\frac{(n-۱)\pi}{۲n}\right]$$

حال عبارتهای حاصلضرب داخل کروشه را به جمع تبدیل می‌کنیم.

$$(۲\sin a\cos b = ۲\times\frac{۱}{۲}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \quad , \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$U_n(f) = \frac{\frac{\pi}{۲n}}{۲\sin\frac{\pi}{۴n}}\left[۲\sin\frac{\pi}{۴n} + \sin\frac{۳\pi}{۴n} - \sin\frac{\pi}{۴n} + \sin\frac{۵\pi}{۴n} - \sin\frac{۳\pi}{۴n} + \sin\frac{۷\pi}{۴n} - \sin\frac{۵\pi}{۴n} + \dots + \sin\frac{(۲n-۳)\pi}{۴n} - \sin\frac{(۲n-۵)\pi}{۴n} + \sin\frac{(۲n-۱)\pi}{۴n} - \sin\frac{(۲n-۳)\pi}{۴n}\right]$$

$$U_n(f) = \frac{\frac{\pi}{۲}}{۲\sin\frac{\pi}{۴n}}\left[\sin\frac{\pi}{۴n} + \sin\frac{(۲n-۱)\pi}{۴n}\right]$$

لذا:

$$\int_\circ^{\frac{\pi}{۲}} \cos x\,dx = \lim_{n\to\infty} U_n(f) \sim \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{۲}}{۲\times\frac{\pi}{۴n}}\left(\sin\frac{\pi}{۴n} + \sin\frac{۲n\pi}{۴n}\right) = -۱(\circ+۱) = ۱$$

قضیه (کران پائین و بالای انتگرال): هرگاه تابع f در بازه‌ی [a,b] پیوسته و m و M به ترتیب مقادیر Min و Max مطلق تابع

f در

این بازه باشند، آنگاه:

$$m \le \frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

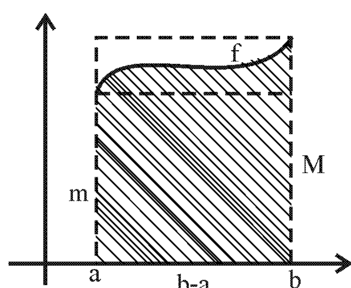
و یا

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$$

و یا

$$n(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

دو مقدار M(b−a) و m(b−a) به ترتیب یک کران بالا و یک کران پائین برای $\int_a^b f(x)dx$ می‌باشند.



تعبیر هندسی:

$m(b-a) =$ مساحت مستطیل کوچک

$\int_a^b f(x)dx =$ مساحت سطح زیر منحنی

$M(b-a) =$ مساحت مستطیل بزرگ

همانطور که دیده می‌شود مساحت زیر منحنی از مساحت مستطیل بزرگتر، کمتر، و از مساحت مستطیل کوچکتر، بیشتر است.

مثال ۱: ثابت کنید: $\frac{۲}{۳۳} \le \int_۰^۲ \frac{dx}{۱+x^۵} \le ۲$

روش اول: $f(x)=\frac{۱}{۱+x^۵} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۵x^۴}{(x^۵+۱)^۲} \Rightarrow x=۰ \quad , x=-۱ \quad \Rightarrow x=۰$ نقطهٔ بحرانی

چون هیچکدام از این دو نقطه در $[۰,۲]$ نیستند لذا:

$$\begin{cases} f(۰)=۱ = M \\ f(۲)=\frac{۱}{۳۳}=m \end{cases}$$

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \Rightarrow \frac{۱}{۳۳}(۲-۰) \le \int_۰^۲ \frac{dx}{۱+x^۵} \le ۱(۲-۰)$$

روش دوم: در این مسأله، می‌توان به صورت زیر نیز عمل کرد.

$$۰<x<۲ \Rightarrow ۰<x^۵<۳۲ \Rightarrow ۱<x^۵+۱<۳۳$$

$$m=\frac{۱}{۳۳} < \frac{۱}{x^۵+۱} < ۱ = M \Rightarrow \frac{۲}{۳۳} \le \int_۰^۲ \frac{۱}{x^۵+۱}dx \le ۲$$

مثال ۲: بازهٔ بسته‌ای پیدا کنید که شامل $\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۳\pi}{۴}} \sqrt{\sin x}\, dx$ **باشد؟**

$$\frac{\pi}{۴}<x<\frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{۴}<\sin x<\sin\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}<\sin x<۱$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}<\sqrt{\sin x}<۱ \Rightarrow \frac{\sqrt[۴]{۲}}{\sqrt[۴]{۴}}<\sqrt{\sin x}<۱ \Rightarrow m=\sqrt[۴]{\frac{۱}{۲}}<\sqrt{\sin x}<۱=M$$

$$\frac{۱}{\sqrt[۴]{۲}}\left(\frac{۳\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴}\right) \le \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۳\pi}{۴}} \sqrt{\sin x}\, dx \le ۱\left(\frac{۳\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{۲\sqrt[۴]{۲}} \le \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۳\pi}{۴}} \sqrt{\sin x}\, dx \le \frac{\pi}{۲}$$

مثال ۳: ثابت کنید: $\frac{۱}{n+۱} < Ln\frac{n+۱}{n} < \frac{۱}{n} \quad ,(n\in N)$

حل: تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در فاصلهٔ $[n,n+۱]$ در نظر می‌گیریم، این تابع در این فاصله نزولی است لذا:

$$\begin{cases} M=f(n)=\frac{۱}{n} \\ m=f(n+۱)=\frac{۱}{n+۱} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M \Rightarrow \frac{۱}{n+۱} \le \frac{\int_n^{n+۱} \frac{۱}{x}dx}{n+۱-n} \le \frac{۱}{n} \Rightarrow \frac{۱}{n+۱} \le Lnx\Big]_n^{n+۱} \le \frac{۱}{n}$$

$$\frac{1}{n+1} \leq Ln(n+1) - Lnn \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq Ln\frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{n}$$

مثال ۴: ثابت کنید: $\frac{5}{26} < Arctan\ 0/2 < \frac{1}{5}$

حل: تابع $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ را در بازهٔ $[0,0/2]$ در نظر می‌گیریم، این تابع در این فاصله همواره نزولی است زیرا: $f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}<0$ پس:

$$\begin{cases} M=\frac{1}{1+0}=1 \\ m=\frac{1}{1+(0/2)^2}=\frac{25}{26} \end{cases} \Rightarrow (0/2-0)\frac{25}{26} \leq \int_0^{0/2} \frac{1}{1+x^2}dx \leq (0/2-0)\,1$$

$$\frac{5}{26} \leq Arctan x \Big]_0^{0/2} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{5}{26} \leq Arctan\,0/2 \leq \frac{1}{5}$$

تمرین: درستی نامساوی مقابل را بررسی کنید؟

$$2\sqrt{e} \leq \int_0^1 (e^x + e^{1-x})dx \leq 2(e+1)$$

مقدار متوسط یا مقدار میانگین یک تابع پیوسته در یک بازه‌ی بسته:

یادآوری: می‌دانیم میانگین n مقدار گسستهٔ $\{f(x_1), ..., f(x_n)\}$ از فرمول $\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$ بدست می‌آید، هیچ لزومی ندارد که این مقدار میانگین (یا مقدار متوسط) برابر یکی از $f(x_1)$ و ... $f(x_n)$ باشد.

مثال: مقدار میانگین تابع $f(x) = x^2+1$ را به ازاء $x_i \in \{1,2,0,4\}$ بیابید؟

$$\text{مقدار میانگین} = \frac{f(1)+f(2)+f(0)+f(4)}{4} = \frac{2+5+1+17}{4} = \frac{25}{4} = 6/25$$

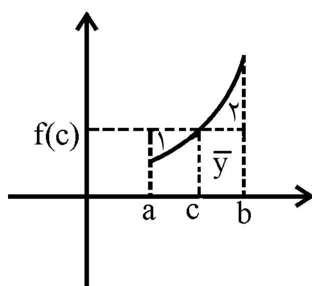
تعریف: مقدار $\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ را مقدار میانگین یا مقدار متوسط تابع پیوسته‌ی f از نقطهٔ a تا نقطهٔ b (در بازهٔ [a,b] می‌گویند) در واقع اگر بخواهیم مقدار میانگین یک تابع پیوسته در یک بازهٔ بسته را بیابیم کافی است $\int_a^b f(x)\,dx$ را حساب کرده، حاصل را بر b−a تقسیم کنیم، در این حالت، این مقدار میانگین حتماً برابر مقدار f در یکی از نقاط بازهٔ [a,b] است. دلیل این نامگذاری را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

فرض می‌کنیم تابع f در بازه‌ی [a,b] پیوسته باشد و در نقاط x_1 و x_2 و ... x_n به ترتیب دارای عرضهای y_1 و y_2 و ... و y_n باشد داریم:

$$\bar{y}=\frac{y_1+y_2+...+y_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \times \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \approx \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

با توجه به اینکه $\bar{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$، داریم: $\int_a^b f(x)\,dx=\bar{y}\,(b-a)$
این تساوی بدین معنی است که سطح زیر منحنی f در بازه‌ی [a,b] برابر است با سطح (مساحت) مستطیلی به اضلاع b − a و $\bar{y}$ (مقدار متوسط تابع) به شکل توجه کنید.



مثال: مقدار میانگین تابع $f(x)=\frac{2}{x^2}$ بر بازهٔ [۱,c] برابر ۱ است، c را بیابید؟

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}=f(c)\quad\Rightarrow\frac{\int_1^c \frac{2}{x^2}\,dx}{c-1}=1$$

$$-\frac{2}{x}\Big]_1^c=c-1\quad\Rightarrow\frac{-2}{c}+2=c+1\quad\Rightarrow -2+2c-c^2+c=0\quad\Rightarrow c^2-3c+2=0$$

$$a+b+c=0\quad\begin{cases}c=1 & \text{غیرقابل قبول}\\ c=\frac{c}{a}=2\end{cases}$$

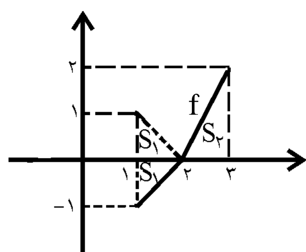
مثال: هرگاه $f(x)=\begin{cases}x-2 & ,(x\le 2)\\ 2x-4 & ,(x>2)\end{cases}$، مقدار متوسط توابع f و |f| را در بازه‌ی [۱,۳] بیابید؟

$$\int_1^2 f(x)\,dx=-s_1=-\frac{1}{2}$$

$$\int_2^3 f(x)\,dx=s_2=1$$

$$\int_1^2 |f(x)|\,dx=s_1=\frac{1}{2}$$

$$\int_2^3 |f(x)|\,dx=s_2=1$$



مقدار متوسط تابع f برابر است با:

$$\bar{y}=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}=\frac{\int_1^3 f(x)\,dx}{3-1}=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{4}$$

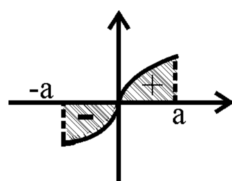
و مقدار متوسط تابع |f| برابر است با:

$$\bar{Y}=\frac{\int_a^b |f(x)|\,dx}{b-a}=\frac{\int_1^3 |f(x)|\,dx}{3-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)=\frac{3}{4}$$

دو ویژگی دیگر انتگرال معین:

۱) هرگاه f در بازه‌ی بسته‌ی [−a,a] تابعی فرد و انتگرالپذیر باشد، آنگاه انتگرالش در این بازه، صفر است (گفتیم انتگرالش در این بازه صفر است نه مساحتش) یعنی:

$$\int_{-a}^a f(x)dx=0$$



تذکر: توجه کنید که مساحت در این حالت، دو برابر نصفش می‌باشد.

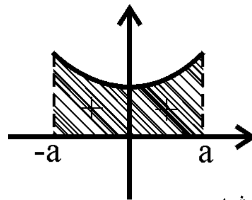
مثال:

الف) $\int_{-1}^{1} x^5 dx = 0$

ب) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\cos x}{1+e^{x^2}} dx = 0$

۲) هرگاه f در بازه‌ی بسته‌ی [a,a-] تابعی زوج و انتگرالپذیر باشد، آنگاه انتگرالش در این بازه، دو برابر انتگرالش در بازه‌ی [0,a] است یعنی:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$



تذکر: در این حالت نیز مساحت، دو برابر نصفش می‌باشد.

قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرالها: هرگاه f در بازه‌ی بسته‌ی [a,b] پیوسته باشد، آنگاه عددی حقیقی مانند c وجود دارد به طوریکه:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = f(c)(b-a)$$

یا

$$\frac{\int_{a}^{b} f(x)dx}{b-a} = f(c)$$

یا

مقدار متوسط = f(c)

به عبارت دیگر، این بدان معناست که f در بازه‌ی بسته‌ی [a,b]، مقدار متوسط خود را می‌گیرد.

قضیه‌ی اساسی (بنیادی) اول حساب دیفرانسیل و انتگرال: فرض می‌کنیم f در فاصله‌ی باز I شامل نقطهٔ a پیوسته بوده و تابع F با دامنهٔ I به صورت زیر تعریف شود:

$$f(x) := \int_{a}^{x} f(t)dt$$

در این صورت F روی I مشتق‌پذیر است و برای هر $x \in I$, $F'(x) = f(x)$ به عبارت دیگر:

$$\left(\int_{a}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$$

مثال: هرگاه $F(x) = \int_{e}^{x} te^t dt$، $F'(x)$ **را بیابید؟**

$F'(x) = xe^x$

فرمولهای مشتقگیری از انتگرالها:

(I) $\left(\int_{a}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$ (قضیه‌ی اساسی اول)،

(II) $\left(\int_{x}^{a} f(t)dt\right)' = -f(x)$

(III) (فرمول کلی) $\left(\int_{u}^{v} f(t)dt\right)' = v'f(v) - u'f(u)$

پائین رو بگذار جای t توی f(t) × مشتق پائین رو بگیر ـ بالا رو بگذار جای t توی f(t) × مشتق بالارو بگیر =

(IV) $\left[\int_a^v f(t)dt\right]' = v'f(v)$

(V) $\left[\int_u^b f(t)\,dt\right]' = -u'f(u)$

(VI) $\left[\int_a^b f(t)dt\right]' = ۰$

توجه کنید که فرمول (III) در برگیرندهٔ هر پنج فرمول دیگر می‌باشد.

مثال: هرگاه $F(x) = \int_{x^۴}^{e^x} \frac{\sin t}{۱+Lnt}dt$ ، $F'(x)$ **را بیابید؟**

$$F'(x) = e^x.\frac{\sin e^x}{۱+Ln(e^x)} - ۴x^۳.\frac{\sin x^۴}{۱+Ln(x^۴)}$$

تست: اگر $S(x) = \int_۰^x \frac{dt}{(۱+t^۵)^۵}$ ، **آنگاه** $s'(۱)$ **کدام است؟**

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳۲}$ ۳) ۳۲ ۴) ۱

حل:

$$S'(x) = \frac{۱}{(۱+x^۵)^۵} \Rightarrow S'(۱) = \frac{۱}{۳۲}$$

مثال: هرگاه $G(x) = \int_x^۰ \frac{\cos ۲t}{۱+t^۲}dt$ **و** $F(x) = \frac{G(x)}{e^x}$

الف) مشتق $y = G(x^۲)$ را حساب کنید؟ ب) مشتق $y = F(x)$ را حساب کنیدأ

$$G(x) = \int_x^۰ \frac{\cos ۲t}{۱+t^۲}dt \Rightarrow G'(x) = -\frac{\cos ۲x}{۱+x^۲}$$

راه حل اول:

الف) $y' = (G(x^۲))' = ۲x\,.\,G'(x^۲) = ۲x \times \frac{-\cos ۲x^۲}{۱+x^۴}$

راه حل دوم:

$$G(x) = \int_x^۰ \frac{\cos ۲t}{۱+t^۲}dt \Rightarrow G(x^۲) = \int_{x^۲}^۰ \frac{\cos ۲t}{۱+t^۲}dt$$

$$\Rightarrow y' = (G(x^۲))' = \left[\int_{x^۲}^۰ \frac{\cos ۲t}{۱+t^۲}dt\right]' = ۰ - ۲x \times \frac{\cos ۲x^۲}{۱+x^۴}$$

ب) $F(x) = \frac{G(x)}{e^x} \Rightarrow F'(x) = \frac{G'(x).e^x - e^x.G(x)}{(e^x)^۲} = \frac{G'(x) - G(x)}{e^x} = \frac{\frac{-\cos ۲x}{۱+x^۲} - \int_x^۰ \frac{\cos ۲t}{۱+t^۲}dt}{e^x}$

تست: اگر $u(x) = \int_{-x}^{x} \cos t dt$ ، $u'(۰)$ **کدام است؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

$$u'(x) = ۱.\cos x - (-۱)\cos(-x) = ۲\cos x \Rightarrow u'(۰) = ۲$$

تست: حاصل $\lim_{x\to ۰} \frac{\int_۰^{x^۲} t\sin t dt}{x^۶}$ **کدام است؟**

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

حل:

$$\frac{۰}{۰} \overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x\to ۰} \frac{۲x.x^۲\sin x^۲}{۶x^۵} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow \sim\lim_{x\to ۰} \frac{۲x^۵}{۶x^۵} = \frac{۱}{۳}$$

قضیهٔ اساسی (بنیادی) دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال: هرگاه تابع f در بازه‌ی [a,b] پیوسته باشد و تابع F به گونه‌ای باشد که $F'(x) = f(x)$ (در این حالت F را یک تابع اولیه‌ی f می‌گویند) آنگاه:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

مثال: حاصل انتگرال $\int_0^2 x^2\,dx$ **را بیابید؟**

حل: چون $x^2 = (\frac{x^3}{3})'$، لذا طبق قضیه‌ی اساسی دوم داریم:

$$\int_0^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

تست: c‌ی مقرر در قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرالها در مورد انتگرال $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ **کدام است؟**

۱) $\pm\sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$　　۲) $\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$　　۳) $\pm\sqrt{\frac{1}{\pi}}$　　۴) $1\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}$

حل:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\mathrm{Arctan}x\ \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) = \bar{y}\ (b-a) \quad \Rightarrow \frac{\pi}{2} = f(c)\times 2$$

$$f(c) = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow 1 + x^2 = \frac{4}{\pi} \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$$

تبصره‌ی مهم: اهمیت قضیه‌ی اساسی دوم، در این است که ما برای یافتن مقدار انتگرالهای معین باید توجهمان را به چگونگی محاسبه‌ی تابع اولیه‌ی توابع مختلف معطوف کنیم.

چون محاسبه‌ی انتگرال معین از طریق ترسیم به وسیله‌ی مساحت مشکل بوده و گاهی امکان‌پذیر نیست، لذا این قضیه کمک قابل توجهی در محاسبه‌ی انتگرالهای معین به ما می‌کند.

تابع اولیه (انتگرال نامعین):

هرگاه $y = f(x)$ تابعی باشد که در بازه‌ای شامل بازه‌ی بسته‌ی [a,b] تعریف شده باشد، و تابع $y = F(x)$ تابعی باشد به طوریکه $F'(x) = f(x)$، آنگاه تابع F را یک تابع اولیه یا یک انتگرال معین تابع f می‌نامند. تابع اولیه‌ی تابع f را با نماد $\int f(x)dx$ نمایش می‌دهند، دقت کنید که:

$$(*) \quad F'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int f(x)\,dx = F(x) + c$$

من + c = تو $\int$ ⇔ تو = مَن

دقت کنید که برای هر عدد حقیقی ثابت c، داریم: $(F(x) + c)' = f(x)$ بنابراین بر خلاف این گفته که اگر تابعی مشتق داشته باشد، فقط یک مشتق دارد، می‌توان گفت که هر تابع که یک تابع اولیه داشته باشد، بی‌نهایت تابع اولیه دارد که همه‌ی آنها در یک عدد ثابت با یکدیگر اختلاف دارند.

نکته: تفاضل هر دو تابع اولیه‌ی یک تابع پیوسته، مقدار ثابتی است.

مثال: توابع $F(x) = \text{Arctan}x$ و $G(x) = \text{Arctan}x + ۵$ هر دو تابع اولیه‌ی تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ هستند (زیرا $F'(x) = G'(x) = \frac{۱}{۱+x^۲}$) که اختلافشان در عدد ثابت ۵ است.

در فرمول *، c را ثابت انتگرالگیری، f(x) را انتگرال (یا تابع تحت علامت انتگرال)، F را تابع اولیه یا انتگرال نا معین f، dx را متغیر انتگرالگیری (یعنی عمل انتگرالگیری نسبت به x صورت می‌گیرد) و $\int$ (یا تابع تحت علامت انتگرال) را علامت انتگرال می‌گویند. لازم به ذکر است که همواره، عبارت داخل انتگرال، مشتق تابع اولیه است.

مثال: مشتق دو تابع به صورت زیر داده شده‌اند، تابع اولیه‌ی آنها را بیابید؟

$$\begin{cases} f'(x) = ۳x^۲ + \frac{۱}{۲\sqrt{x}} - \frac{۱}{x^۲} & \Rightarrow f(x) = \int f'(x)\,dx = x^۳ + \sqrt{x} + \frac{۱}{x} + c \\ g'(x) = \frac{۱}{۱+x^۲} + e^x + \sin x & \Rightarrow g(x) = \int g'(x)\,dx = \text{Arctan}x + e^x - \cos x + c \end{cases}$$

مثال: با فرض $f(x) = \int (\cot x + ۲x^۲)\,dx$، $f'(\frac{\pi}{۶})$, $f''(\frac{\pi}{۴})$ را حساب کنید؟

حل: از طرفین فرض مشتق می‌گیریم.

$$f'(x) = \cot x + ۲x^۲$$

$$f'(\frac{\pi}{۶}) = \sqrt{۳} + \frac{\pi^۲}{۱۸}$$

$$f''(x) = -(۱ + \cot^۲ x) + ۴x$$

$$f''(\frac{\pi}{۴}) = -۲ + \pi$$

تست: هرگاه $\int f(x)\,dx = \text{Arctan}x$، $f'(۱)$ برابر است با:

۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۱- ۴) ۲-

حل: $\int f(x)\,dx = \text{Arctan}x \Rightarrow f(x) = \frac{۱}{۱+x^۲} \Rightarrow f'(x) = \frac{-۲x}{۱+x^۲} \Rightarrow f'(۱) = -۱$

تست: هرگاه $f(x) = \int \text{Arccos}\sqrt[۳]{x}\,dx$، حاصل $f'(-\frac{۱}{۸})$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

حل: $f'(x) = \text{Arccos}\sqrt[۳]{x} \Rightarrow f'(-\frac{۱}{۸}) = \text{Arccos}(-\frac{۱}{۲}) = \frac{۲\pi}{۳}$

تست: هرگاه $f(ax+b) = \int ۳f'(ax-۱)dx$، مقدار $۲a + ۳b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

حل: از طرفین مشتق می‌گیریم:

$$af'(ax+b) = ۳f'(ax-۱)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = ۳ \\ b = -۱ \end{cases} \Rightarrow ۲a + ۳b = ۳$$

مثال: هرگاه F یک تابع اولیه‌ی تابع $f(x) = \tan x^۳$ باشد، مشتق تابع $y = F(x^۴)$ را بیابید؟

$F(x)=\int f(x)dx \Rightarrow F(x)=\int \tan x^{۳}dx \Rightarrow F'(x)=\tan x^{۳}$

$\Rightarrow y=F(x^{۴}) \Rightarrow y'=۴x^{۳}F'(x^{۴})=۴x^{۳}\tan x^{۱۲}$

تست: هرگاه $f(x)=\int g'(۱-۲x)\,dx$ و $f(۱)=g(-۱)=۶$ باشد، آنگاه حاصل $g(۱-۲x)$ برحسب $f(x)$ کدام است؟

۱) $-۲f(x)$ ۲) $-\frac{۱}{۲}f(x)$ ۳) $۹-\frac{۱}{۲}f(x)$ ۴) $۱۸-۲f(x)$

حل: $f(x)=\int g'(۱-۲x)\,dx=-\frac{۱}{۲}g(۱-۲x)+c \overset{x=۱}{\Rightarrow} f(۱)=-\frac{۱}{۲}g(-۱)+c \Rightarrow ۶=-۳+c$

$\Rightarrow c=۹ \Rightarrow f(x)=-\frac{۱}{۲}g(۱-۲x)+۹ \Rightarrow g(۱-۲x)=۱۸-۲f(x)$

برخی از ویژگیهای انتگرال نامعین

۱) $\int ۰\,dx=c$

۲) $\int dx=\int ۱\,dx=x+c$

۳) $\int (f(x)\pm g(x))\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$

۴) $\int k f(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$

۵) $\int (K_۱f(x)\pm K_۲g(x))\,dx=K_۱\int f(x)\,dx\pm K_۲\int g(x)\,dx$

۶) $\int f(x)g(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx\,.\int g(x)\,dx$

۷) $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$

۸) $\int f(x)\,dx=F(x)+c \Leftrightarrow \int f(ax+b)\,dx=\frac{۱}{a}F(ax+b)+c$

مثال: با توجه به اینکه $\int \cos x\,dx=\sin x+c$ داریم:

$\int \cos(۳x-\frac{\pi}{۶})\,dx=\frac{۱}{۳}\sin(۳x-\frac{\pi}{۶})+c$

مثال: هرگاه $\int f(\frac{x}{۵})\,dx=\cos\frac{۷x}{۵}+c$ ، مطلوبست $\int f(۲x)\,dx$

حل: کافی است x را به ۱۰x تبدیل کنیم. $\int f(\frac{۱۰x}{۵})\,dx=\cos\frac{۷۰x}{۵}+c \Rightarrow \int f(۲x)\,dx=\cos ۱۴x+c$

مهمترین فرمول انتگرالگیری نامعین:

$\int x^n dx=\frac{۱}{n+۱}x^{n+۱}+c \quad ,(n\neq -۱)$

مثال:

$$\int x^{3}dx=\frac{1}{4}x^{4}+c$$

$$\int \sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$$

$$\int \frac{1}{x^{4}}dx=\int x^{-4}dx=-\frac{1}{3}x^{-3}+c$$

تذکر مهم: هرگاه $n=-1$ باشد داریم:

$$\int x^{-1}dx=\int \frac{1}{x}dx=\text{Ln}\,|x|+c$$

فرمول بسیار مهم:

$$\int u^{n}u'\,dx=\int u^{n}du=\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c\quad ,(n\neq -1)$$

یادآوری: $u'dx=du$

فرمول فوق کارآیی بسیار زیادی در محاسبه‌ی انتگرالها دارد.

مثال:

$$\int (x^{3}+x)^{9}(3x^{2}+1)\,dx=\frac{1}{10}(x^{3}+x)^{10}+c$$

$$\int \sin^{5}x\cos x\,dx=\frac{1}{6}\sin^{6}x+c$$

$$\int \frac{\cos^{7}x}{\sin^{9}x}dx=-\int \cot^{7}x\times\frac{-1}{\sin^{2}x}dx=-\frac{1}{8}\cot^{8}x+c$$

تذکر مهم: هرگاه $n=-1$ باشد داریم:

$$\int u^{-1}u'dx=\int \frac{u'}{u}dx=\int \frac{du}{u}=\text{Ln}\,|u|+c$$

مثال:

$$\int \frac{x}{x^{2}+5}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^{2}+5}dx=\frac{1}{2}\text{Ln}(x^{2}+5)+c$$

$$\int \tan x\,dx=-\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx=-\text{Ln}\,|\cos x|+c$$

نکته: توجه کنید که در بسیاری از تستهای کنکور، حالتهای زیر بیشتر کاربرد دارند.

۱) $\int u^{n}u'\,dx=\int u^{n}du=\frac{1}{n+1}u^{n+1}\quad ,(n\neq -1)$

۲) $\int \sqrt{u}\,u'dx=\int \sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}\sqrt{u^{3}}+c=\frac{2}{3}u\sqrt{u}+c$

۳) $\int \frac{u'}{\sqrt{u}}dx=2\int \frac{1}{2\sqrt{u}}du=2\sqrt{u}+c$

۴) $\int \frac{u'}{u^{2}}dx=-\int \frac{-1}{u^{2}}du=-\frac{1}{u}+c$

۵) $\int \frac{u'}{u}dx=\int \frac{1}{u}du=\text{Ln}\,|u|+c$

تذکر مهم: در محاسبه‌ی هر انتگرال، باید از خود این سؤال را پرسید که آیا تابعی هست که مشتقش برابر تابع تحت علامت

انتگرال شود. با استفاده از فرمولهای مشتقگیری و دیفرانسیل‌گیری و با علم به این نکته که انتگرالگیری، عکس عمل مشتقگیری (بهتر است بگوئیم (دیفرانسیل‌گیری)) است، فرمولهای مقدماتی و ساده‌ی زیر را فوراً خواهیم داشت. برای درک هر انتگرال، سعی کنید فرمول مشتق مربوط به هر یک را به خاطر بیاورید.

۱) $\int dx = x + c$

۲) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c$

۳) $\int -\frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} + c$

۴) $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$

۵) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$

۶) $\int \cos x \, dx = \sin x + c$

۷) $\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + c = \ln |\sec x| + c$

۸) $\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + c = -\ln |\operatorname{cosec} x| + c$

۹) $\int (1 + \tan^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$

۱۰) $\int -(1 + \cot^2 x) dx = \int \frac{-1}{\sin^2 x} dx = \int -\operatorname{cosec}^2 x \, dx = \cot x + c$

۱۱) $\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \operatorname{Arctan} x + c \quad , \quad -\operatorname{Arccot} x + c$

۱۲) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \operatorname{Arcsin} x + c \quad , \quad -\operatorname{Arccos} x + c$

۱۳) $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$

۱۴) $\int -\operatorname{cosec} x \cot x \, dx = \operatorname{cosec} x + c$

۱۵) $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} dx = \operatorname{Arcsec} x + c$

۱۶) $\int \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}} dx = \operatorname{Arccosec} x + c$

۱۷) $\int e^x dx = e^x + c$

۱۸) $\int a^x \ln a \, dx = a^x + c$

قواعد و فنون انتگرالگیری نامعین:

نوع اول: $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + c \quad ,(c \neq -1)$

اثبات:

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\int \underbrace{a}_{u'}(\underbrace{ax+b}_{u})^n dx = \frac{1}{a}\int u^n du = \frac{1}{a(n+1)}u^{n+1} + c = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + c (n \neq -1)$$

مثال

الف) $\int (3x+2)^5 dx = \frac{1}{18}(3x+2)^6 + c$

ب) $\int \frac{dx}{(4x+11)^{17}} = \int (4x+11)^{-17} dx = -\frac{1}{64}(4x+11)^{-16} + C = \frac{-1}{64(4x+11)^{16}} + C$

ج) $\int \sqrt[7]{(x+1)}\, dx = \int (x+1)^{\frac{1}{7}} dx = \frac{7}{8}(x+1)^{\frac{8}{7}} + c = \frac{7}{8}\sqrt[7]{(x+1)^8} + c$

نوع دوم: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \, Ln\,|ax+b| + c$

مثال:

الف) $\int \frac{dx}{8x+5} = \frac{1}{8} Ln\,|8x+5| + c$

ب) $\int \frac{1}{x+1} dx = Ln\,|x+1| + c$

نوع سوم: $\int u^n u' dx = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + c \quad ,(n \neq -1)$

مثال:

الف) $\int x(x^4+4x^2+5)^{17}(x^2+2)dx$

$$\frac{1}{4}\int (x^4+4x^2+5)^{17}\, 4x\,(x^2+2)dx = \frac{1}{4}\int u^{17}u'dx$$

$$= \frac{1}{72}u^{18} + c = \frac{1}{72}(x^4+4x^2+5)^{18} + c$$

ب) $\int (\tan^7 x + \tan^9 x)\,dx = \int \underbrace{\tan^7 x}_{u}\,\underbrace{(1+\tan^2 x)}_{u'}\,dx = \frac{\tan^8 x}{8} + c$

ج) $\int (\tan x + \cot x)^{101}(\tan x - \cot x)dx$

$$= \int (\underbrace{\tan x + \cot x}_{u})^{100}(\underbrace{\tan^2 x - \cot^2 x}_{u'})\,dx = \frac{(\tan x + \cot x)^{101}}{101} + c$$

د) $\int \frac{(ax+b)^n}{(cx+d)^{n+2}} = \int (\frac{ax+b}{cx+d})^n \times \frac{1}{(cx+d)^2}\, dx \qquad (n \neq -1)$

$$= \frac{1}{ad-bc}\int (\underbrace{\frac{ax+b}{cx+d}}_{u})^n \times \underbrace{\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}}_{u'} dx = \frac{1}{(ad-bc)(n+1)}(\frac{ax+b}{cx+d})^{n+1} + c$$

ه) $\int \frac{Arctanx}{1+x^2}dx = \int \underbrace{(Arctanx)}_{u} \times \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{u'} dx = \frac{(Arctanx)^2}{2} + c$

و) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\underbrace{1+\cos^2\frac{1}{x}}_{u}}\ \sin\frac{2}{x}dx$ (u')

$u = 1+\cos^2\frac{1}{x} \Rightarrow u' = -2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} \times \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^2}\sin\frac{2}{x}$

$\int\sqrt{u}\,u'dx = \frac{2}{3}\sqrt{u^3} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(1+\cos^2\frac{1}{x})^3} + c$

ز) $\int x^{18}(x^2+2x)^{10}(4x^5+6x^4)dx \Rightarrow \int (x^2)^9(x^2+2x)^{10}x^2(4x^3+6x^2)dx$

$= \int (x^2)^{10}(x^2+2x)^{10}(4x^3+6x^2)dx \Rightarrow \int(\underbrace{x^4+2x^3}_{u})^{10}(\underbrace{4x^3+6x^2}_{u'})dx = \frac{(x^4+2x^3)^{11}}{11} + c$

ح) $\int \frac{1}{(1+x)^2}\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}dx = \frac{1}{2}\int\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} \times \frac{2}{(1+x)^2}dx$

$= \frac{1}{2}\int\sqrt[3]{u}\,u'dx = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}du = \frac{3}{8}u^{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(\frac{1-x}{1+x})^4} + c$

نوع چهارم: $\int \frac{u'}{u}dx = \int \frac{du}{u} = Ln|u| + c$

الف) $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = Ln(e^x+1) + c$

ب) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx = Ln(e^x + e^{-x}) + c$

ج) $\int \frac{dx}{xLnx} = \int \frac{\frac{1}{x}}{Lnx}dx = Ln|Lnx| + c$

یادآوری: $\frac{1}{\cos^2x} = 1 + \tan^2x$

د) $\int \frac{e^{tanx}}{\cos^2x(e^{tanx}+e^2)}dx = \int \frac{(1+\tan^2x)e^{tanx}}{e^{tanx}+e^2}dx = \int \frac{u'}{u}dx = Ln(e^{tanx}+e^2) + c$

ه) $\int \frac{dx}{\sin^2x\cos^2x} = \int \frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx = \int \frac{1}{\cos^2x}dx + \int \frac{1}{\sin^2x}dx = tanx - cotx + c$

نوع پنجم: انتگرالهائی هستند شامل دو عامل به نام‌های عامل اصلی و عامل مشتق، عامل اصلی می‌تواند ار هر درجه و هرجا باشد (در صورت کسر یا در مخرج آن یا زیر رادیکال) و عامل مشتق که در واقع مشتق عامل اصلی است، در صورت کسری بودن انتگرال، همیشه در صورت کسر است، برای محاسبهٔ چنین انتگرالهائی، عامل اصلی را u گرفته، u' را مشخص کرده و سپس انتگرالگیری می‌کنیم.

مثال: الف) $\int nx^{n-1}\sqrt[7]{(x^n+10)}\,dx=\int u'\sqrt[7]{u}\,dx=\int u^{\frac{1}{7}}du=\frac{7}{8}u^{\frac{8}{7}}+c=\frac{7}{8}(x^n+10)^{\frac{8}{7}}+c$

ب) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^9}{\sqrt{x}}=2\int\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{u'}\underbrace{(\sqrt{x}+1)}_{u}{}^9dx=2\int u^9du=\frac{2(\sqrt{x}+1)^{10}}{10}+c$

نوع ششم: انتگرالهائی هستند شامل دو عامل به نامهای عامل اصلی و عامل اضافی، عامل اصلی معمولاً به صورت $ax+b$ است و در هر جا می‌تواند باشد (صورت یا مخرج یا زیر رادیکال و ...) ولی عامل اضافی از هر درجه‌ای می‌تواند باشد و در صورت کسری بودن مسأله، همیشه در صورت است. در این گونه موارد، عامل اصلی را u فرض کرده، از طرفین هم دیفرانسیل گرفته، هم عامل اضافی را حساب کرده، در مسأله قرار داده و سپس انتگرالگیری می‌کنیم، این روش را روش تعویض متغیر می‌گویند.

مثال: الف) $\int x(x+1)^{100}dx=\int(u-1)u^{100}du=\int(u^{101}-u^{100})du,\qquad u=x+1\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\x=u-1\end{cases}$

$$=\frac{u^{102}}{102}-\frac{u^{101}}{101}+c=\frac{(x+1)^{102}}{102}-\frac{(x+1)^{101}}{101}+c$$

ب) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(x+1)^{10}}}=\int\frac{(u-1)^3}{\sqrt{u}}du=\int(u^3-3u^2+3u-1)u^{-\frac{1}{2}}du,\qquad x+1=u\Rightarrow\begin{cases}dx=du\\x=u-1\end{cases}$

$$=\int(u^{\frac{5}{2}}-3u^{\frac{3}{2}}+3u^{\frac{1}{2}}-u^{-\frac{1}{2}})du=\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}}-\frac{6}{5}u^{\frac{5}{2}}-2u^{\frac{3}{2}}-2u^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{7}\sqrt{(x+1)^7}-\frac{6}{5}\sqrt{(x+1)^5}-2\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+c$$

تذکر: هرگاه از این روش برای محاسبهٔ انتگرال معین استفاده کنیم، بهتر است یا حدود انتگرال را متناظر با متغیر جدید، عوض کنیم و یا انتگرالگیری نموده، به جای متغیر جدید، متغیر اصلی یا قبلی را قرار داده و سپس از حدود انتگرالگیری متغیر اصلی یا قبلی استفاده کنیم.

نوع هفتم: انتگرالهائی هستند که شامل سه عامل‌اند به نامهای عامل اصلی، عامل مشتق و عامل اضافی، عامل اصلی از هر درجه و در هر جا می‌تواند باشد، عامل مشتق و عامل اضافی همیشه در صورت می‌باشند.

مثال: الف) $\int\frac{5x^9dx}{\sqrt[3]{(x^5+1)^2}}=\int\frac{x^5.5x^4dx}{\sqrt[3]{(x^5+1)^2}}=\int\frac{(u-1)du}{\sqrt[3]{u^2}},\qquad x^5+1=u\Rightarrow\begin{cases}5x^4dx=du\\x^5=u-1\end{cases}$

$$=\int(u^{\frac{1}{3}}-u^{-\frac{2}{3}})du=\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}-3u^{\frac{1}{3}}+c\quad=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^5+1)^4}-3\sqrt[3]{x^5+1}+c$$

ب) $\int x^{32}(x^{11}+1)^{30}dx=\frac{1}{11}\int x^{22}(x^{11}+1)^{30}\,11x^{10}dx,\qquad x^{11}+1=u\Rightarrow\begin{cases}11x^{10}dx=du\\x^{11}=u-1\end{cases}$

$$=\frac{1}{11}\int (u-1)^{2}u^{30}du=\frac{1}{11}\int (u^{32}-2u^{31}+u^{30})\,du$$

$$=\frac{1}{11}\left[\frac{1}{33}(x^{11}+1)^{33}-\frac{1}{16}(x^{11}+1)^{32}+\frac{1}{31}(x^{11}+1)^{31}\right]+c$$

نوع هشتم: **انتگرال توابع سادهٔ مثلثاتی:**

$$\int \sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\cos ax+c$$

$$\int \cos ax\,dx=\frac{1}{a}\sin ax+c$$

مثال:

$$\int \cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x+c$$

$$\int (1+\tan^{2}ax)dx=\int \frac{1}{\cos^{2}ax}dx=\int \sec^{2}ax\,dx=\frac{1}{a}\tan ax+c$$

$$\int (1+\cot^{2}ax)dx=\int \frac{1}{\sin^{2}ax}dx=\int \mathrm{cosec}^{2}ax\,dx=\frac{-1}{a}\cot ax+c$$

نوع نهم: **انتگرالهائی مثلثاتی به صورت:**

$$\int u'\sin u\,dx=\int \sin u\,du=-\cos u+c$$

$$\int u'\cos u\,dx=\int \cos u\,du=\sin u+c$$

$$\int u'(1+\tan^{2}u)\,dx=\int \frac{u'}{\cos^{2}u}dx=\int u'\sec^{2}u\,dx=\tan u+c$$

$$\int u'(1+\cot^{2}u)\,dx=\int \frac{u'}{\sin^{2}u}dx=\int u'\mathrm{cosec}^{2}u\,dx=-\cot u+c$$

مثال:

الف) $\int x\sin x^{2}\,dx=\frac{1}{2}\int 2x\sin x^{2}dx=-\frac{1}{2}\cos x^{2}+c$

ب) $\int \frac{\cos(\tan x)}{\cos^{2}x}dx=\int \underbrace{\frac{1}{\cos^{2}x}}_{u'}.\cos(\underbrace{\tan x}_{u})dx=\int u'\cos u\,dx=\sin(\tan x)+c$

ج) $\int \sin x.\sin(\cos x)dx=-\int u'\sin u\,dx=-\int \sin u\,du=\cos u+c=\cos(\cos x)+c$

د) $\int \underbrace{\cos x}_{u'}.\cot^{2}(\underbrace{\sin x}_{u})dx=\int \cot^{2}u\,du=\int (\cot^{2}u+1-1)\,du=-\cot u-u+c=-\cot(\sin x)-\sin x+c$

نوع دهم: انتگرالهائی است مثلثاتی مانند نوع پنجم، یعنی مسأله شامل دو عامل است یکی عامل اصلی و دیگری عامل مشتق و مشابه نوع پنجم حل می‌شوند.

مثال:

$$\int \frac{1}{\cos^{2}x\sqrt[3]{\tan x+1}}dx=\int \underbrace{\frac{1}{\cos^{2}x}}_{u'}.\frac{1}{\sqrt[3]{\underbrace{\tan x+1}_{u}}}dx=\int \frac{1}{\sqrt[3]{u}}du=\frac{3}{2}\sqrt[3]{u^{2}}+c=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(\tan x+1)^{2}}+c$$

نوع یازدهم:

$$\begin{cases}\int(\tan^n x+\tan^{n+2}x)\,dx=\int\underbrace{\tan^n x}_{u}\,\underbrace{(1+\tan^2 x)}_{u'}dx=\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x+c\\ \int(\cot^n x+\cot^{n+2}x)\,dx=-\frac{1}{n+1}\cot^{n+1}x+c\end{cases}$$

نوع دوازدهم

$$\begin{cases}\int\frac{\sin^n x}{\cos^{n+2}x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}.\underbrace{\tan^n x}_{u}\,dx=\frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x+c\\ \int\frac{\cos^n x}{\sin^{n+2}x}dx=\frac{-1}{n+1}\cot^{n+1}x+c\end{cases}$$

نوع سیزدهم: انتگرالهائی هستند مثلثاتی مشابه نوع هفتم و همانند آنها حل می‌شوند.

مثال: $\cot x+1=u\Rightarrow\begin{cases}\frac{-1}{\sin^2 x}dx=du\\ \cot x=u-1\end{cases}$, $\int\frac{\cot^3 x(\cot x+1)^7}{\sin^2 x}dx=-\int(u-1)^3u^7du$

$$=-\int(u^3-3u^2+3u-1)u^7du=-\frac{u^{11}}{11}+\frac{3u^{10}}{10}-\frac{3u^9}{9}+\frac{u^8}{8}+c$$

$$=-\frac{(\cot x+1)^{11}}{11}+\frac{3(\cot x+1)^{10}}{10}-\frac{(\cot x+1)^9}{3}+\frac{(\cot x+1)^8}{8}+c$$

نوع چهاردهم: انتگرالهائی هستند به صورت:

$$\begin{cases}\int\frac{u'dx}{1+u^2}=\int\frac{du}{1+u^2}=\text{Arctan}\,u+c \text{ یا } -\text{Arcot}u+c\\ \int\frac{u'dx}{a^2+u^2}=\int\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}\text{Arctan}\frac{u}{a}+c \text{ یا } \frac{-1}{a}\text{Arccot}\frac{u}{a}+c\\ \int\frac{u'}{a^2+b^2u^2}dx=\int\frac{du}{a^2+b^2u^2}=\frac{1}{ab}\text{Arctan}\frac{b}{a}u+c \text{ یا } \frac{-1}{ab}\text{Arccot}\frac{b}{a}u+c\end{cases}$$

مثال:

الف) $\int\frac{3x^2dx}{1+x^6}=\int\frac{3x^2dx}{1+(x^3)^2}=\text{Arctan}x^3+c$

ب) $\int\frac{e^x}{4+9e^{2x}}dx=\int\frac{e^x}{4+9(e^x)^2}=\frac{1}{6}\text{Arctan}\frac{3e^x}{2}+c$

ج) $\int\frac{x^2+2x+1}{1+(x+1)^6}dx=\frac{1}{3}\int\frac{3(x+1)^2}{1+((x+1)^3)^2}dx=\frac{1}{3}\text{Arctan}(x+1)^3+c$

د) $\int\frac{2x^2+5}{(x^2+4)(x^2+1)}dx=\int\frac{(x^2+4)+(x^2+1)}{(x^2+4)(x^2+1)}dx=\int\frac{1}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{x^2+4}dx=$

$$=\text{Arctan}x+\frac{1}{2}\text{Arctan}\frac{x}{2}+c$$

نوع پانزدهم: انتگرالهائی هستند به صورت:

$$\begin{cases} \int \frac{u'dx}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{Arcsin}\,u + c \ \text{یا}\ -\text{Arccos}\,u + c \\ \int \frac{u'dx}{\sqrt{a^2-u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{Arcsin}\frac{u}{a} + c \ \text{یا}\ -\text{Arccos}\frac{u}{a} + c \\ \int \frac{u'}{\sqrt{a^2-b^2u^2}}dx = \int \frac{du}{\sqrt{a^2-b^2u^2}} = \frac{1}{b}\text{Arcsin}\frac{b}{a}u + c \ \text{یا}\ \frac{-1}{b}\text{Arccos}\frac{b}{a}u + c \end{cases}$$

توجه کنید، جواب، $\frac{1}{a}$ ندارد.

مثال:

الف) $\int \frac{2^{x+1}}{\sqrt{1-4^x}}dx = \frac{2}{\text{Ln}2}\int \frac{2^x.\text{Ln}2}{\sqrt{1-(2^x)^2}}dx = \frac{2}{\text{Ln}2}\text{Arcsin}\,2^x + c$

توجه $\rightarrow 4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$

ب) $\int \frac{1+\tan^2 x}{\sqrt{9-7\tan^2 x}}dx = \int \frac{u'}{\sqrt{9-7u^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{7}}\text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\tan x\right) + c$

ج) $\int \frac{7dx}{3(1+x^2)\left(\sqrt{1-(\text{Arctan}x)^2}\right)} = \frac{7}{3}\int \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\sqrt{1-(\text{Arctan}x)^2}}dx$

$\frac{7}{3}\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}dx = \frac{7}{3}\text{Arcsin}(\text{Arctan}x) + c$

د) $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}} = \int \frac{u'dx}{\sqrt{4-u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} = \text{Arcsin}\frac{u}{2} + c = \text{Arcsin}\left(\frac{\sin x}{2}\right) + c$

نوع شانزدهم: انتگرالهائی هستند به صورت:

$$\begin{cases} \int \frac{u'dx}{|u|\sqrt{u^2-1}} = \int \frac{du}{|u|\sqrt{u^2-1}} = \text{Arcsec}\,u + c \ \text{یا}\ -\text{Arccosec}\,u + c \\ \int \frac{u'dx}{|u|\sqrt{u^2-a^2}} = \int \frac{du}{|u|\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\text{Arcsec}\frac{u}{a} + c \ \text{یا}\ -\frac{1}{a}\text{Arccosec}\frac{u}{a} + c \end{cases}$$

مثال: $\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{2}\text{Arcsec}\frac{x}{2} + c$

نوع هفدهم: انتگرالهائی هستند به صورت:

$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx \quad (a\neq 0)$

برای محاسبهٔ چنین انتگرالهائی، سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) اگر مخرج، دو ریشهٔ متمایز داشته باشد (دلتای مخرج مثبت باشد) مخرج کسر را تجزیه کرده و سپس انتگرالگیری می‌کنیم، در این حالت جواب همواره دو تا Ln می‌شود.

مثال: $\int \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)dx$

$= \text{Ln}|x+1| - \text{Ln}|x+2| + c = \text{Ln}\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + c$

ب) اگر مخرج، ریشه‌ی مضاعف داشته باشد (دلتای مخرج صفر باشد) مخرج را به صورت مربع کامل در آورده و سپس انتگرالگیری می‌کنیم.

مثال: $\int \frac{dx}{۹x^۲+۶x+۱} = \frac{۱}{۳}\int \frac{۳dx}{(۳x+۱)^۲} = \frac{۱}{۳}\times\frac{(۳x+۱)^{-۱}}{-۱} + c = \frac{-۱}{۳(۳x+۱)} + c$

ج) اگر مخرج ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد (دلتای مخرج منفی باشد) مخرج را به صورت مجموع دو مربع کامل در آورده و سپس به کمک فرمول $\int \frac{du}{a^۲+u^۲} = \frac{۱}{a}\ \text{Arctan}\frac{u}{a}+c$ انتگرالگیری می‌کنیم.

مثال: الف) $\int \frac{dx}{x^۲+۲x+۵} = \int \frac{dx}{(x+۱)^۲+۴} = \frac{۱}{۲}\text{Arctan}\frac{x+۱}{۲}+c$

ب) $\int \frac{dx}{۲x^۲+۳} = \frac{۱}{۲}\int \frac{dx}{x^۲+(\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}})^۲} = \frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}}\text{Arctan}\frac{x}{\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}}+c = \frac{\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}}\text{Arctan}\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}x+c$

نوع هیجدهم: استفاده از ضرب صورت و مخرج کسر در مزدوج مخرج

مثال:

الف) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{x-۱}} = \int \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-۱}}{x-(x-۱)}dx = \int (\sqrt{x}+\sqrt{x-۱})dx = \frac{۲}{۳}\sqrt{x^۳}+\frac{۲}{۳}\sqrt{(x-۱)^۳}+c$

ب) $\int \frac{x^۳dx}{x^۲-\sqrt{x^۴-۱}} = \int \frac{x^۳(x^۲+\sqrt{x^۴-۱})}{x^۴-(x^۴-۱)}dx = \int x^۵dx+\frac{۱}{۴}\int ۴x^۳\sqrt{x^۴-۱}\,dx = \frac{x^۶}{۶}+\frac{۱}{۴}\int u'\sqrt{u}\,dx$

$= \frac{x^۶}{۶}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{۳}\sqrt{u^۳}+c \quad = \frac{x^۶}{۶}+\frac{۱}{۶}\sqrt{(x^۴-۱)^۳}+c$

نوع نوزدهم: استفاده از تفکیک کردن کسر

مثال:

الف) $\int \frac{x^۳+x^۲+x+۱}{x^۲+x+۱}dx = \int \frac{x(x^۲+x+۱)+۱}{x^۲+x+۱}dx = \int x\,dx+\int\frac{۱}{x^۲+x+۱}dx = \frac{x^۲}{۲}+\int\frac{۱}{(x+\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}}dx$

$= \frac{x^۲}{۲}+\frac{۱}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\text{Arctan}\frac{x+\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}+c \quad = \frac{x^۲}{۲}+\frac{۲}{\sqrt{۳}}\text{Arctan}\frac{۲x+۱}{\sqrt{۳}}+c$

ب) $\int \frac{x+۳}{\sqrt[۳]{x-۱}}dx = \int \frac{x-۱+۴}{(x-۱)^{\frac{۱}{۳}}}dx = \int [(x-۱)^{\frac{۲}{۳}}+۴(x-۱)^{-\frac{۱}{۳}}]dx = \frac{۳}{۵}(x-۱)^{\frac{۵}{۳}}+۶(x-۱)^{\frac{۲}{۳}}+c$

ج) $\int \frac{۲x^۲+۱۰}{(x^۲+۱)(x^۲+۹)}dx = \int \frac{(x^۲+۱)+(x^۲+۹)}{(x^۲+۱)(x^۲+۹)}dx = \int \frac{۱}{x^۲+۹}dx+\int\frac{۱}{x^۲+۱}dx$

$= \frac{۱}{۳}\ \text{Arctan}\frac{x}{۳} + \text{Arctan}x+c$

د) $\int \frac{dx}{x^۴+۵x^۲+۴} = \int\frac{dx}{(x^۲+۱)(x^۲+۴)} = \frac{۱}{۳}\int \frac{(x^۲+۴)-(x^۲+۱)}{(x^۲+۱)(x^۲+۴)}dx =$

$$\frac{1}{3}\left(\int\frac{1}{x^2+1}dx+\int\frac{1}{x^2+4}dx\right)=\frac{1}{3}\text{Arctan}x-\frac{1}{6}\text{Arctan}\frac{x}{2}+c$$

نوع بیستم: محاسبه‌ی انتگرالهای توانهای فرد sin و cos: برای محاسبهٔ انتگرال توانهای فرد sin و cos یعنی: $\int \sin^{2n+1}x dx$ و $\int \cos^{2n+1}x dx$، یک sinx یا یک cosx را کنار گذاشته و بقیه را به کمک فرمولهای $\begin{cases}\sin^2x=1-\cos^2x\\ \cos^2x=1-\sin^2x\end{cases}$ به دیگری تبدیل کرده، به توان رسانده در عامل پشت پرانتز ضرب و سپس به غیر از جمله‌ی اول، انتگرال بقیهٔ جملات را به کمک فرمول $\int u' u^n dx=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$ محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases}\int \sin^{2n+1}x\,dx=\int \sin x.(1-\cos^2x)^n dx\\ \int \cos^{2n+1}x dx=\int \cos x(1-\sin^2x)^n dx\end{cases}$$

مثال: الف) $\int \cos^3x\,dx=\int \cos x(1-\sin^2x)dx=\int \cos x dx-\int\sin^2x\cos x dx=\sin x-\frac{\sin^3x}{3}+c$

ب) $\int \sin^5 3x\,dx=\int\sin 3x(1-\cos^2 3x)^2dx=\int\sin 3x\,dx-2\int\underbrace{\cos^2 3x}\sin 3x+\int\underbrace{\cos^4 3x}\sin 3x dx$

$$=\frac{-1}{3}\cos 3x+\frac{2}{3}\times\frac{\cos^3 3x}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{\cos^5 3x}{5}+c$$

نوع بیست و یکم: انتگرالهای توانهای زوج sin و cos: برای محاسبهٔ چنین انتگرالهائی از فرمولهای طلائی $\begin{cases}\sin^2x=\frac{1-\cos 2x}{2}\\ \cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}\end{cases}$ استفاده می‌کنیم.

مثال: الف) $\int\sin^2x\,dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}(x-\frac{\sin 2x}{2})+c$

ب) $\int\cos^4 5x dx=\int(\cos^2 5x)^2dx=\frac{1}{4}\int(1+\cos 10x)^2dx=\frac{1}{4}\int(1+2\cos 10x+\cos^2 10x)dx$

$$\frac{1}{4}(x+\frac{2\sin 10x}{10})+\frac{1}{8}\int(1+\cos 20x)dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{20}\sin 10x+\frac{1}{8}x+\frac{\sin 20x}{160}+c$$

نوع بیست و دوم: انتگرالهای توانهای زوج tan و cot: برای محاسبهٔ چنین انتگرالهائی یعنی $\int\tan^{2n}x dx$ و $\int \cot^{2n}x\,dx$، کلیهٔ توانهای زوج کمتر از 2n را اضافه و کم و کم و اضافه می‌کنیم و در انتها عدد ثابت ۱ را را نیز کم و اضافه می‌کنیم، سپس با فاکتورگیری از هر دو جملهٔ متوالی، عبارت را به صورت، عبارت قابل انتگرالگیری در آورده و مشابه قاعدهٔ یازدهم، انتگرالگیری می‌کنیم.

الف) $\int \cot^2x dx=\int(\cot^2x+1-1)dx=\int(\cot^2x+1)dx-\int 1\,dx=-\cot x-x+c$

ب) $\int \tan^4 5x dx=\int(\tan^4 5x+\tan^2 5x-\tan^2 5x-1+1)dx$

$$=\int\underbrace{\tan^2 5x}_{u}(\tan^2 5x+1)dx-\int(\tan^2 5x+1)dx+\int dx=\frac{1}{5}\times\frac{\tan^3 5x}{3}-\frac{1}{5}\tan 5x+x+c$$

در این حالت می‌توان از فرمولهای کلی زیر نیز استفاده کرد.

$$\begin{cases} \int \tan^{2n}x\,dx = \dfrac{1}{2n-1}\tan^{2n-1}x - \dfrac{1}{2n-3}\tan^{2n-3}x + \dots \pm \tan x \mp x + c \\ \int \cot^{2n}x\,dx = \dfrac{-1}{2n-1}\cot^{2n-1}x + \dfrac{1}{2n-3}\cot^{2n-3}x - \dots \pm \cot x \pm x + c \end{cases} ,\ (n \in N)$$

مثال:

$$\int \cot^6 x\,dx = \frac{-1}{5}\cot^5 x + \frac{1}{3}\cot^3 x - \cot x - x + c$$

نوع بیست و سوم: محاسبهٔ انتگرالهای توانهای فرد $\tan$ و $\cot$: مشابه توانهای زوج کلیهٔ توانهای فرد کمتر از توان داده شده را اضافه و کم و کم و اضافه نموده و سپس انتگرالگیری می‌کنیم.

مثال:

$$\int \tan^3 x\,dx = \int(\tan^3 x + \tan x - \tan x)\,dx = \int \underbrace{\tan x}_{u}\ (\tan^2 x + 1)\,dx - \int \tan x\,dx$$

$$= \frac{\tan^2 x}{2} + \text{Ln}\,|\cos x| + c$$

یادآوری:

$$\int \tan x\,dx = \int \underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_{u}\,dx = -\int \frac{u'}{u}\,dx = -\text{Ln}\,|\cos x| + c = \text{Ln}\,|\text{cosec}\,x| + c$$

$$\int \cot x\,dx = \int \underbrace{\frac{\cos x}{\sin x}}_{u}\,dx = \int \frac{u'}{u}\,dx = \text{Ln}\,|\sin x| + c = -\text{Ln}\,|\sec x| + c$$

نوع بیست و چهارم: محاسبهٔ انتگرالهائی به صورت:

$$\begin{cases} \int \sin mx \cos nx\,dx \\ \int \sin mx \sin nx\,dx \\ \int \cos mx \cos nx\,dx \end{cases}$$

در اینگونه موارد، ابتدا انتگران را به جمع یا تفریق تبدیل کرده و سپس انتگرالگیری می‌کنیم.

مثال:

$$\int \sin 7x \sin 3x\,dx = -\frac{1}{2}\int(\cos 10x - \cos 4x)\,dx = \frac{-1}{2}\times\frac{\sin 10x}{10} + \frac{1}{2}\times\frac{\sin 4x}{4} + c$$

نوع بیست و پنجم: محاسبهٔ انتگرالهای به صورت $\int \sin^m ax \cos^n ax\,dx \quad (m, n \in N)$

حالت اول: اگر m و n، هر دو و یا حداقل یکی از آنها فرد باشند، به طریقهٔ زیر، ابتدا توان فرد را به صورت یک توان یک و توان زوج نوشته و توان زوج را با استفاده از فرمولهای $\begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$ به دیگری تبدیل کرده و سپس انتگرالگیری می‌کنیم.

$$\int \sin^3 x \cos^6 x\,dx = \int \sin x\,.(1 - \cos^2 x)\cos^6 x\,dx = \int \underbrace{\cos^6 x}_{u} \sin x\,dx - \int \underbrace{\cos^8 x}_{u} \sin x\,dx = -\frac{\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^9 x}{9} + c$$

حالت دوم: اگر m و n هر دو زوج باشند از فرمولهای طلائی استفاده می‌کنیم.

مثال: $\int \sin^2 3x \cos^4 3x\, dx = \int (\frac{1-\cos 6x}{2})(\frac{1+\cos 6x}{2})^2 dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 6x)(1+2\cos 6x+\cos^2 6x)dx$

$= \frac{1}{8}\int (1+2\cos 6x+\cos^2 6x-\cos 6x-2\cos^2 6x-\cos^3 6x)\,dx = ...$

و سپس از انتگرال توابع زوج و فرد cos استفاده می‌کنیم.

نوع بیست و ششم: محاسبهٔ انتگرالهائی به صورت $\int \frac{dx}{\sin^{2n}x}$, $\int \frac{dx}{\cos^{2n}x}$ $(n\in N)$

در محاسبهٔ چنین انتگرالهائی دقت داشته باشید که:

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin^{2n}x} = (\frac{1}{\sin^2 x})^n = (1+\cot^2 x)^n = (1+\cot^2 x)^{n-1}(1+\cot^2 x) \\ \frac{1}{\cos^{2n}x} = (\frac{1}{\cos^2 x})^n = (1+\tan^2 x)^n = (1+\tan^2 x)^{n-1}(1+\tan^2 x) \end{cases}$$

در حالت اول از تغییر متغیر $u = \cot x$ و در حالت دوم از تغییر متغیر $u = \tan x$ استفاده می‌کنیم.

مثال: $\int \frac{1}{\sin^6 x}dx = \int (1+\cot^2 x)^3 dx = \int (1+\underbrace{\cot^2 x}_{u})^2(\underbrace{1+\cot^2 x}_{-u'})dx$

$= -\int (1+u^2)^2 u' dx = -\int (1+2u^2+u^4)du = -u-\frac{2u^3}{3}-\frac{u^5}{5}+c = ...$

نوع بیست و هفتم: محاسبهٔ انتگرالهائی از نوع $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ در حالتی که m و n اعداد صحیح منفی و یا اعداد گویا هستند.

این نوع انتگرالها راه حل کلی ندارند، لذا در اینجا به ذکر این نکته اکتفا می‌کنیم که اگر $m+n$ زوج باشد (m و n گویا یا صحیح، مثبت یا منفی) از تغییر متغیر $u = \tan x$ استفاده می‌کنیم.

مثال: $\int \sqrt{\tan x}\,.\,\mathrm{cosec}^4 x\, dx = \int (\tan x)^{\frac{1}{2}}.(\frac{1}{\sin x})^4 dx = \int \sin^{-\frac{7}{2}}x.\cos^{-\frac{1}{2}}x\, dx$

چون در اینجا $m+n = -\frac{7}{2}-\frac{1}{2} = -4$ زوج است، لذا فرض می‌کنیم: $u = \tan x$ در نتیجه:

$du = (1+\tan^2 x)dx = (1+u^2)dx \Rightarrow dx = \frac{du}{1+u^2}$

$\Rightarrow \int \sqrt{\tan x}.\ \mathrm{cosec}^4 x\, dx = \int \sqrt{u}.(\frac{1+u^2}{u^2})^2 \times \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{\sqrt{u}(1+u^2)}{u^4}du$

$\int u^{-\frac{7}{2}}du + \int u^{-\frac{3}{2}}du = \frac{-2}{5\sqrt{u^5}} - \frac{2}{\sqrt{u}} + c = \frac{-2}{5\sqrt{\tan^5 x}} - \frac{2}{\sqrt{\tan x}} + c$

مثال: $\int \frac{7\sin^8 x}{3\cos^{10}x}dx = \frac{7}{3}\int \frac{\sin^8 x}{\cos^8 x}\times\frac{1}{\cos^2 x}dx = \frac{7}{3}\int \tan^8 x.\frac{1}{\cos^2 x}dx$

$= \frac{7}{3}\int u^8 u' dx = \frac{7}{3}\times\frac{u^9}{9}+c = \frac{7\tan^9 x}{27}+c$

نوع بیست و هشتم: محاسبهٔ انتگرالهای شامل sinx و cosx: برای محاسبهٔ چنین انتگرالهائی از تغییر متغیر $u = \tan\frac{x}{2}$ و

فرمولهای:

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2u}{1+u^2} \\ \cos x = \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \end{cases}$$

$$du = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx \quad \Rightarrow dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

استفاده می‌کنیم.

مثال:

$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{1-\frac{1-u^2}{1+u^2}} = 2\int\frac{du}{2u^2} = \frac{u^{-1}}{-1} + c \quad = \frac{-1}{\tan\frac{x}{2}} + c$$

تذکر: استثنائاً برای محاسبهٔ انتگرالهائی به صورت $\int\frac{dx}{1\pm\sin ax}$, $\int\frac{dx}{1\pm\cos ax}$ می‌توان صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کرد و سپس انتگرالگیری نمود.

مثال:

$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int\frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}dx = \int\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}dx = \int\frac{1}{\sin^2 x}dx - \int\frac{\cos x}{\underbrace{\sin^2 x}_{u}}dx$$

$$= -\cot x - \int\frac{u'}{u^2}dx \quad = -\cot x - \frac{u^{-1}}{-1} + c \quad = -\cot x + \frac{1}{\sin x} + c$$

توجه کنید که این جواب ظاهراً با جواب بدست آمده از روش قبلی یکی نیست اما بسادگی و به کمک فرمولهای مثلثاتی می‌توان دید که این دو جواب یکی هستند.

مثال:

الف) $$\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int\frac{1}{\sin x}dx \quad = \int\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}} = \int\frac{du}{u} = \operatorname{Ln}|u| + c = \operatorname{Ln}\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

ب) $$\int\sec x\,dx = \int\frac{1}{\cos x}dx = \int\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{1-u^2}{1+u^2}} = 2\int\frac{du}{1-u^2} = \frac{2}{2}\int\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)du$$

$$= -\operatorname{Ln}|1-u| + \operatorname{Ln}|1+u| + c = \operatorname{Ln}\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + c = \operatorname{Ln}\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + c = \operatorname{Ln}\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + c$$

تذکر: با توجه به اینکه:

$$\begin{cases} (\sec x + \tan x)' = \sec x\tan x + \sec^2 x = \sec x(\sec x + \tan x) \\ (\operatorname{cosec} x - \cot x)' = -\operatorname{cosec} x\cot x + \operatorname{cosec}^2 x = \operatorname{cosec} x(\operatorname{cosec} x - \cot x) \end{cases}$$

می‌توان $\int\sec x\,dx$ و $\int\operatorname{cosec} x\,dx$ را به صورت زیر نیز محاسبه کرد.

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\tan x + \sec x)}{\underbrace{\tan x + \sec x}_{u}}dx = \int\frac{u'}{u}dx = \operatorname{Ln}|\tan x + \sec x| + c$$

و مشابهاً در مورد $\int \operatorname{cosec} x\,dx$

تذکر: البته دقت داشته باشید که:

$$\begin{cases}(\sec x)' = \sec x.\tan x \\ (\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{cosec} x.\cot x\end{cases} \quad \begin{cases}\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + c \\ \int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + c\end{cases}$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^۲ x}\,dx = \sec x + c$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^۲ x}\,dx = -\operatorname{cosec} x + c$$

نوع بیست و نهم: انتگرالهای شامل $\sin^۲ x$ و $\cos^۲ x$: برای محاسبهٔ این انتگرالها از تغییر متغیر $u = \tan x$ و فرمولهای:

$$\begin{cases}\cos^۲ x = \dfrac{۱}{۱+\tan^۲ x} = \dfrac{۱}{۱+u^۲} \\ \sin^۲ x = ۱-\cos^۲ x = \dfrac{u^۲}{۱+u^۲}\end{cases}$$

$dx = \dfrac{du}{۱+u^۲}$ استفاده می‌کنیم.

مثال:

$$\int \frac{dx}{۳\sin^۲ x + ۲\cos^۲ x} = \int \frac{dx}{۲(\sin^۲ x + \cos^۲ x) + \sin^۲ x} = \int \frac{dx}{۲+\sin^۲ x} = \int \frac{\frac{du}{۱+u^۲}}{۲+\frac{u^۲}{۱+u^۲}}$$

$$= \int \frac{du}{۲+۳u^۲} = \frac{۱}{\sqrt{۶}} \operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{۳}{۲}}\,u + c = \frac{۱}{\sqrt{۶}} \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{۳}{۲}}\tan x\right) + c$$

نوع سی‌ام: محاسبهٔ انتگرالهائی شامل x و $\sqrt{ax^۲+bx+c}$، ابتدا زیر رادیکال را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^۲ + \frac{c}{a} - \frac{b^۲}{۴a^۲}\right]} = \sqrt{at^۲ + c - \frac{b^۲}{۴a}} \qquad ,\left(t = x + \frac{b}{۲a}\right)$$

حالت اول: اگر $a > ۰$ و $c - \dfrac{b^۲}{۴a} > ۰$ باشند، a را مساوی $n^۲$ و $c - \dfrac{b^۲}{۴a}$ را مساوی $m^۲$ می‌گیریم آنگاه رادیکال به صورت $\sqrt{n^۲t^۲+m^۲}$ در می‌آید، سپس تغییر متغیری برابر $t = \dfrac{m}{n}\tan u$ (یا $t = \dfrac{m}{n}\cot u$) در نظر گرفته و انتگرالگیری می‌کنیم.

حالت دوم: اگر $a > ۰$ و $c - \dfrac{b^۲}{۴a} < ۰$ باشند، a را برابر $n^۲$ و $c - \dfrac{b^۲}{۴a}$ را برابر $-m^۲$ اختیار کرده، رادیکال به صورت $\sqrt{n^۲t^۲-m^۲}$ در می‌آید که از تغییر متغیر $\begin{cases}t = \dfrac{m}{n}\sin u \\ t = \dfrac{m}{n}\cos u\end{cases}$ استفاده می‌کنیم.

حالت سوم: اگر $a < ۰$ و $c - \dfrac{b^۲}{۴a} > ۰$ باشند، a را برابر $-n^۲$ و $c - \dfrac{b^۲}{۴a}$ را برابر $m^۲$ اختیار کرده و رادیکال به صورت $\sqrt{m^۲-n^۲t^۲}$ در می‌آید که از تغییر متغیر $t = \dfrac{m}{n}\sec u$ ($t = \dfrac{m}{n}\operatorname{cosec} u$) استفاده می‌کنیم.

در حالت خاص:

الف) برای محاسبهٔ انتگرالهائی شامل $\sqrt{a^۲+x^۲}$ از تغییر متغیر $x = a\tan u$ یا $x = a\cot u$ استفاده می‌کنیم.

ب) برای محاسبهٔ انتگرالهائی شامل $\sqrt{a^۲ - x^۲}$ از تغییر متغیر $x = a\sin u$ یا $x = a\cos u$ استفاده می‌کنیم.

ج) برای محاسبهٔ انتگرالهائی شامل $\sqrt{x^۲ - a^۲}$ از تغییر متغیر $x = a\sec u$ یا $x = a\operatorname{cosec} u$ استفاده می‌کنیم.

مثال: $\int \sqrt{۴ - x^۲}\,dx$

دامنه $۴ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۴ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۲ \Rightarrow -۱ \leq \frac{x}{۲} \leq ۱$

$$\frac{x}{۲} = \sin u \Rightarrow x = ۲\sin u \Rightarrow \begin{cases} u = \operatorname{Arcsin}\frac{x}{۲} \\ dx = ۲\cos u\,du \\ -\frac{\pi}{۲} \leq u \leq \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

$$\int \sqrt{۴ - x^۲}\,dx = \int \sqrt{۴ - ۴\sin^۲ u}\,.\,۲\cos u\,du = ۴\,|\cos u|\cos u\,du = ۴\int \cos^۲ u\,du$$

توجه کنید که $-\frac{\pi}{۲} \leq u \leq \frac{\pi}{۲}$ و در این فاصله (ربعهای اول و چهارم) $\cos u$ مثبت است و لذا:

$$|\cos u| = \cos u$$

$$= ۲\int (۱ + \cos ۲u)\,du = ۲\left(u + \frac{\sin ۲u}{۲}\right) + c = ۲\operatorname{Arcsin}\frac{x}{۲} + \sin ۲\left(\operatorname{Arcsin}\frac{x}{۲}\right) + c$$

مثال: $A = \int \frac{dx}{x^۲\sqrt{۱ + x^۲}}$

$$\begin{cases} x = \tan u \\ dx = (۱ + \tan^۲ u)\,du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \operatorname{Arctan} x \\ dx = \frac{۱}{\cos^۲ u}\,du \end{cases} \Rightarrow A = \int \frac{(۱ + \tan^۲ u)\,du}{\tan^۲ u\sqrt{۱ + \tan^۲ u}}$$

$$\int \frac{\frac{۱}{\cos^۲ u}\,du}{\frac{\sin^۲ u}{\cos^۲ u}\cdot\frac{۱}{\cos u}} = \int \frac{\cos u}{\sin^۲ u}\,du = \int \operatorname{cosec} u\,.\cot u\,du = -\operatorname{cosec} u + c = -\operatorname{cosec}(\operatorname{Arctan} x) + c$$

نوع سی و یکم: انتگرالهای شامل x و $\sqrt[n]{x}$ و $\sqrt[m]{x}$: برای محاسبهٔ چنین انتگرالهائی، x را مساوی u^k اختیار کرده (k، کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م) m و n است) تا انتگرال به صورت انتگرال یک تابع گویا در آید و سپس انتگرالگیری می‌کنیم.

مثال: $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[۴]{x^۳} + ۱}\,dx = \int \frac{\sqrt{u^۴}\,.\,۴u^۳\,du}{\sqrt[۴]{u^{۱۲}} + ۱}, \qquad x = u^۴ \Rightarrow \begin{cases} dx = ۴u^۳\,du \\ u = \sqrt[۴]{x} \end{cases}$

$$= ۴\int \frac{u^۵\,du}{u^۳ + ۱} = ۴\int \frac{u^۵ + u^۲ - u^۲}{u^۳ + ۱}\,du = ۴\int \frac{u^۲(u^۳ + ۱) - u^۲}{u^۳ + ۱}\,du = ۴\int u^۲\,du - \frac{۴}{۳}\int \underbrace{\frac{۳u^۲}{u^۳ + ۱}}_{u}\,du$$

$$= \frac{۴u^۳}{۳} - \frac{۴}{۳}\operatorname{Ln}|u^۳ + ۱| + c = \frac{۴}{۳}\sqrt[۴]{x^۳} - \frac{۴}{۳}\operatorname{Ln}\left(\sqrt[۴]{x^۳} + ۱\right) + c$$

مثال: $\int \frac{\sqrt{x} - ۸}{\sqrt[۳]{x} - ۴}\,dx = \int \frac{u^۳ - ۸}{u^۲ - ۴} \times ۶u^۵\,du\ , \qquad x = u^۶ \Rightarrow \begin{cases} dx = ۶u^۵\,du \\ u = \sqrt[۶]{x} \end{cases}$

$$=\int \frac{(u-۲)(u^۲+۲u+۴)}{(u-۲)(u+۲)}\times ۶u^۵ du = \int\frac{u(u+۲)+۴}{u+۲}\times ۶u^۵du \overset{\text{تفکیک}}{=} \int ۶u^۶ du + ۲۴\int \frac{u^۵}{u+۲} du$$

$$=\frac{۶u^۷}{۷}+۲۴\int\frac{u^۵+۳۲-۳۲}{u+۲}du \overset{\text{تفکیک}}{=} \frac{۶}{۷}u^۷+۲۴\int \frac{(u+۲)(u^۴-۲u^۳+۴u^۲-۸u+۱۶)}{u+۲}du - ۳۲\times ۲۴\int\frac{du}{u+۲}$$

$$=\frac{۶}{۷}u^۷+۲۴(\frac{u^۵}{۵}-\frac{۲u^۴}{۴}+\frac{۴u^۳}{۳}-\frac{۸u^۲}{۲}+۱۶u)-۳۲\times ۲۴ Ln|u+۲|+c$$

$$=\frac{۶}{۷}\sqrt[۶]{x^۷}+۲۴(\frac{\sqrt[۶]{x^۵}}{۵}-\frac{\sqrt[۶]{x^۴}}{۲}+\frac{۴\sqrt[۶]{x^۳}}{۳}-۴\sqrt[۶]{x^۲}+۱۶\sqrt[۶]{x})-۷۶۸Ln(\sqrt[۶]{x}+۲)+c$$

نوع سی و دوم: (انتگرال توابع نمائی):

$$\begin{cases}\int e^x dx = e^x + c\\ \int e^{kx}dx=\frac{۱}{k}e^{kx}+c\\ \int u' e^u dx=\int e^u du = e^u + c\end{cases}$$

الف) $\int e^{۷x}dx=\frac{۱}{۷}e^{۷x}+c$

ب) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = ۲\int \frac{۱}{۲\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx = ۲\int u' e^u dx = ۲e^u + c = ۲e^{\sqrt{x}}+c$

نوع سی و سوم: انتگرال توابع توان (توابع مجهول القوا):

$$\begin{cases}\int a^x.Lna dx = a^x + c\\ \int a^x dx=\frac{۱}{Lna}a^x+c\\ \int a^{kx}dx=\frac{۱}{kLna}a^{kx}+c\\ \int u'.a^u.Lnadx = a^u + c\end{cases}$$

مثال: الف) $\int ۲^{۳x+۱}dx=\frac{۱}{۳Ln۲}.۲^{۳x+۱}+c$

ب) $\int e^x.۱۰^{e^x}dx=\int u'.۱۰^u dx = \frac{۱۰^u}{Ln۱۰}+c=\frac{۱۰^{e^x}}{Ln۱۰}+c$

ج) $\int \frac{۵^{Arccot ۲x}}{۱+۴x^۲}dx = -\frac{۱}{۲}\int \frac{-۲}{۱+(۲x)^۲}\times ۵^{Arccot ۲x}dx = -\frac{۱}{۲}\int u' ۵^u dx$

$$=\frac{-۱}{۲Ln۵}.۵^u + c = \frac{-۱}{۲Ln۵}۵^{Arccot ۲x}+c$$

نوع سی و چهارم: استفاده از فرمولهای مثلثاتی در محاسبهٔ برخی از انتگرالهای مثلثاتی:

مثال: الف) $\int (\sin^6 x+\cos^6 x)\,dx=\int (1-\frac{3}{4}\sin^2 2x)\,dx=x-\frac{3}{8}\int(1-\cos 4x)dx=x-\frac{3}{8}(x-\frac{\sin 4x}{4})+c$

ب) $\int(4\cos^3 5x-3\cos 5x)dx=\int \cos 3(5x)dx=\frac{1}{15}\sin 15x+c$

ج) $\int \frac{dx}{\sin^2 x.\cos^2 x}=\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx=\int \frac{1}{\cos^2 x}dx+\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=\tan x-\cot x+c$

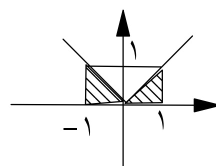
نوع سی و پنجم: انتگرال توابع قدر مطلقی:

برای محاسبهٔ چنین انتگرالهائی، عبارات داخل قدر مطلقها را تعیین علامت کرده و با توجه به علامت هر عبارت، حدود انتگرالگیری را تفکیک نموده، قدر مطلقها را برداشته و سپس انتگرالگیری می‌کنیم.

مثال: راه اول: الف) $\int_{-1}^{1}|x|dx=\int_{-1}^{0}-x\,dx+\int_{0}^{1}x\,dx=\frac{-x^2}{2}\Big]_{-1}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big]_{0}^{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

راه دوم: $\int_{-1}^{1}|x|dx=2\int_{0}^{1}x\,dx=x^2\Big]_{0}^{1}=1$

راه سوم: (با استفاده از شکل) $\int_{-1}^{1}|x|dx=s_1+s_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$



ب) $\int_{1}^{2}(|x-1|+|x-2|dx=\int_{1}^{2}(x-1+2-x)dx=\int_{1}^{2}dx=1(2-1)=1$

ج) $\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|dx=2\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=-2\cos x\Big]_{0}^{\pi}=4$

هـ) $\int_{1}^{3}|x^2-2x|=-\int_{1}^{2}(x^2-2x)dx+\int_{2}^{3}(x^2-2x)dx$

$=-\frac{x^3}{3}+x^2\Big]_{1}^{2}+\frac{x^3}{3}-x^2\Big]_{2}^{3}=\left[(-\frac{8}{3}+4)-(-\frac{1}{3}+1)\right]+\left[(9-9)-(\frac{8}{3}-4)\right]=2$

نوع سی و ششم: انتگرال توابع جزء صحیحی:

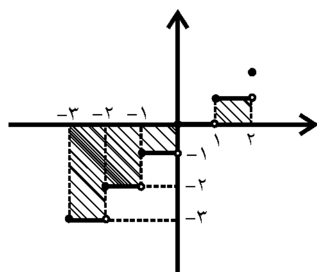
مشابه انتگرال توابع قدر مطلقی، حدود انتگرالگیری را به گونه‌ای تفکیک نموده تا مقدار عبارات داخل جزء صحیح، محاسبه و سپس انتگرالگیری نمائیم.

مثال: الف) $\int_{-3}^{2}[x]dx=\int_{-3}^{-2}-3dx+\int_{-2}^{-1}-2dx+\int_{-1}^{0}-1dx+\int_{0}^{1}0dx+\int_{1}^{2}1dx$

$=-3(-2+3)-2(-1+2)-1(0+1)+0+(2-1)=-5$

روش دوم (با استفاده از شکل):

$\int_{-3}^{2}\lfloor x\rfloor\,dx=-S_1+S_2=-6+1=-5$



یادآوری: $\int_a^b 0\,dx=0\quad,\int_a^b K\,dx=K(b-a)$

ب) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \frac{dx}{x^3} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{-3}dx = \frac{-1}{2x^2} \Big]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{-1}{2}(1-4) = \frac{3}{2} \quad , \quad \frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{x} < 2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$

ج) $\int_{2}^{17} \lfloor \sqrt{x} \rfloor \, dx = \int_{2}^{4} dx + \int_{4}^{9} 2dx + \int_{9}^{16} 3dx + \int_{16}^{17} 4dx$

$= 1(4-2) + 2(9-4) + 3(16-9) + 4(17-16) = 2 + 10 + 21 + 4 = 37$

د) $\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \lfloor 2x \rfloor \, |x-1| dx = -\int_{-\frac{1}{2}}^{1} \lfloor 2x \rfloor \, (x-1)\,dx \quad , -\frac{1}{2} < x < 1 \Rightarrow x-1 < 0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1)$

$= -\left[\int_{-\frac{1}{2}}^{0} (-1)(x-1)\,dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}} 0(x-1)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1)(x-1)\,dx \right] = \frac{x^2}{2} - x \Big]_{-\frac{1}{2}}^{0} + 0 + \frac{x^2}{2} - x \Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$

$= \left[(0-0) - (\frac{1}{8} + \frac{1}{2})\right] + \left[(\frac{1}{2} - 1) - (\frac{1}{8} - \frac{1}{2})\right] = -\frac{5}{8} - \frac{1}{8} = -\frac{3}{4}$

هـ) $\int_{-2}^{4} \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor dx = \int_{-2}^{0} (-1)dx + \int_{0}^{2} 0dx + \int_{2}^{4} 1dx = (-1)(0+2) + 0 + 1(4-2) = 0$

توجه کنید که در این قسمت، قدر مطلق تعیین علامت و جزء صحیح تعیین مقدار شده است.

انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به جزء: در این قسمت با روشی برای محاسبهٔ انتگرالهای نامعین آشنا می‌شویم که به کمک آن می‌توان بسیاری از انتگرالهائی را که به کمک روشها و فرمولهای گفته شده، قابل محاسبه نیستند، محاسبه کرد. از این روش می‌توان برای محاسبهٔ انتگرال توابع معکوس مثلثاتی، انتگرال لگاریتم طبیعی و بخصوص انتگرالهائی که در آنها انتگران به صورت حاصلضرب یک تابع جبری و یک تابع مثلثاتی یا تابع لگاریتمی یا تابع نمائی و ... مانند: $\int x \sin x\,dx$ ، $\int (x^2+1)\,Lnx\,dx$ ، $\int (x-1)e^x\,dx$ می‌باشند، استفاده کرد.

اگر u و v توابعی مشتق‌پذیر از x باشند، از بخش دیفرانسیل می‌دانیم: $d(uv) = udv - vdu$

از طرفین انتگرال می‌گیریم. $\Rightarrow uv = \int udv - \int vdu$

دستور انتگرالگیری به طریقهٔ جزء به جزء $\boxed{\int udv = uv - \int v\,du}$

اساس کار این فرمول به این ترتیب است که یک انتگرال نسبتاً مشکل داده شده را به انتگرال دیگری که ساده‌تر است تبدیل می‌کند، البته به شرط آنکه u و dv به طور مناسب انتخاب شوند، اگر u و dv به طور مناسب انتخاب نشوند، انتگرال داده شده به انتگرال مشکلتری تبدیل می‌شود، بنابراین در انتخاب u و dv لازم است که به نکات زیر توجه کنید:

۱ـ u را بخشی از تابع تحت علامت انتگرال (انتگران) می‌گیریم که مشتقش ساده‌تر از v است در این صورت dv را بخش باقی‌ماندهٔ انتگرال اختیار می‌کنیم.

۲ـ dv را به گونه‌ای اختیار می‌کنیم که انتگرال $\int udv$ با یکی از فرمولهای اساسی انتگرال قابل محاسبه باشد. دقت کنید که در انتخاب u و dv و dx همیشه جزء dv است.

مثال: $\int Arctanx\,dx$ **را حساب کنید؟**

حل: از بخش مشتق می‌دانیم: $(x\,Arctanx - Ln\sqrt{1+x^2} + c)' = Arctanx$

لذا: $\int Arctanx\,dx = x\,Arctanx - Ln\sqrt{1+x^2} + c$

اکنون از روش جزء به جزء به همین جواب می‌رسیم.

$$\begin{cases} u = Arctanx \\ dv = dx \end{cases} \xrightarrow[\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}]{\text{از طرفین دیفرانسیل می‌گیریم}} \begin{cases} du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow \int \underbrace{Arctanx}_{u}\ \underbrace{dx}_{dv} = \int udv = uv - \int vdu$$

$$= x\,Arctanx - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\,Arctanx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx = x\,Arctanx - \frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}dx$$

$$= x\,Arctanx - \frac{1}{2}Ln(1+x^2) + c = x\,Arctanx - Ln\sqrt{1+x^2} + c$$

نکته‌ی بسیار بسیار مهم: هرگاه $y = f(x)$ تابعی یک به یک باشد و $G(x)$ یک تابع اولیه‌ی $f^{-1}(x)$ باشد، آنگاه

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - G(f(x)) + c$$

مثال ۱: $\int Arctanx\,dx = x\,Arctanx - Ln|cos(Arctanx)| + c = x\,Arctanx - Ln\sqrt{1+x^2} + c$

یادآوری: $G(x) = \int f^{-1}(x)dx = \int tanx\,dx = Ln|cosx|$, $cos(Arctanx) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

مثال ۲: $\int Lnx\,dx = x\,Lnx - e^{lnx} + c = x\,Lnx - x + c$, $G(x) = \int f^{-1}(x)\,dx = \int e^x dx = e^x$

نکته: در برخی از مسأئل لازم است چندین بار از روش جزء به جزء استفاده کرد.

مثال: $\int x^2e^x dx =$

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \xrightarrow[\text{از طرفین انتگرال می‌گیریم}]{\text{از طرفین دیفرانسیل می‌گیریم}} \begin{cases} du = 2x\,dx \\ V = e^x \end{cases} \Rightarrow \int \underbrace{x^2}_{u}\ \underbrace{e^x dx}_{dv} = \int udv = uv - \int vdu$$

$$= x^2e^x - 2\int \underbrace{x}_{u}\ \underbrace{e^x dx}_{dv} = x^2e^x - 2(uv - \int vdu) \quad , \quad \begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$= x^2e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

نکته: $\int e^x f(x)\,dx = e^x f(x) - \int e^x f'(x)dx$ یا $\int e^x (f(x) + f'(x))\,dx = e^x f(x) + c$

اثبات: $\int e^x f(x)\,dx = uv - \int vdu = e^x f(x) - \int e^x f'(x)\,dx$, $\begin{cases} u = f(x) \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ V = e^x \end{cases}$

مثال: مطلوبست محاسبه‌ی $\int e^x \left(\frac{x+1}{(x+2)^2}\right)dx$

$$\int e^x\left(\frac{x+1}{(x+2)^2}\right)dx=\int e^x\left(\frac{x+2-1}{(x+2)^2}\right)dx=\int e^x\left(\underbrace{\frac{1}{x+2}}_{f(x)}+\underbrace{\frac{-1}{(x+2)^2}}_{f'(x)}\right)dx \underset{\text{طبق نکته‌ی قبل}}{=} e^x f(x)+c=\frac{1}{x+2}e^x+c$$

نکته: انتگرالهای زیر، همگی از روش جزء به جزء قابل حل‌اند.

$$\int \text{Arcsin}x\,dx \quad , \quad \int \text{Arccos}x\,dx \quad , \quad \int \text{Arctan}x\,dx \quad , \quad \int \text{Arccot}x\,dx$$

$$\int x\,\text{Arcsin}x\,dx \quad , \quad \int x^2\text{Arccos}x\,dx \quad , \quad \int x^3\text{Arctan}x\,dx \quad , \quad \int x\,\text{Arccot}x\,dx, \quad ...$$

$$\int x^3\sin x\,dx \quad , \quad \int x\cos x\,dx \quad , \quad \int x\tan x\,dx \quad , \quad \int x^2\cot x\,dx\ , \quad ...$$

$$\int \text{Ln}x\,dx \quad , \quad \int x\,\text{Ln}x\,dx \quad , \quad \int x^2\,\text{Ln}x\,dx \quad , \quad \int xe^x\,dx \quad , \quad \int x^2e^x\,dx \quad , \quad ...$$

انتگرال توابع گویا و تجزیهٔ کسرها:

یادآوری می‌کنیم که یک تابع گویا، تابعی است کسری که صورت و مخرجش دو چند جمله‌ای باشند مانند:

$$\frac{2x}{x^2+1}\ ,\ \frac{7}{x^2-9}\ ,\ \frac{x^3}{x^2+x+2}\ ,\ \frac{x^4+3}{x(x+1)^2}$$

برای محاسبهٔ انتگرال چنین توابعی به صورت زیر عمل می‌کنیم.

اگر درجهٔ صورت، بیشتر از درجه‌ی مخرج باشد، صورت را بر مخرج تقسیم کرده بعد از تقسیم، یک چند جمله‌ای و یک تابع گویای دیگر بدست می‌آید که درجه‌ی صورت این تابع بدست آمده از درجه‌ی مخرجش کمتر است. $\int \frac{p(x)}{Q(x)}\ dx$

$$\begin{array}{l|l} p(x) & Q(x) \\ \hline & b(x) \\ R(x) & \end{array}$$

امتحان عمل تقسیم $\Rightarrow p(x) = b(x)Q(x) + R(x)$

$Q(x)$ تقسیم بر $\frac{P(x)}{Q(x)} = b(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\ , (\deg R(x) < \deg Q(x))$

لذا می‌توانیم توجه خود را به انتگرال توابع گویائی که درجهٔ صورتشان از درجهٔ مخرجشان کمتر است معطوف کنیم و فقط چنین انتگرالهائی را بررسی کنیم.

چنین توابعی به یکی از صورتهای زیر می‌باشند.

۱) مخرج کسر، حاصل ضرب چند عامل درجهٔ اول است. در این حالت کسر را تجزیه کرده و سپس انتگرالگیری می‌کنیم به ازاء هر عامل $ax + b$ در مخرج، یک عبارت به صورت $\frac{A}{ax+b}$ قرار می‌دهیم.

مثال:

$$\int\frac{dx}{x^2+3x+2}=\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)}=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}\right)dx$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$ طرفین ضربدر $x^2+3x+2 \Rightarrow$

A و B عدد حقیقی هستند و بایستی طوری بدست آیند که تساوی فوق برقرار باشد.

$$(*)\ 1 = A(x+2) + B(x+1) \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

برای محاسبهٔ A و B می‌توان به صورت زیر نیز عمل کرد. در رابطهٔ (*) یک بار به جای $x = -1$ قرار داده تا A بدست آید و بار دیگر به جای $x = -2$ قرار داده تا B بدست آید.

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2+3x+2} = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = Ln|x+1| - Ln|x+2| + c = Ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + c$$

مثال: $\int \frac{dx}{x^3-x} = \int \frac{dx}{x(x-1)(x+1)}$, $\frac{1}{x^3-x} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{c}{x+1}$

$$\overset{\times(x^3-x)}{\Rightarrow} A(x^2+x) + B(x^2-1) + c(x^2-x) = 1$$

$$(A+B+C)x^2 + (A-C)x - B = 0x^2 + 0x + 1 \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=0 \\ A-C=0 \\ -B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^3-x} = \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1} dx + \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1} dx = \frac{1}{2} Ln|x-1| - Ln|x| + \frac{1}{2}|x+1| + c$$

مثال: ثابت کنید. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2} Ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \times \frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) \Rightarrow \int \frac{d}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} Ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

۲) مخرج کسر شامل عبارتی به صورت $(x-a)^n$ است. برای محاسبهٔ چنین انتگرال‌هائی به ازاء هر عبارت به صورت $(x-a)^n$ که در مخرج قرار دارد عبارتی به صورت $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$ قرار می‌دهیم، سپس A_iها را محاسبه و انتگرالگیری می‌کنیم.

مثال: $\int \frac{x^2+2}{x(x+1)^2} dx$

$$\frac{x^2+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \Rightarrow x^2+2 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

برای محاسبهٔ A و B و C، در این تساوی سه مقدار به جای x قرار می‌دهیم ۰ و ۱- را حتماً قرار می‌دهیم زیرا با قرار دادن ۰ و ۱- به جای x، بعضی از جملات صفر شده و لذا حذف می‌شوند، برای محاسبهٔ مقدار سوم، هر عددی مثلاً ۱ را می‌توان به جای x قرار داد.

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow A=2 \\ x=-1 \Rightarrow 3=-C \Rightarrow C=-3 \\ x=1 \Rightarrow 3=4A+2B+C \Rightarrow 8+2B-3=3 \Rightarrow B=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2+2}{x(x+1)^2}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{-1}{x+1}dx + \int \frac{-3}{(x+1)^2}dx = 2\mathrm{Ln}\,|x| - \mathrm{Ln}\,|x+1| + \frac{3}{x+1} + c$$

۳ـ مخرج کسر، شامل عبارت درجهٔ دومی است که تجزیه نمی‌شود، به ازاء هر عبارت درجهٔ دوم مانند ax^2+bx+c که تجزیه نمی‌شود، یک عبارت به صورت $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ قرار داده، ضرائب را محاسبه و سپس انتگرالگیری می‌کنیم.

مثال: $\int \frac{(x-1)dx}{x^3+2x} = \int \frac{(x-1)dx}{x(x^2+2)}$

$$\frac{x-1}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{x^2+2} \xRightarrow{\text{طرفین ضرب در } x^3+2x} A(x^2+2) + x(Bx+c) = x-1 \Rightarrow (A+B)x^2 + cx + 2A = 0x^2 + 1x - 1$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=1 \\ 2A=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \\ C=1 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{(x-1)dx}{x^3+2x} = \int \frac{-\frac{1}{2}}{x}dx + \int \frac{\frac{1}{2}x+1}{x^2+2} = -\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,|x| + \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+2}dx + \int \frac{1}{x^2+2}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\,|x| + \frac{1}{4}\mathrm{Ln}(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\frac{x}{\sqrt{2}} + c$$

۴ـ مخرج کسر شامل عبارتی به صورت $(ax^2+bx+c)^n$ است که ax^2+bx+c تجزیه نمی‌شود.

برای هر عبارت به صورت فوق، عبارتی به صورت $\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$ قرار داده، ضرائب را محاسبه و سپس انتگرالگیری می‌کنیم.

مثال: $\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx$

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} \xRightarrow{\text{طرفین ضرب در } (x^2+1)^2} 2x^2+3 = (Ax+B)(x^2+1) + (cx+D)$$

حال به جای x چهار مقدار اختیاری قرار می‌دهیم.

$$\begin{matrix} x=0 \Rightarrow \\ x=1 \Rightarrow \\ x=-2 \Rightarrow \\ x=3 \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} D+B=3 \\ C+D+2A+2B=5 \\ -2C+D-10A+5B=11 \\ 3C+D+30A+10B=21 \end{cases} \xRightarrow{\text{از حل دستگاه}} \begin{cases} A=0 \\ B=2 \\ C=0 \\ D=1 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{2}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

راه حل دوم تجزیه: $\frac{2(x^2+1)+1}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2}$

با فرض $x = \tan\theta$

$$= 2\mathrm{Arctan}x + \int \frac{(1+\tan^2\theta)d\theta}{(1+\tan^2\theta)^2} = 2\mathrm{Arctan}x + \int \cos^2\theta\, d\theta = 2\mathrm{Arctan}x + \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta)d\theta$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$$= 2\text{Arctan}x + \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + c = 2\text{Arctan}x + \frac{1}{2}\text{Arctan}x + \frac{1}{4}\sin 2(\underbrace{\text{Arctan}x}_{\alpha}) + c$$

$$= \frac{5}{2}\text{Arctan}x + \frac{1}{4}\sin 2\alpha + c = \frac{5}{2}\text{Arctan}x + \frac{1}{4}\cdot\frac{2\tan(\text{Arctan}x)}{1+\tan^2(\text{Arctan}x)} + c = \frac{5}{2}\text{Arctan}x + \frac{x}{2(1+x^2)} + c$$

فرمولهای انتگرال نامعین:

۱) $\int dx = x + c$

۲) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad ,(n \neq -1)$

۳) $\int u^n u'\,dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad ,(n \neq -1)$

۴) $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + c \quad ,(n \neq -1)$

۵) $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \text{Ln}\,|x| + c$

۶) $\int u^{-1}u'dx = \int \frac{du}{u} = \text{Ln}\,|u| + c$

۷) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

۸) $\int \sin kx\,dx = \frac{-1}{k}\cos kx + c$

۹) $\int u'\sin u\,dx = \int \sin u\,du = -\cos u + c$

۱۰) $\int \cos x\,dx = -\sin x + c$

۱۱) $\int \cos kx\,dx = \frac{1}{k}\sin kx + c$

۱۲) $\int u'\cos u\,dx = \int \cos u\,du = \sin u + c$

۱۳) $\int (1+\tan^2 x)\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

۱۴) $\int (1+\cot^2 x)\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int \text{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$

۱۵) $\int \tan ax\,dx = \frac{-1}{a}\text{Ln}\,|\cos ax| + c$

۱۶) $\int \cot ax\,dx = \frac{1}{a}\text{Ln}\,|\sin ax| + c$

۱۷) $\int \sec x \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos^{۲} x} dx = \sec x + c$

۱۸) $\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin^{۲} x} dx = -\operatorname{cosec} x + c$

۱۹) $\int \sec x\, dx = \int \frac{۱}{\cos x} dx = \operatorname{Ln} |\tan x + \sec x| + c$ یا $\operatorname{Ln}|\tan(\frac{x}{۲} + \frac{\pi}{۴})| + c$

۲۰) $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \int \frac{۱}{\sin x} dx = -\operatorname{Ln} |\operatorname{cosec} x + \cot x| + c$ یا $\operatorname{Ln}|\tan\frac{x}{۲}| + c$

۲۱) $\int \sin^{۲} x\, dx = \frac{۱}{۲} \int (۱ - \cos ۲x)\, dx = \frac{۱}{۲} (x - \frac{\sin ۲x}{۲}) + c$

۲۲) $\int \cos^{۲} x\, dx = \frac{۱}{۲} \int (۱ + \cos ۲x)\, dx = \frac{۱}{۲} (x + \frac{\sin ۲x}{۲}) + c$

۲۳) $\int \tan^{۲} x\, dx = \int (۱ + \tan^{۲} x - ۱)\, dx = \tan x - x + c$

۲۴) $\int \cot^{۲} x\, dx = \int (۱ + \cot^{۲} x - ۱)\, dx = -\cot x - x + c$

۲۵) $\int e^{x}\, dx = e^{x} + c$

۲۶) $\int e^{kx}\, dx = \frac{۱}{k} e^{kx} + c$

۲۷) $\int \frac{۱}{۲\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c$

۲۸) $\int \frac{u'}{\sqrt{۱ - u^{۲}}} dx = \int \frac{du}{\sqrt{۱ - u^{۲}}} = \operatorname{Arcsin} u + c$

۲۹) $\int \frac{u'}{\sqrt{a^{۲} - u^{۲}}} dx = \int \frac{du}{\sqrt{a^{۲} - u^{۲}}} = \operatorname{Arcsin} \frac{u}{a} + c$

۳۰) $\int \frac{u'}{\sqrt{a^{۲} - b^{۲}u^{۲}}} dx = \int \frac{du}{\sqrt{a^{۲} - b^{۲}u^{۲}}} = \frac{۱}{b} \operatorname{Arcsin} \frac{b}{a} u + c$

۳۱) $\int \frac{u'}{۱ + u^{۲}} dx = \int \frac{du}{۱ + u^{۲}} = \operatorname{Arctan} u + c$

۳۲) $\int \frac{u'}{a^{۲} + u^{۲}} dx = \int \frac{du}{a^{۲} + u^{۲}} = \frac{۱}{a} \operatorname{Arctan} \frac{u}{a} + c$

۳۳) $\int \frac{u'}{a^{۲} + b^{۲}u^{۲}} dx = \int \frac{du}{a^{۲} + b^{۲}u^{۲}} = \frac{۱}{ab} \operatorname{Arctan} \frac{b}{a} u + c$

۳۴) $\int \frac{dx}{(x - a)(x - b)} = \frac{۱}{a - b} \operatorname{Ln} \left| \frac{x - a}{x - b} \right| + c$

۳۵) $\int \frac{dx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{-1}{ad-bc} \operatorname{Ln} \left| \frac{cx+d}{ax+b} \right| + c$

۳۶) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \operatorname{Ln} \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$

۳۷) $\int \frac{x\,dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} |x^2-a^2| + c$

۳۸) $\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)} = \frac{1}{2a^2} \operatorname{Ln} \left| \frac{x^2-a^2}{x^2} \right| + c$

۳۹) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a} + c$

۴۰) $\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln}(x^2+a^2) + c$

۴۱) $\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)} = \frac{1}{2a^2} \operatorname{Ln}\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right) + c$

۴۲) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{Ln}(x+\sqrt{x^2+a^2}) + c$

۴۳) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} + c$

۴۴) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{-1}{a} \operatorname{Ln}\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right) + c$

۴۵) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{Ln} |x+\sqrt{x^2-a^2}| + c$

۴۶) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2} + c$

۴۷) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{Arcsec} \left| \frac{x}{a} \right| + c$

۴۸) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Arcsin}\frac{x}{a} + c$ ($x = a\sin t$ تغییر متغیر)

۴۹) $\int \sqrt{x^2-a^2} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{Ln}(x+\sqrt{x^2-a^2}) + c$, ($x = a\sec t$ تغییر متغیر)

۵۰) $\int \sqrt{x^2+a^2} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Ln}(x+\sqrt{x^2+a^2}) + c$, ($x = a\tan t$ تغییر متغیر)

۵۱) $\int \frac{dx}{1+\sin ax} = \frac{-1}{a} \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + c$

۵۲) $\int \frac{dx}{1-\sin ax} = \frac{1}{a}\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2})+c$

۵۳) $\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2}+c$

۵۴) $\int \frac{dx}{1-\cos ax} = \frac{-1}{a}\cot\frac{ax}{2}+c$

۵۵) $\int \frac{dx}{\sin ax \pm \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\mathrm{Ln}\tan(\frac{ax}{2}\pm\frac{\pi}{8})+c$

۵۶) $\int \sec x \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx = \sec x + c$

۵۷) $\int \mathrm{cosec}\, x \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = -\mathrm{cosec}\, x + c$

۵۸) $\int \sec x dx = \frac{1}{a}\mathrm{Ln}\,|\sec ax + \tan ax| + c$ یا $\frac{1}{a}\mathrm{Ln}\tan|(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}| + c$

۵۹) $\int \mathrm{cosec}\, ax\, dx = \frac{1}{a}\mathrm{Ln}\,|\mathrm{cosec}\, ax - \cot ax| + c$ یا $\frac{1}{a}\mathrm{Ln}\,|\tan\frac{ax}{2}| + c$

۶۰) $\int \mathrm{Arcsin}\frac{x}{a}dx = x\,\mathrm{Arcsin}\frac{x}{a}+\sqrt{a^2-x^2}+c$

۶۱) $\int \mathrm{Arccos}\frac{x}{a}dx = x\,\mathrm{Arccos}\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+c$

۶۲) $\int \mathrm{Arctan}\frac{x}{a}dx = x\,\mathrm{Arctan}\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\mathrm{Ln}(x^2+a^2)+c$

۶۳) $\int \mathrm{Arccot}\frac{x}{a}dx = x\,\mathrm{Arccot}\frac{x}{a}+\frac{a}{2}\mathrm{Ln}(x^2+a^2)+c$

۶۴) $\int \mathrm{Arcsec}\frac{x}{a}dx = \begin{cases} x\mathrm{Arcsec}\frac{x}{a} - a\mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^2-a^2})+c & ,(0<\mathrm{Arcsec}\frac{x}{a}<\frac{\pi}{2}) \\ x\mathrm{Arcsec}\frac{x}{a} + a\mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^2-a^2})+c & ,(\frac{\pi}{2}<\mathrm{Arcsec}\frac{x}{a}<\pi) \end{cases}$

۶۵) $\int \mathrm{Arccosec}\frac{x}{a}dx = \begin{cases} x\,\mathrm{Arccosec}\frac{x}{a} + a\mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^2-a^2})+c & ,(0<\mathrm{Arccosec}\frac{x}{a}<\frac{\pi}{2}) \\ x\,\mathrm{Arccosec}\frac{x}{a} - a\mathrm{Ln}(x+\sqrt{x^2-a^2})+c & ,(-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Arccosec}\frac{x}{a}<0) \end{cases}$

۶۶) $\int \mathrm{Ln}\,x\,dx = x\,\mathrm{Ln}\,x - x + c$

۶۷) $\int \mathrm{Ln}\,ax\,dx = x\,\mathrm{Ln}\,ax - x + c$

۶۸) $\int \frac{Lnx}{x}dx = \frac{۱}{۲}(Lnx)^{۲} + c$

۶۹) $\int \frac{(Lnx)^{n}}{x}dx = \frac{۱}{n+۱}(Lnx)^{n+۱} + c$

۷۰) $\int \frac{dx}{x\,Lnx} = Ln\,|Lnx| + c$

تمرین: انتگرالهای زیر را حساب کنید؟

۱) $\int \frac{۱}{x^{۲}}\sqrt{\frac{x}{x-۱}}\,dx$

۲) $\int ۸x^{۲}(۲x-۱)^{۵۰}dx$

۳) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[۳]{۱+x\sqrt{x}}}$

۴) $\int \frac{cosx}{\sqrt[۵]{sinx}}dx$

۵) $\int \frac{dx}{\sqrt{۱-x^{۲}}(Arcsinx)^{۲}}$

۶) $\int \frac{dx}{(۱+x^{۲})\sqrt{۱-(Arctanx)^{۲}}}$

۷) $\int x\sin^{۲}x^{۲}dx$

۸) $\int \cos\frac{x}{۲}\sqrt{۱+cosx}\,dx$

۹) $\int \sin۲x(\cos^{۴}x-\sin^{۴}x)dx$

۱۰) $\int \frac{dx}{۵+۳x^{۲}}$

۱۱) $\int \frac{dx}{\sqrt{۴x-x^{۲}}}$

۱۲) $\int (\sin^{۶}x+\cos^{۶}x)dx$

۱۳) $\int (tanx-cotx)\sqrt{tanx+cotx}\,dx$

۱۴) $\int \cos۴x\cos۷x\,dx$

۱۵) $\int \sin^{۳}x\,d(sinx)$

۱۶) $\int Lnx\,d(Lnx)$

۱۷) $\int \frac{x^{۵}+x^{۳}+x^{۲}+۱}{x^{۲}+۱}dx$

۱۸) $\int x(x^{۳}+۳x^{۲})^{۱۷}(x+۲)dx$

۱۹) $\int x^{۲n}(x^{۳}+۲x)(x^{۲}+۴)^{n}dx$

۲۰) $\int x^{۲}\sqrt{۱-x^{۲}}\,dx$

۲۱) $\int \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$

۲۲) $\int \frac{\sin۲x}{۱+\sin^{۴}x}dx$

۲۳) $\int \frac{dx}{۱+\sqrt{x}}$

۲۴) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}}$

۲۵) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sin^{۲}(x\sqrt{x})}dx$

۲۶) $\int \frac{dx}{x^{۲}\cos^{۲}(\frac{۱}{x})}$

۲۷) $\int \frac{dx}{\cos^{۲}x\sqrt{۱+tanx}}$

۲۸) $\int \frac{x^{۷}}{(x^{۴}-۱)^{۲}}dx$

۲۹) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

۳۰) $\int x10^{x^2+1}dx$

۳۱) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$

۳۲) $\int \frac{e^{2x}}{e^x+3}dx$

۳۳) $\int \frac{x^2}{x^2-9}dx$

۳۴) $\int \frac{x^2+3x-5}{(x-2)^4}dx$

۳۵) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$

محاسبه‌ی برخی حدود به کمک تعریف انتگرال معین:

در این روش، برخی از حدود را که معمولاً از روشهای قبلی (تجزیه، هم ارزی، هوپیتال و ...) یا قابل حل نبوده و یا مشکل می‌باشند، با استفاده از تعریف انتگرال معین، به یک انتگرال معین آسان تبدیل نموده و سپس مقدار انتگرال به دست آمده را حساب کرده تا مقدار حد به دست آید.

برای این منظور ابتدا یادآوری می‌کنیم که هرگاه f بر [a,b] انتگرالپذیر باشد آنگاه داریم:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n}f(x_i)=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f[a+\frac{i(b-a)}{n}]$$

اکنون دو حالت ساده‌تر این تعریف را که معمولاً کارآیی بیشتری در محاسبه‌ی حدود دارند، بیان می‌کنیم.

الف) هرگاه $a=0$ باشد، آنگاه داریم:

$$\int_0^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{bi}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}[f(\frac{b}{n})+f(\frac{2b}{n})+...+f(\frac{nb}{n})]$$

ب) هرگاه $a=0$ و $b=1$ باشد، آنگاه داریم:

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+...+f(\frac{n}{n})]$$

سعی کنید ریتم و آهنگ دو حد فوق را به خاطر بسپارید تا بدانید چه حدودی را می‌توانیم به روش فوق محاسبه کنیم.

مثال: حدود زیر را با استفاده از تعریف انتگرال معین حساب کنید؟

الف) $$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\frac{1}{n}}+e^{-\frac{2}{n}}+...+e^{-\frac{n}{n}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e^{\frac{-i}{n}}=\int_0^1 e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big]_0^1=-e^{-1}+e^0=1-\frac{1}{e}$$

ب) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\cos\frac{a}{n}+\cos\frac{2a}{n}+...+\cos\frac{na}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos\frac{ai}{n}=\int_0^1\cos ax\,dx=\frac{1}{a}\sin ax\Big]_0^1=\frac{\sin a}{a}$$

ج) $$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+...+\sin\frac{n\pi}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\pi i}{n}=\int_0^\pi\sin x\,dx=-\cos x\Big]_0^\pi$$

$$=-(-1)-(-1)=2$$

د) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[(\frac{1}{n})^p+(\frac{2}{n})^p+\dots+(\frac{n}{n})^p\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^p=\int_0^1 x^p dx$

$=\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big]_0^1=\frac{1}{p+1}$

البته مقدار این حد را می‌توانستیم با استفاده از هم ارزی نیز به صورت زیر بدست آوریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}\sim\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{p+1}n^{p+1}}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$$

هـ) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\frac{n}{n^2+9}+\dots+\frac{n}{n^2+n^2})=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2[1+(\frac{i}{n})^2]}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{Arc\,tan}x\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}$

و) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n})=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n(1+\frac{i}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$

$=\int_0^1\frac{1}{1+x}=\operatorname{Ln}(1+x)\Big]_0^1=\operatorname{Ln}2$

ز) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{\sqrt{1}}{n}+\frac{\sqrt{2}}{n}+\dots+\frac{\sqrt{n}}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{i}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$

$\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big]_0^1=\frac{2}{3}$

ح) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$

ط) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-4}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-9}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-i^2}}=$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{i}{n})^2}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\operatorname{Arc\,sin}x\Big]_0^1=\frac{\pi}{2}$

ی) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{8(i-n)^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n+1-n}^{2n-n}\frac{8(i+n-n)^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{8i^2}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{2i}{n})^2$

$\int_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big]_0^2=\frac{8}{3}$

یافتن تابع اولیه‌ای خاص برای یک تابع:

می‌دانیم هرگاه تابعی، تابع اولیه (انتگرال نامعین) داشته باشد، بیشمار تابع اولیه خواهد داشت که اختلافشان در عدد ثابتی مانند C خواهد بود. در برخی از مسائل تابع اولیه‌ای خاص برای تابع داده شده، مورد نظر است که بایستی با توجه به شرایط اولیه‌ای که در مسأله داده شده است، ثابت انتگرالگیری (C) را به دست آورده و پس از جایگذاری مقدار C، تابع اولیه‌ی مطلوب به دست آید.

به عنوان مثال، توجه کنید که توابع زیر، همگی تابع اولیه‌ی تابع $f(x) = x^2 + 1$ هستند.

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x + 1$$
$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x - 2$$
$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x$$
$$\vdots$$
$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x + C \qquad (*)$$

حال اگر تابع اولیه‌ای برای تابع f بخواهیم که از نقطه‌ی (۱ و ۰) بگذرد، کافی است مختصات این نقطه را در فرمول (*) (فرمول کلی توابع اولیه‌ی تابع f) قرار دهیم تا مقدار C و از آنجا F(x) مطلوب به دست آید.

$$F(0) = \frac{0}{3} + 0 + c \Rightarrow 1 = c$$
$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x + 1$$

به مثالهای بعدی توجه کنید.

مثال: یک منحنی از نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}0\\ \frac{1}{3}\end{matrix}\right.$ **می‌گذرد و مشتق آن به صورت** $y' = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x^2+1}$ **می‌باشد، معادلهٔ این منحنی را بیابید؟**

$$y = \int y'dx \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}\int \frac{x^2 . 2x}{\sqrt{\underbrace{x^2+1}_{u}}}\, dx + \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{(u-1)\, du}{\sqrt{u}} + \text{Arc}\tan x + C$$

$$= \frac{1}{2}\int (u-1)\, u^{-\frac{1}{2}} du + \text{Arc}\tan x + C = \frac{2}{3}\sqrt{u^3} - 2\sqrt{u} + \text{Arc}\tan x + C$$

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} - 2\sqrt{x^2+1} + \text{Arc}\tan x + C \Rightarrow \frac{1}{3} = f(0) = \frac{2}{3} - 2 + 0 + C \Rightarrow C = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} - 2\sqrt{x^2+1} + \text{Arc}\tan x + \frac{5}{3}$$

مثال: معادلهٔ یک منحنی را بدست آورید که $ydy - xdx = 0$ **و منحنی از نقطهٔ** $A\left|\begin{matrix}1\\ \sqrt{5}\end{matrix}\right.$ **بگذرد؟**

$$y\, dy = x\, dx \Rightarrow \int y\, dy = \int x\, dx$$

$$\frac{y^۲}{۲}=\frac{x^۲}{۲}+C\Rightarrow\frac{۵}{۲}-\frac{۱}{۲}=C\Rightarrow \boxed{C=۲}$$

$$\frac{y^۲}{۲}=\frac{x^۲}{۲}+۲\Rightarrow \boxed{\frac{y^۲}{۴}-\frac{x^۲}{۴}=۱}$$

مثال: ضریب زاویه‌ی خط مماس بر تابعی در هر نقطهٔ (x,y) از آن برابر است با $y'=\frac{۲+۲x-y}{۲y+x}$، اگر به ازاء $x=۱$، $y=۱$ باشد، ضابطهٔ این تابع را بیابید؟

یادآوری: ضریب زاویه‌ی خط مماس در هر نقطه از منحنی، همان مقدار مشتق تابع در آن نقطه است بنابراین:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{۲+۲x-y}{۲y+x}\Rightarrow ۲ydy+xdy=۲dx+۲xdx-ydx$$

از طرفین تابع اولیه می‌گیریم. $\Rightarrow y^۲+xy=۲x+x^۲-yx+c$

$(۱\,،\,۱)\Rightarrow ۱+۱=۲+۱-۱+c\Rightarrow c=۰\ \Rightarrow\ y^۲+۲xy-۲x-x^۲=۰$

چند فرمول بسیار مهم محاسبهٔ انتگرال معین:

الف) $\int_۰^a f(x)\,dx=\int_۰^a f(a-x)\,dx$

مثال: ثابت کنید:

الف) $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\frac{\pi}{۴}\quad ,(n\in N)$

ب) $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sqrt[n]{\sin x}}{\sqrt[n]{\sin x}+\sqrt[n]{\cos x}}dx=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sqrt[n]{\cos x}}{\sqrt[n]{\sin x}+\sqrt[n]{\cos x}}dx=\frac{\pi}{۴}\quad ,(n\in N)$

فقط (الف) را ثابت می‌کنیم. ابتدا ثابت می‌کنیم دو انتگرال با هم مساویند سپس ثابت می‌کنیم مقدار هر یک برابر $\frac{\pi}{۴}$ است.

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin^n(\frac{\pi}{۲}-x)}{\sin^n(\frac{\pi}{۲}-x)+\cos^n(\frac{\pi}{۲}-x)}dx=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos^n x}{\cos^n x+\sin^n x}dx$$

پس دو انتگرال مساویند. حال فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} I=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx \\ I=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx \end{cases}$$

$+$

$$۲I=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin^n x+\cos^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}}dx=\frac{\pi}{۲}\quad\Rightarrow I=\frac{\pi}{۴}$$

تذکر: در برخی از موارد، برای محاسبهٔ یک انتگرال می‌توان از قانون فوق (قانون (الف)) استفاده کرده و در طرف دیگر، همان انتگرال اولیه را ظاهر کرده، تا مقدار انتگرال بدست آید.

مثال:

$$I=\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{\cos^{2}x}dx=\int_{0}^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{\cos^{2}(\pi-x)}dx=\int_{0}^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{\cos^{2}x}=\int_{0}^{\pi}\frac{\pi\sin x}{\cos^{2}x}dx-\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{\cos^{2}x}dx$$

$$\Rightarrow I=\int_{0}^{\pi}\pi\sec x\tan x\,dx-I\Rightarrow 2I=\pi\sec x\Big]_{0}^{\pi}=-2\pi\Rightarrow I=-\pi$$

تذکر: از رابطهٔ (الف) چندین بار هم می‌توان در یک مسأله استفاده کرد.

ب) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$

مثال: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$

$$f(\sin x)=\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\quad\Rightarrow f(\cos x)=\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}$$

ج) $\int_{a}^{b}f(x)\,dx=\int_{a}^{b}f(a+b-x)\,dx$ (انتگرال والیک)

مثال ثابت کنید. $\int_{2}^{5}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{7-x}}dx=1$

$$\int_{2}^{5}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{7-x}}dx=\int_{2}^{5}\frac{\sqrt{2+5-x}}{\sqrt{2+5-x}+\sqrt{7-(2+5-x)}}dx=\int_{2}^{5}\frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{7-x}+\sqrt{x}}dx$$

$$I=\int_{2}^{5}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{7-x}}dx$$

$$I=\int_{2}^{5}\frac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{7-x}}dx$$

+ ______

$$2I=\int_{2}^{5}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{7-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{7-x}}dx=\int_{2}^{5}dx=3\quad\Rightarrow I=\frac{3}{2}$$

د) $\int_{0}^{n}[x]dx=\frac{n(n-1)}{2}$

هـ) $\int_{0}^{n}(x-\lfloor x\rfloor)\,dx=\frac{n}{2}$

و) اگر f تابعی انتگرالپذیر و a عددی حقیقی باشد آنگاه: $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{0}^{a}(f(x)+f(-x))\,dx$

بالاخص:
اگر f زوج باشد آنگاه: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} (f(x)+f(-x))dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$
اگر f فرد باشد آنگاه: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} 0\,dx = 0$

مثال: $\int_{-1}^{1} \frac{5+\text{Arctan}x}{x^2+3}dx = 5\int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{dx}{x^2+3}}_{\text{این تابع، تابعی زوج است.}} + \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{\text{Arctan}x}{x^2+3}}_{\text{این تابع، تابعی فرد است.}}dx = 2\times\frac{5}{\sqrt{3}}\text{Arctan}\frac{x}{\sqrt{3}}\Big]_{0}^{1} + 0$

$= 2\times\frac{5}{\sqrt{3}}\times\frac{\pi}{6} = \frac{10}{6\sqrt{3}}\pi$

ز) اگر f تابعی انتگرالپذیر و a عددی حقیقی باشد، آنگاه: $\int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(a-x)dx$

ح) اگر f تابعی انتگرالپذیر و a عددی حقیقی باشد، آنگاه:

$\int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(x)dx + \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(a-x)dx$

اثبات: $\int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{a}{2}} \dots + \int_{\frac{a}{2}}^{a} \dots = \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(x)dx + \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(a-x)dx$

ط) اگر $f(a-x) = -f(x)$، آنگاه: $\int_{0}^{a} f(x)dx = 0$

مثال: اگر n عددی فرد و m عدد صحیح دلخواهی باشد، ثابت کنید:

$\int_{0}^{\pi} \sin^m x\cos^n x\,dx = 0$

چون $f(a-x) = f(\pi-x) = \sin^m(\pi-x)\cos^n(\pi-x) = \sin^m x(-\cos x)^n$

$= -\sin^m x\cos^n x = -f(x) \Rightarrow \int_{0}^{\pi} \sin^m x\cos^n x\,dx = 0$ چون n فرد است.

ی) هرگاه f تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب T باشد، آنگاه: $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx$

ک) هرگاه f تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب T شود، آنگاه: $\int_{0}^{nT} f(x)dx = n\int_{0}^{T} f(x)dx \quad ,(n\in N)$

اثبات: به روش استقرا است.

مثال: مطلوبست محاسبهٔ $\int_{0}^{1000\pi} \sin x\,dx$

چون $\sin(2\pi + x) = \sin x$ لذا:

$\int_{0}^{1000\pi} \sin x\,dx = \int_{0}^{500(2\pi)} \sin dx = 500\int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx = 500(0) = 0$

ل) فرض کنید f و g توابعی کراندار و انتگرالپذیر روی بازهٔ [a,b] باشند، اگر جز در تعدادی متناهی نقطه از بازهٔ [a,b]، داشته باشیم $f(x) = g(x)$، آن گاه: $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} g(x)dx$

مثال: $\int_a^b \left([x]+[-x]\right) dx$ **را حساب کنید؟**

حل: می‌دانیم $f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}-1 & ,(x\notin z)\\ 0 & ,(x\in z)\end{cases}$ بنابراین تابع f، جز در تعدادی متناهی نقطه از بازهٔ [a,b] (جز نقاط صحیح) با تابع $g(x)=-1$ برابر است بنابراین:

$$\int_a^b ([x]+[-x])\,dx=\int_a^b -1dx=a-b$$

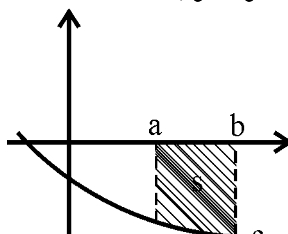
کاربرد انتگرال

سطح محصور (استفاده از انتگرال برای محاسبهٔ مساحت):

نکته‌ی ۱: (قضیهٔ اصلی): مساحت سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و محور طولها (خط $y=0$) و خطوط $x=a$ و $x=b$ برابر است با: $S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$

$=|F(b)-F(a)|$

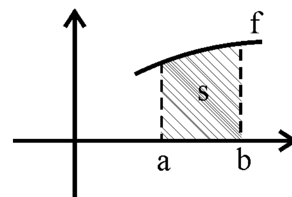
که در آن، F اولیهٔ f است.



(الف)

تذکر: در حالت (ب) چون، $\forall x\in[a,b]: f(x)\geq 0$

لذا نیازی به قدر مطلق نیست.



(ب)

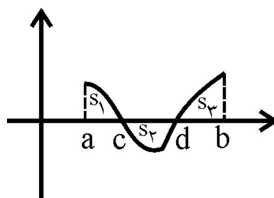
مثال: مطلوبست سطح محصور بین منحنی $y=x^2+1$، محور xها و خطوط $x=0$ و $x=2$

$$S=\int_0^2(x^2+1)\,dx=\frac{x^3}{3}+x\Big]_0^2=\frac{8}{3}+2=\frac{14}{3}$$

مثال: سطح محصور بین منحنی $y=\frac{a^2}{x^2}$ و محور xها در فاصلهٔ $x=a$ و $x=2a$ برابر است با ۱، a را بیابید؟

$$S=\int_a^{2a} a^2x^{-2}\,dx\Rightarrow 1=\frac{-a^2}{x}\Big]_a^{2a}\Rightarrow a=2$$

نکته‌ی ۲: هرگاه منحنی نمایش $y=f(x)$، محور طولها را در فاصلهٔ [a,b] در یک یا چند نقطه قطع کند، سطح محصور بین منحنی تابع و محور طولها و خطوط $x=a$ و $x=b$، از مجموع مساحتهای جزئی بوجود آمده، بدست می‌آید.



$$S_a^b=s_1+s_2+s_3$$

$$=\int_a^c f(x)dx+\left|\int_c^d f(x)\,dx\right|+\int_d^b f(x)\,dx$$

مثال: مطلوبست سطح محصور بین منحنی $y=x^3+x$ و محور xها و خطوط $x=-1$ و $x=1$

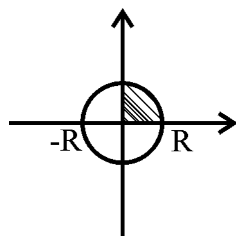
$$y=0\Rightarrow x^3+x=0\Rightarrow x(x^2+1)=0\Rightarrow x=0\Rightarrow -1<0<1$$

$$S_{-1}^{1}=S_{-1}^{0}+S_{0}^{1}=\left|\int_{-1}^{0}(x^{3}+x)\,dx\right|+\int_{0}^{1}(x^{3}+x)\,dx=\left|\frac{x^{4}}{4}+\frac{x^{2}}{2}\right]_{-1}^{0}\left|+\frac{x^{4}}{4}+\frac{x^{2}}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$=\left|0-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\right|+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

نکته‌ی ۳: هرگاه a و b داده نشده نباشند و بخواهیم مساحت سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و محور xها را حساب کنیم، ابتدا معادلهٔ $f(x)=0$ یا $y=0$ را حل کرده تا a و b بدست آیند، سپس مساحت را حساب می‌کنیم اگر مساحت در یک طرف محور xها باشد از نکته (۱) و اگر قسمتی از مساحت بالای محور xها و قسمتی دیگر پائین محور xها باشد، مساحت را از نکته (۲) بدست می‌آوریم.

مثال: مطلوبست محاسبهٔ مساحت دایره به شعاع R و مساحت بیضی با استفاده از قضیهٔ مساحت و انتگرال؟

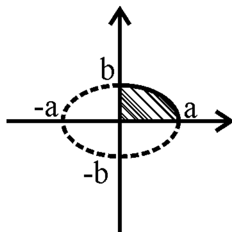


الف) مساحت دایره: مساحت ربع دایره را حساب کرده، چهار برابر می‌کنیم.

$$x^{2}+y^{2}=R^{2}\overset{y=0}{\Rightarrow}x=\pm R$$

$$y^{2}=R^{2}-x^{2}\Rightarrow y=\pm\sqrt{R^{2}-x^{2}}=y=\sqrt{R^{2}-x^{2}}$$

$$S=4\int_{0}^{R}\sqrt{R^{2}-x^{2}}\,dx\ \underset{x=R\sin\theta}{\overset{\text{با استفاده از تغییر متغیر}}{=}}\ 4\times\frac{\pi R^{2}}{4}=\pi R^{2}$$



ب) مساحت بیضی: مساحت ربع بیضی را حساب کرده، ضربدر ۴ می‌کنیم.

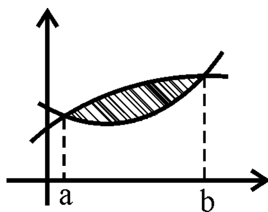
$$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1\overset{y=0}{\Rightarrow}x=\pm a$$

$$y^{2}=\frac{b^{2}}{a^{2}}(a^{2}-x^{2})\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^{2}-x^{2}}$$

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^{2}-x^{2}}\Rightarrow S=4\int_{0}^{a}\frac{b}{a}\sqrt{a^{2}-x^{2}}\,dx=\frac{4b}{a}\int_{0}^{a}\sqrt{a^{2}-x^{2}}dx$$

$x=a\sin\theta$ با استفاده از تغییر متغیر $=\pi ab$

نکته‌ی ۴: برای محاسبهٔ مساحت سطح محصور بین دو منحنی پیوسته به معادلات $y=f(x)$ و $y=g(x)$، ابتدا معادلات دو منحنی را با یکدیگر تلاقی داده، تا a و b بدست آیند، سپس به کمک فرمول زیر، مساحت را حساب می‌کنیم.



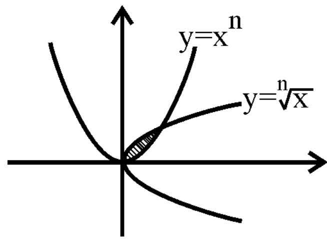
$$S=\left|\int_{a}^{b}(f(x)-g(x))\,dx\right|$$

مثال: مطلوبست محاسبهٔ مساحت سطح محصور بین منحنی نمایش $y=x^{4}$ و نیمساز ناحیهٔ اول و سوم؟

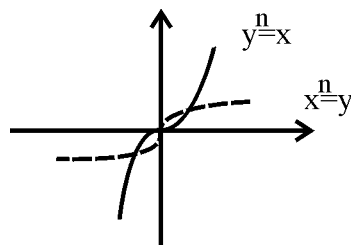
$$\begin{cases}y=x^{4}\\y=x\end{cases}\Rightarrow x^{4}=x\Rightarrow x(x^{3}-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}$$

$$S=\left|\int_{0}^{1}(x^{4}-x)dx\right|=\left|\frac{x^{5}}{5}-\frac{x^{2}}{2}\Big]_{0}^{1}\right|=\frac{3}{10}$$

نکته‌ی بسیار مهم: برای محاسبهٔ سطح محصور بین منحنی نمایش $y=x^n$ و منحنی نمایش وارون آن یعنی $x=y^n$ یا $y=\sqrt[n]{x}$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.



(n زوج)



(n فرد)

$$\begin{cases}y=x^{n}\\ y=\sqrt[n]{x}\end{cases}\Rightarrow x^{n}=\sqrt[n]{x}\ \Rightarrow x^{n^{2}}-x=0$$

n زوج: $x=0,1$

n فرد: $x=0,\pm1$

$$1)\ S=\left|\int_{0}^{1}(x^{n}-x^{\frac{1}{n}})dx\right|=\frac{n-1}{n+1}\quad (\text{n زوج})$$

$$2)\ S=2\left|\int_{0}^{1}(x^{n}-x^{\frac{1}{n}})dx\right|=2\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\quad (\text{n فرد})$$

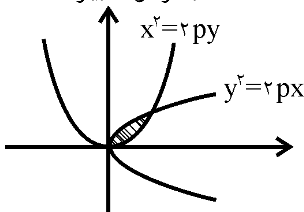
مثال: مساحت سطح محصور بین منحنی نمایش توابع $y=x^2$ و $y=\sqrt{x}$ چقدر است؟

$n=2$ زوج $\Rightarrow S=\frac{n-1}{n+1}=\frac{1}{3}$

مثال: مساحت سطح محصور بین منحنی نمایش توابع $y=x^5$ و $x=y^5$ چقدر است؟

$n=5$ فرد $\Rightarrow S=2\left(\frac{n-1}{n+1}\right)=\frac{4}{3}$

نکته‌ی مهم: برای محاسبهٔ سطح محصور بین دو سهمی قائم و افقی به معادلات $x^2=2py$ و $y^2=2px$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.



$$S=\left|\int_{0}^{2p}\left(\frac{x^{2}}{2p}-\sqrt{2px}\right)dx\right|=\frac{4}{3}p^{2}$$

مثال: سطح محصور بین دو منحنی $y^2=6x$ و $x^2=6y$ چقدر است؟

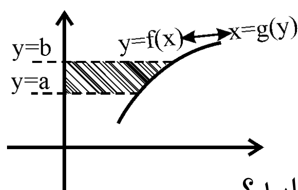
$2p=6\Rightarrow p=3\Rightarrow S=\frac{4}{3}\times 9=12$

مثال: هرگاه سطح محصور بین دو منحنی به معادلات $y^2=ax$ و $x^2=ay$ برابر ۱۲ باشد، a چقدر است؟ $(a>0)$

$$2p=a\ \Rightarrow p=\frac{a}{2}\ \Rightarrow S=\frac{4}{3}p^{2}\ \Rightarrow 12=\frac{4}{3}\times\frac{a^{2}}{4}\ \Rightarrow a=6$$

نکته‌ی بسیار مهم: سطح محصور بین منحنیهای $x^2=by$ و $y^2=ax$ برابر است با $s=\frac{1}{3}ab$

نکته‌ی ۵: برای محاسبهٔ سطح محصور بین منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ و محور عرضها (خط $x=0$) و دو خط افقی $y=a$ و $y=b$، ابتدا معادلهٔ وارون تابع را به صورت $x=g(y)$ بدست آورده و سپس از قضیهٔ اصلی مساحت (نکتهٔ (۱)) استفاده می‌کنیم.

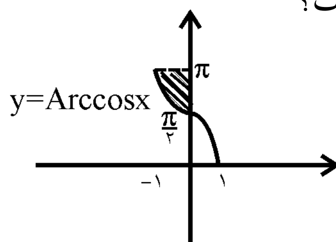


$$S=\left|\int_{a}^{b}g(y)\,dy\right|=\left|\int_{a}^{b}x\,dy\right|$$

مثال: سطح محصور بین منحنی تابع $y=x^3$ و محور عرضها و خطوط $y=1$ و $y=8$ را بیابید؟

$y=x^{3} \Rightarrow x=\sqrt[3]{y}=y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow S=\left|\int_{1}^{8} y^{\frac{1}{3}}\,dy\right|=\frac{45}{4}$

مثال: سطح محصور بین منحنی تابع $y=\text{Arccos}x$ و خطوط $y=\frac{\pi}{2}$ و $y=\pi$ چقدر است؟



$y=\text{Arccos}x \Rightarrow x=\cos y \Rightarrow s=\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos y\,dy\right|$

$S=1$

نکته‌ی مهم: سطح محصور بین منحنی $y=\sin mx$ و محور xها در یک دورهٔ تناوب برابر $S=\frac{4}{m}$ است.

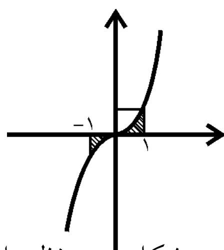
نکته‌ی مهم: سطح محصور بین منحنی $y=\cos mx$ و محور xها در یک دورهٔ تناوب برابر $S=\frac{4}{m}$ است.

نکته‌ی مهم: سطح محصور بین منحنی $y=\sin^{2}mx$ و محور xها برابر $s=\frac{\pi}{2m}$ است.

نکته‌ی مهم: سطح محصور بین منحنی $y=\cos^{2}mx$ و محور xها برابر $s=\frac{\pi}{2m}$ است.

نکته‌ی مهم: اگر تابعی فرد باشد، آنگاه می‌دانیم $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$، ولی برای محاسبهٔ مساحت سطح محصور بین نمودار تابع $y=f(x)$ و محور xها در فاصلهٔ $x=-a$ و $x=a$ از دستور $S=2\left|\int_{0}^{a} f(x)\,dx\right|$ استفاده می‌کنیم.

مثال: اولاً مقدار انتگرال $\int_{-1}^{1} x^{3}\,dx$ چقدر است، ثانیاً مساحت سطح محصور بین منحنی $y=x^{3}$ و محور xها و خطوط $x=-1$ و $x=1$ را بیابید؟



$y=x^{3}$ تابعی فرد است. $\Rightarrow \int_{-1}^{1} x^{3}\,dx=0$

$S_{-1}^{1}=2\left|\int_{0}^{1} x^{3}dx\right|=\frac{1}{2}$

نکته‌ی مهم: در برخی از مسائل سطح محصور، احتیاج به حل انتگرال نیست و کافی است مساحت شکل مورد نظر را از طریق هندسی پیدا کنیم.

مثال: سطح محصور بین منحنی $x^{2}+y^{2}=4$ و محور xها را بیابید؟

حل: معادلهٔ داده شده معادلهٔ یک دایره به شعاع ۲ می‌باشد. لذا:

$S=4\pi$

تست: سطح محصور بین منحنی $4x^{2}+9y^{2}=1$ و محور xها کدام است؟

۱) 6π ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) 3π ۴) $\frac{\pi}{4}$

حل: معادلهٔ داده شده معادلهٔ یک بیضی است $\frac{x^{2}}{\frac{1}{4}}+\frac{y^{2}}{\frac{1}{9}}=1$ و لذا $S=\pi ab=\pi(\frac{1}{2})(\frac{1}{3})=\frac{\pi}{6}$

نکته‌ی بسیار مهم: در برخی از مسائل برای محاسبهٔ یک انتگرال مشکل، می‌توان از مساحت استفاده کرده و مساحت ایجاد شده را از طریق هندسی محاسبه کنیم.

مثال: انتگرال $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$ را محاسبه کنید؟

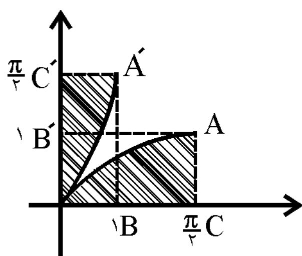
حل: $y=\sqrt{9-x^2}$ معادلهٔ یک نیم دایره است. $y=\sqrt{9-x^2} \Leftarrow x^2+y^2=9$ که معادلهٔ یک دایره است لذا:

$$S=\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{\pi R^2}{2}=\frac{9\pi}{2}$$

مثال: با استفاده از سطح نمودار $y=\sin x$ در بازهٔ $[0,\frac{\pi}{2}]$ و معکوس آن، در یک دستگاه مختصات ثابت کنید:

$$\int_0^1 \text{Arcsin}x\,dx=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$

و سپس نتیجه بگیرید: $\int_0^1 \text{Arcsin}x\,dx=\frac{\pi-2}{2}$



حل: می‌دانیم توابع $y=\sin x$ و $y=\text{Arcsin}x$ معکوس یکدیگرند. پس نمودار آنها نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند، در نتیجه:

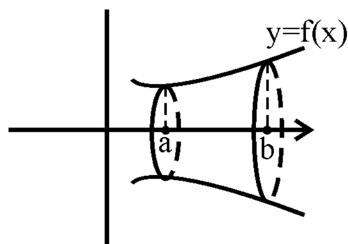
$$S_{OAC}=S_{OA'C'}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \text{Arcsin}x\,dx=S_{OA'B}=S_{OBA'C'}-S_{OA'C'}=1\times\frac{\pi}{2}-S_{OAC}$$

لذا:

$$\int_0^1 \text{Arcsin}x\,dx=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1=\frac{\pi-2}{2}$$

ب) محاسبهٔ جسم حجم دار



نکته‌ی ۱ (قضیه‌ی اصلی): اگر مساحت سطح محصور بین منحنی $y=f(x)$ و محور طولها و خطوط $x=a$ و $x=b$ را حول محور xها بچرخانیم (دوران دهیم) حجم دوار حادث (حاصل) را از رابطه‌ی زیر می‌توان محاسبه کرد.

$$V=\pi\left|\int_a^b y^2\,dx\right|$$

مثال: هرگاه منحنی نمایش تابع $y=\sin x$ در یک طاق سینوسی حول محور طولها، دوران کند، حجم حادث را حساب کنید؟

$$V=\pi\left|\int_0^{\pi}\sin^2x\,dx\right|=\frac{\pi}{2}\left|\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx\right|$$

$$=\frac{\pi}{2}\left|x-\frac{\sin 2x}{2}\Big]_0^{\pi}\right|=\frac{\pi}{2}\times\pi=\frac{\pi^2}{2}$$ واحد حجم

نکته‌ی ۲: هرگاه سطح محصور بین دو منحنی $y_1=f(x)$ و $y_2=g(x)$ را حول محور طولها بچرخانیم، حجم حادث از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$V=\pi\left|\int_a^b (y_1^2-y_2^2)\,dx\right|$$

که در آن a و b، طولهای نقاط برخورد دو منحنی هستند.

مثال: سطح محصور بین دو منحنی به معادلات $y=x^2$ و $y=x$ را حول محور طولها دوران داده‌ایم، حجم حادث را

حساب کنید؟

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱ \end{cases} \quad V = \pi \left| \int_۰^۱ (x^۴ - x^۲)dx \right| = \frac{۲}{۱۵}\pi \text{ واحد حجم}$$

نکته‌ی ۳: حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $y = x^n$ ($n > ۱$) و خط $y = x$ حول محور xها از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$V = \begin{cases} \dfrac{۲\pi(n-۱)}{۳(۲n+۱)} & (\text{n زوج}) \\ \dfrac{۴\pi(n-۱)}{۳(۲n+۱)} & (\text{n فرد}) \end{cases}$$

مثال: سطح محصور بین دو منحنی به معادلات $y = x^۲$ و $y = x$ را حول محور طولها دوران داده‌ایم، حجم حادث چقدر است؟

$$n = ۲ \text{ زوج} \Rightarrow V = \frac{۲\pi(۲-۱)}{۳(۴+۱)} = \frac{۲\pi}{۱۵}$$

نکته‌ی ۴: هرگاه سطح محصور حول محور عرضها دوران کند، به عبارت دیگر هرگاه $x = f(y)$ تابعی پیوسته در بازهٔ $[a,b]$ باشد، در این صورت حجم جسم حاصل از دوران سطح محصور بین نمودار تابع $x = f(y)$ و محور عرضها، حول محور عرضها برابر است با:

$$V = \pi \left| \int_a^b x^۲dy \right| = \pi \left| \int_a^b (f(y))^۲ dy \right|$$

مثال: منحنی $y = \sqrt{x}$ را حول محور عرضها می‌چرخانیم. حجم حاصل را بین $y = ۰$ و $y = ۲$ حساب کنید؟

$$V = \pi \left| \int_۱^۲ x^۲dy \right| = \pi \left| \int_۱^۲ y^۴dy \right| = \frac{۳۲}{۵}\pi$$

نکته‌ی ۵: هرگاه سطح محصور بین دو منحنی پیوستهٔ $y_۱ = f(x)$ و $y_۲ = g(x)$ را حول محور عرضها دوران دهیم، حجم جسم حاصل از فرمول زیر بدست می‌آید.

$$V = \pi \left| \int_a^b (x_۱^۲ - x_۲^۲)dy \right|$$

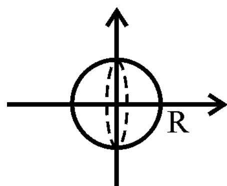
که در آن a و b طولهای نقاط برخورد دو منحنی هستند و $x_۱$ و $x_۲$ به ترتیب، توابع وارون $y_۱$ و $y_۲$ هستند.

مثال: حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ محدود به دو منحنی $y = x^۲$ و $y = ۲x$ حول محور yها را بیابید؟

$$\begin{cases} y = x^۲ \\ y = ۲x \end{cases} \Rightarrow x^۲ - ۲x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ & \Rightarrow y = ۰ \\ x = ۲ & \Rightarrow y = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^۲ & \Rightarrow x = \sqrt{y} \\ y = ۲x & \Rightarrow x = \dfrac{y}{۲} \end{cases} \Rightarrow$$

$$V = \pi \left| \int_۰^۴ \left[(\sqrt{y})^۲ - (\frac{y}{۲})^۲ \right] dy \right| = \frac{۸}{۳}\pi$$

مثال: با استفاده از قضیه‌ی سطح و حجم، حجم کره را حساب کنید؟



حل: می‌دانیم کره، از دوران نیم دایره ایجاد می‌شود لذا:

$$x^۲ + y^۲ = R^۲ \Rightarrow V = ۲\pi \left| \int_۰^R y^۲dx \right|$$

$$V = ۲\pi \left| \int_۰^R (R^۲ - x^۲)dx \right| = ۲\pi \left| R^۲x - \frac{x^۳}{۳} \right]_۰^R \left. \right| = \frac{۴}{۳}\pi R^۳$$

نکته‌ی بسیار مهم: اگر بیضی حول قطر بزرگش (AA') دوران کند، حجم جسم حادث از فرمول زیر بدست می‌آید:

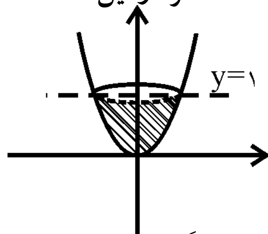
$$V=\frac{۴}{۳}\pi ab^{۲}$$

نکته‌ی بسیار مهم: اگر بیضی حول قطر کوچکش (BB') دوران کند، حجم جسم حادث از فرمول زیر بدست می‌آید.

$$V=\frac{۴}{۳}\pi a^{۲}b$$

تذکر: اگر بیضی حول قطر بزرگش دوران کند، حجم بیضی گون حاصل کمتر از حجم بیضی گونی است که از دوران بیضی حول قطر کوچکش ایجاد می‌شود. یعنی: $\frac{۴}{۳}\pi ab^{۲}\le\frac{۴}{۳}\pi a^{۲}b$

مثال: حجم حادث از دوران سهمی $y=x^{۲}$ حول محور xها، جسمی به شکل یک کاسه است، اگر در این کاسه، تا ارتفاع ۱ متری آب بریزیم حجم آب درون آن را حساب کنید؟

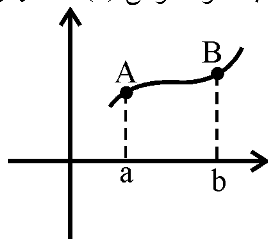


$$V_{\circ}^{۱}=\pi\left|\int_{\circ}^{۱}x^{۲}dy\right|=\pi\left|\int_{\circ}^{۱}y\,dy\right|=\frac{\pi}{۲}$$

ج) محاسبهٔ طول قوس (طول یک منحنی): اگر تابع f' در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، می‌گوئیم منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ در این بازه، یک منحنی هموار است، برای یافتن طول یک منحنی هموار، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

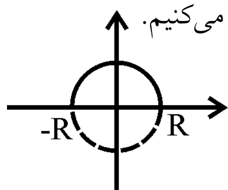
فرمول محاسبهٔ طول قوس:

الف) اگر تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ هموار باشد، در این صورت برای محاسبهٔ طول قوس $y=f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:



$$L_{a}^{b}=\int_{a}^{b}\sqrt{۱+y'^{۲}}\,dx=\int_{a}^{b}\sqrt{۱+(f'(x))^{۲}}\,dx$$

ب) برای تابع g که به صورت $x=g(y)$ بیان شده است و در آن g' تابعی پیوسته در فاصله $[c,d]$ است، طول قوس منحنی $x=g(y)$ از $y=c$ تا $y=d$ از دستور: $L_{c}^{d}=\int_{c}^{d}\sqrt{۱+x'^{۲}}\,dy=\int_{c}^{d}\sqrt{۱+(g'(y))^{۲}}\,dy$ استفاده می‌کنیم.



مثال: محیط دایرهٔ $x^{۲}+y^{۲}=R^{۲}$ را حساب کنید؟

حل: محیط ربع دایره را حساب کرده، ۴ برابر می‌کنیم.

$$x^{۲}+y^{۲}=R^{۲}\Rightarrow y^{۲}=R^{۲}-x^{۲}\Rightarrow y=\sqrt{R^{۲}-x^{۲}}$$

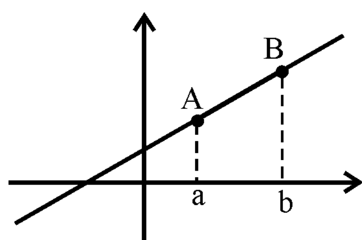
$$y'=-\frac{f'_{x}}{f'_{y}}=\frac{-x}{y}\quad\Rightarrow L=۴\int_{\circ}^{R}\sqrt{۱+y'^{۲}}=۴\int_{\circ}^{R}\sqrt{۱+\frac{x^{۲}}{y^{۲}}}\,dx=۴\int_{\circ}^{R}\sqrt{۱+\frac{x^{۲}}{R^{۲}-x^{۲}}}\,dx=$$

$$۴R\int_{\circ}^{R}\frac{۱}{\sqrt{R^{۲}-x^{۲}}}dx$$

بنابراین محیط دایره برابر است با: $2\pi R$

$$= 4r\,\text{Arcsin}\frac{x}{R}\Big]_0^R = 4R\times\frac{\pi}{2} = 2\pi R$$

مثال: مطلوبست طول پاره خط $y = mx + n$ **از** $x = a$ **تا** $x = b$؟



$$L = \left|\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx\right| = \left|\int_a^b \sqrt{1+m^2}\,dx\right|$$

$$= \left|\sqrt{1+m^2}\,x\Big]_a^b\right| = \sqrt{1+m^2}\,|b-a|$$ واحد طول

تذکر: البته طول پاره خط AB را از فرمول $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ نیز می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد.

$A\left|\begin{matrix} a \\ ma+n\end{matrix}\right.$

$$AB = \sqrt{(a-b)^2+(ma-mb)^2} \Rightarrow AB = \sqrt{(a-b)^2(1+m^2)} = |a-b|\sqrt{1+m^2}$$

$B\left|\begin{matrix} b \\ mb+n\end{matrix}\right.$

***نکته:* فرمول طول قوس در حالت پارامتری**: هرگاه معادلهٔ پارامتری تابع $y = f(x)$ به صورت $(\alpha < t < \beta)$، $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t)\end{cases}$ باشد طول قوس منحنی در فاصلهٔ $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ از دستور زیر بدست می‌آید.

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{{x'}_t^2 + {y'}_t^2}\,dt$$

مثال: مطوبست طول قوس منحنی به معادلهٔ پارامتری $(0 \le t \le 2)$، $\begin{cases} x = t \\ y = t^2\end{cases}$ **در فاصلهٔ** $t = 0$ **و** $t = 2$

$$l = \int_0^2 \sqrt{{x'}_t^2 + {y'}_t^2}\,dt = \int_0^2 \sqrt{1+2t}\,dt = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\sqrt{(1+2t)^3}\Big]_0^2 = \frac{5}{3}$$ واحد طول

نکته: فرمول طول قوس منحنی پیوستهٔ $x = g(y)$ از $y = a$ تا $y = b$.

$$L = \int_a^b \sqrt{1+x'^2}\,dy$$

مثال: طول کمانی از خم $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}Lny$ **را که بین دو نقطهٔ به عرضهای** $y = 1$ **و** $y = 2$ **واقع است، حساب کنید؟**

$$l = \int_1^2 \sqrt{1+x'^2}\,dy = \int_1^2 \sqrt{1+\frac{y}{2}-\frac{1}{2y}}\,dy \xrightarrow{\text{پس از محاسبه}} \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\,Ln\,2$$

اندیشه کردن که چه بگویم، بهتر از پشیمانی خوردن که چرا گفتم. «سعدی»

تست ۱:

۱ـ حاصل $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+6}+\frac{1}{n+9}+\dots+\frac{1}{n+3n}\right)$ برابر است با:

۱) $2\operatorname{Ln}2$　　۲) $\frac{3}{2}\operatorname{Ln}4$　　۳) $\frac{2}{3}\operatorname{Ln}2$　　۴) $\frac{1}{3}\operatorname{Ln}2$

۲ـ برای تابع $y=\frac{1}{x}$، مقدار تقریب نقصانی روی بازهٔ $[1,2]$ به ازاء $n=4$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{k}$　　۲) $\sum_{k=4}^{7}\frac{1}{k+1}$　　۳) $\sum_{k=3}^{7}\frac{1}{k+1}$　　۴) $\sum_{k=4}^{7}\frac{1}{k}$

۳ـ هرگاه $x\in[0,1]$، $f(x)=\begin{cases}x^3 & ,(x\in Q)\\ 0 & ,(x\in R-Q)\end{cases}$، حاصل $\lim_{n\to\infty}U_n(f)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$　　۲) $\frac{1}{2}$　　۳) ۱　　۴) ۰

۴ـ هرگاه $f(x)=\begin{cases}2 & ,(x\in Q)\\ -2 & ,(x\notin Q)\end{cases}$، مقدار $U_n(f)-L_n(f)$ در بازه‌ی $[-1,2]$ برابر است با:

۱) ۰　　۲) ۶　　۳) ۱۲　　۴) ۱۲−

۵ـ حاصل $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2n}}+\frac{1}{\sqrt{3n}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n^2}}\right)$ کدام است؟

۱) ۱　　۲) ۲　　۳) $\frac{1}{2}$　　۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۶ـ مقدار $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}$ برابر است با:

۱) $\operatorname{Ln}2$　　۲) $\operatorname{Ln}3$　　۳) ۱　　۴) $\frac{1}{2}$

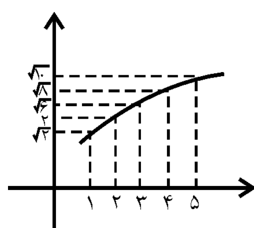
۷ـ تقریب اضافی سطح بین نمودار $y=\sqrt{x}$ و محور xها در فاصله‌ی $[0,4]$، برای $n=4$، کدام است؟

۱) $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$　　۲) $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$　　۳) $3+\sqrt{2}+\sqrt{5}$　　۴) $3+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

۸ـ مجموع ریمانی برای $\int_1^3 x^2dx$، به کدام شکل زیر است؟

۱) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)^2$　　۲) $\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)^2$　　۳) $\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^2$　　۴) $\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2$

۹ـ سطح زیر منحنی تابع $y=\sqrt{2x}$ و محور طولها در بازه‌ی $[1,5]$، طبق شکل، با تقریب نقصانی کدام است؟



۱) $2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}$
۲) $3+\sqrt{2}+\sqrt{6}$
۳) $1+\sqrt{2}+\sqrt{6}$
۴) $1+2\sqrt{2}+\sqrt{6}$

۱۰ـ هرگاه تابع $f(x)=x^3+x$ در بازه‌ی $[0,2]$ تعریف شده باشد، حاصل $\lim_{n\to\infty}n\left(U_n(f)-L_n(f)\right)$ کدام است؟

۱) ۰　　۲) ۱۰　　۳) ۳۰　　۴) ۲۰

۱ـ (۳) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{3i}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+3x}=\frac{1}{3}\text{Ln}(1+3x)\Big]_0^1=\frac{\text{Ln}4}{3}=\frac{2\text{Ln}2}{3}$

۲ـ (۲) $y=\frac{1}{x}\Rightarrow y'=\frac{-1}{x^2}$ تابع نزولی است. $\Rightarrow l_i=x_i$

$L_4(f)=\Delta x\,(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4))=\frac{1}{4}(\frac{4}{5}+\frac{4}{6}+\frac{4}{7}+\frac{4}{8})=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\sum_{k=4}^{7}\frac{1}{k+1}$

۳ـ (۱) $\lim_{n\to\infty}U_n(f)=\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n}f(u_i)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^3}\simeq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\Sigma i^3$

هم ارزی $\sim$ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\times\frac{1}{4}n^4=\frac{1}{4}$

۴ـ (۳) واضح است که به ازاء هر $x\in[-1,2]$، $M=2$ و $m=-2$، ضمناً $\Delta x=\frac{3}{n}$

$L_n(f)=\frac{3}{n}(-2-2-2\ldots-2)=-6$

$\Rightarrow U_n(f)-L_n(f)=12$

$U_n(f)=\frac{3}{n}(2+2+2+\ldots+2)=6$

۵ـ (۲) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{ni}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{i}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{n}{i}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{i}{n}}}$

$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\Big]_0^1=2$

۶ـ (۱) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\text{Ln}(1+x)\Big]_0^1=\text{Ln}2$

۷ـ (۴) $y=\sqrt{x}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0\Rightarrow$ تابع صعودی است $\Rightarrow u_i=x_i$

$U_4(f)=\Delta x\,(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4))=1(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2)=3+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

۸ـ (۴) $R_n(f)=\underset{n\to\infty}{\Delta x}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{2}{n}i)^2$

۹ـ (۱) چون تابع صعودی است لذا $S\simeq 1(\sqrt{2}+2+\sqrt{6}+\sqrt{8})=2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}$

۱۰ـ (۴)

$\lim_{n\to\infty}n(U_n(f)-L_n(f))=\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a))\right]=(b-a)(f(b)-f(a))=(2-0)(10-0)=20$

دقت کنید که f صعودی است، زیرا $f'(x)=3x^2+1>0$

اگر اشخاص تنبل وقت را می‌کشند، مردان ساعی آن را احیا می‌کنند. «کلریج»

تست ۲:

۱ـ مقدار تقریب اضافی سطح محصور بین منحنی $y = ۲x - x^{۲}$ و محور xها به ازاء $n = ۴$ برابر است با:

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۷}{۴}$ ۴) $\frac{۹}{۴}$

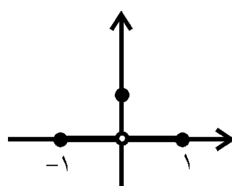
۲ـ تابع $D(x) = \begin{cases} ۱ & ,(x \in Q) \\ ۰ & ,(x \notin Q) \end{cases}$ را در بازه‌ی $[-۱,۱]$ در نظر بگیرید مقدار $L_n(D)$ و $U_n(D)$ به ترتیب عبارتند از:

۱) ۰ و ۰ ۲) ۰ و n ۳) ۰ و ۲ ۴) ۰ و $\frac{۲}{n}$

۳ـحاصل $\lim_{n \to +\infty} \frac{۱}{n} (\sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^{۲}} + \sqrt[n]{e^{۳}} + ... + \sqrt[n]{e^{n}})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) e ۳) $e + ۱$ ۴) $e - ۱$

۴ـ با توجه به شکل مقابل که نمودار تابع f است، $U_n(f)$ برابر است با:



۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{n}$

۳) $\frac{۲}{n}$ یا $\frac{۴}{n}$ ۴) ۱

۵ـ هرگاه مقدار متوسط تابع $y = f(x)$ در بازه‌ی $[۵,۱۳]$ برابر ۱۰ باشد، آنگاه مقدار متوسط تابع $y = f(۲x + ۱)$ در بازه‌ی $[۲,۶]$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۵ ۴) ۴۰

۶ـحاصل $\lim_{n \to \infty} \frac{۱}{n} \sum_{i=۱}^{n} (۲ + \frac{i-۱}{n})^{۲}$ برابر است با:

۱) $\int_{۰}^{۱} x^{۲}dx$ ۲) $\int_{۱}^{۲} x^{۲}dx$ ۳) $\int_{۲}^{۳} x^{۲}dx$ ۴) $\int_{۲}^{۳} (x^{۲}-۱)dx$

۷ـ مقدار متوسط تابع $f(x) = \frac{۱}{\sqrt{x}}$ در بازه‌ی $[۱,a]$ برابر $\frac{۶}{a-۱}$ است a کدام است؟ $(a > ۱)$

۱) ۲ ۲) ۹ ۳) ۴ ۴) ۱۶

۸ـ نمودار f روی $[-۲,۵]$ پیوسته و روی $[-۲,۲]$ نسبت به محور yها متقارن است، اگر $\int_{-۲}^{۲} f(x)dx = A$ و $\int_{۰}^{۵} f(x)dx = B$ باشد، آنگاه $\int_{-۲}^{۵} f(x)dx$ کدام است؟

۱) $B - A$ ۲) $B - \frac{A}{۲}$ ۳) $B + \frac{A}{۲}$ ۴) $B + A$

۹ـحاصل $\lim_{n \to +\infty} \frac{۱}{n} \sum_{i=n+۱}^{۲n} \frac{i}{n}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۰ـکدام گزینه برای انتگرالپذیری تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ درست می‌باشد؟

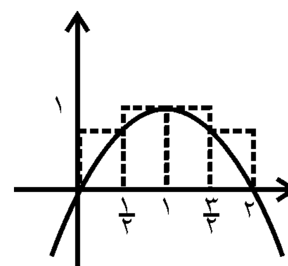
۱) تابع در این بازه پیوسته باشد. ۲) تابع در این بازه مشتق‌پذیر باشد.

۳) حد مجموع بالا و پائین ریمان f برابر باشند. ۴) هر سه مورد

۱ـ (۳) تابع در بازه‌ی [۰,۱] صعودی و در بازه‌ی [۱,۲] نزولی است.

$y = 2x - x^2 \Rightarrow y' = 2 - 2x$

x	۰	۱	۲
y′	+	۰	−



تقریب اضافی $= \Delta x\,(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4))$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + 1 + 1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4}$

۲ـ (۳) واضح است که مقدار Min و Max مطلق D در تمام زیر بازه‌ها به ترتیب برابر ۰ و ۱ است زیرا در هر بازه هم اعداد گویا وجود دارد، هم اعداد اصم بنابراین:

$L_n(D) = \Delta x\,(f(l_1) + f(l_2) + \ldots + f(l_n)) = \frac{2}{n}(0 + 0 + \ldots + 0) = 0$

$U_n(D) = \Delta x\,(f(u_1) + f(u_2) + \ldots + f(u_n)) = \frac{2}{n}(1 + 1 + \ldots + 1) = 2$

۳ـ (۴) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{e^i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}} = \int_0^1 e^x\,dx = e^x \Big]_0^1 = e - 1$

۴ـ (۳) با توجه به شکل، دیده می‌شود که Max مطلق f در تمام زیر بازه‌هایی که شامل صفر نیستند، صفر است حال اگر ۰ درون یکی از زیر بازه‌های افراز باشد، آنگاه:

$U_n(f) = \frac{2}{n}(0 + 0 + \ldots + 0 + 1 + 0 + \ldots + 0) = \frac{2}{n}$

و اگر ۰ لبه‌ی دو زیر بازه باشد، $\left([x_{i-1}, 0], [0, x_{i+1}]\right)$ آنگاه:

$U_n(f) = \frac{2}{n}(0 + 0 + \ldots + 0 + 1 + 1 + 0 + \ldots + 0) = \frac{4}{n}$

۵ـ (۴) $\bar{y} = \frac{\int_5^{13} f(x)dx}{13 - 5} = 10 \Rightarrow \int_5^{13} f(x)\,dx = 80$

$\bar{z} = \frac{\int_2^6 f(2x+1)\,dx}{6 - 2} = \frac{\int_2^6 f(2x+1)dx}{4} = \frac{\int_5^{13} f(u)\,(2du)}{4}, \quad u = 2x + 1$

$= \frac{2\times 80}{4} = 40$

توجه کنید که، هنگامیکه $x = 2$ است، $u = 5$ است و هنگامیکه $x = 6$ است، $u = 13$ است.

۶ـ (۳)

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_{i-1})^2 = \int_2^3 x^2 dx \quad , \begin{cases} \Delta x = \frac{1}{n} \\ x_{i-1} = a + (i-1)\Delta x \\ x_{i-1} = 2 + \frac{i-1}{n} \end{cases}$

۷ـ (۴) $\bar{y} = \frac{\int_1^a \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx}{a - 1} \Rightarrow \frac{6}{a-1} = \frac{2\sqrt{x}\,\Big]_1^a}{a-1} \Rightarrow 6 = 2\sqrt{a} - 2 \Rightarrow a = 16$

۸ـ (۳) $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_0^5 f(x)dx = \frac{A}{2} + B$

توضیح اینکه چون f در بازه‌ی [۲,۲-] زوج است لذا: $\int_{-۲}^{۲} f(x)\,dx = ۲\int_{۰}^{۲} f(x)\,dx = ۲\int_{-۲}^{۰} f(x)\,dx$

۹ـ (۴) $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=n+۱}^{۲n}\frac{i}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{i+n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left(۱+\frac{i}{n}\right) = \int_{۰}^{۱}(۱+x)\,dx = \frac{۳}{۲}$

راه‌دوم: $\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n^۲}\left[(n+۱)+(n+۲)+\dots+(n+n)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\left(n^۲+\frac{n(n+۱)}{۲}\right) \sim \lim_{n\to\infty}\frac{۳n^۲}{۲n^۲} = \frac{۳}{۲}$

۱۰ـ (۴)

اگر خاموش باشی تا دیگران به سخت آرندت، بهتر از اینکه در حال سخن گفتن، دیگران خاموشت کنند.

«سقراط»

از خوردن حرف، کسی سوءهاضمه نمی‌گیرد. «چرچیل»

آنکه در دوستی ترا ستایش کند به چیزی که در تو نباشد، در دشمنی نیز بدگوئی کند به چیزیکه در تو نیست.

«داراب شهریار»

تست ۳:

۱ـ مقدار متوسط تابع $f(x) = \frac{e^x}{e^x + ۱}$ در بازه‌ی [۰,۲] برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}Ln\frac{۲}{e+۱}$ ۲) $\frac{۱}{۲}Ln\frac{e^۲+۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}Lne^۲$ ۴) ۲

۲ـ هرگاه $A = \int_۱^۲ \frac{dx}{۱ + x^۴}$، حدود A کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲} \le A \le ۱$ ۲) $۰ \le A \le \frac{۱}{۱۷}$ ۳) $\frac{۱}{۱۷} \le A \le \frac{۱}{۲}$ ۴) $۱ \le A \le ۲$

۳ـ هرگاه f در فاصله‌ی [۲,۵] پیوسته و اکیداً صعودی باشد و $R_f = [۷,۱۰]$، کدام صحیح است؟

۱) $۷ \le \int_۲^۵ f(x)\,dx \le ۱۰$ ۲) $\frac{۷}{۲} \le \int_۲^۵ f(x)dx \le ۲$ ۳) $۲۰ \le \int_۲^۵ f(x)dx \le ۳۵$ ۴) $۲۱ \le \int_۲^۵ f(x)\,dx \le ۳۰$

۴ـ مقدار c در قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرالها در مورد تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{۱ + x^۲}}$ در فاصله‌ی $[۰,\sqrt{۳}]$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ۲) $\pm\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۴) $\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}$

۵ـ هرگاه مقدار متوسط تابع f در بازه‌ی [۲,۵] برابر ۷ و مقدار متوسط تابع f در بازه‌ی [۵,۱۱] برابر ۳ باشد، آنگاه مقدار متوسط تابع f در بازه‌ی [۲,۱۱] کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۳ ۳) $\frac{۱۳}{۳}$ ۴) $\frac{۱۴}{۳}$

۶ـ چند مورد از موارد زیر درست می‌باشند؟

الف) پیوستگی یک تابع در یک نقطه، شرط کافی برای مشتق‌پذیری آن تابع در آن نقطه است.

ب) اگر یک تابع در یک فاصله پیوسته نباشد، در آن فاصله انتگرالپذیر نیز نخواهد بود.

ج) پیوستگی یک تابع در یک فاصله، شرط کافی برای انتگرالپذیر ی آن تابع، در آن فاصله خواهد بود.

د) هرگاه تابعی در یک فاصله مشتق‌پذیر باشد، در آن فاصله انتگرالپذیر نیز هست.

هـ) هرگاه تابعی در یک فاصله، انتگرالپذیر باشد، در آن فاصله پیوسته نیز هست.

۱) ۳ مورد ۲) ۴ مورد ۳) ۲ مورد ۴) ۵ مورد

۷ـ کدام درست است؟

۱) $\int_۰^a f(a+t)dt = \int_۰^a f(t)dt$ ۲) $\int_۰^a f(t-a)dt = \int_۰^a f(t)dt$

۳) $\int_۰^a f(a-t)dt = \int_۰^a f(t)dt$ ۴) $\int_۰^a f(a+t)dt = -\int_۰^a f(t)dt$

۸ـ هرگاه f در بازه‌ی [a,b] تابعی پیوسته و صعودی باشد، حاصل $U_n(f) - L_n(f)$ کدام است؟

۱) $\frac{b-a}{n}$ ۲) $\frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$ ۳) $\frac{b-a}{n}(f(a)-f(b))$ ۴) $\frac{b-a}{n}(f(a)+f(b))$

۹ـ هرگاه f تابعی پیوسته باشد، مجموع $\frac{۱}{n}(f(\frac{۱}{n}) + f(\frac{۲}{n}) + ... + f(\frac{n}{n}))$، تقریبی از کدامیک از سطوح زیر است؟

۱) $\frac{۱}{n}\int_۰^۱ f(x)dx$ ۲) $\int_۰^۱ f(x)dx$ ۳) $\int_۱^۲ f(x)dx$ ۴) $\int_۱^n f(x)dx$

۱۰ـ مقدار تقریب اضافی مساحت زیر نمودار $y = sinx$ برای $n = ۶$ در بازه‌ی $[۰,\pi]$ برابر است با:

۱) $(۱ + \sqrt{۳})\frac{\pi}{۶}$ ۲) $(۲ + \sqrt{۳})\frac{\pi}{۶}$ ۳) $(۳ + \sqrt{۳})\frac{\pi}{۶}$ ۴) $(۳ - \sqrt{۳})\frac{\pi}{۶}$

۱ـ (۲)
$$\bar{y}=\frac{\int_{0}^{2}\frac{e^x}{e^x+1}dx}{2-0}=\frac{Ln(e^x+1)\Big]_0^2}{2}=\frac{1}{2}(Ln(e^2+1)-Ln2)=\frac{1}{2}Ln\frac{e^2+1}{2}$$

۲ـ (۳)
$$1\le x\le 2\Rightarrow 2\le x^4+1\le 17\Rightarrow\frac{1}{17}\le\frac{1}{1+x^4}\le\frac{1}{2}$$
$$\int_1^2\frac{1}{17}dx\le\int_1^2\frac{1}{1+x^4}dx\le\int_1^2\frac{1}{2}dx\Rightarrow\frac{1}{17}\le A\le\frac{1}{2}$$

۳ـ (۴)
$$R_f=[7,10]\Rightarrow\begin{cases}m=7\\M=10\end{cases}$$
$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)\Rightarrow 7(5-2)\le\int_2^5 f(x)dx\le 10(5-2)$$

۴ـ (۱)
$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)\Rightarrow\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=f(c)(\sqrt{3}-0)\Rightarrow\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sqrt{3}f(c)$$
$$\Rightarrow\int\frac{du}{2\sqrt{u}}=\sqrt{3}f(c)\Rightarrow\sqrt{1+x^2}\Big]_0^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}f(c)\Rightarrow(2-1)=\sqrt{3}f(c)\Rightarrow f(c)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

۵ـ (۳)
$$\frac{\int_2^5 f(x)dx}{5-2}=7,\quad\frac{\int_5^{11} f(x)dx}{11-5}=3\Rightarrow\begin{cases}\int_2^5 f(x)dx=21\\\int_5^{11} f(x)dx=18\end{cases}\Rightarrow\int_2^{11}f(x)dx=\int_2^5 f(x)dx+\int_5^{11}f(x)dx$$
$$\Rightarrow\int_2^{11}f(x)dx=21+18=39\Rightarrow\bar{z}=\frac{\int_2^{11}f(x)dx}{11-2}=\frac{39}{9}=\frac{13}{3}$$

۶ـ (۳) موارد (ج) و (د) صحیح می‌باشد.

۷ـ (۳) ***یادآوری:*** $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$ بنابراین:
$$\int_0^a f(t)dt=\int_0^a f(a+0-t)dt=\int_0^a f(a-t)dt$$

۸ـ (۲) در جزوه آمده است.

۹ـ (۲)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)dx\Rightarrow\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})\approx\int_0^1 f(x)dx$$

۱۰ـ (۲) $y=\sin x$ در فاصله‌ی $[0,\frac{\pi}{2}]$ صعودی و در فاصله‌ی $[\frac{\pi}{2},\pi]$ نزولی است، بنابراین:
$$U_6(f)=\Delta x(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5))=\frac{\pi}{6}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2})=(3+\sqrt{3})\frac{\pi}{6}$$

تست ۴:

۱ـ حاصل $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\frac{i}{n})^2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۲ـ حاصل $\lim \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}$ وقتی $n \to \infty$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) $\frac{2}{3}$

۳ـ $Ln(x+1)$ با کدامیک از سری‌های زیر قابل بیان است؟

۱) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+kx}$ ۲) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{n+kx}$ ۳) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x+1}{n+kx}$ ۴) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} Ln(k+1)$

۴ـ مجموع ریمان پائین تابع $y = x^3$ در بازه‌ی $[-2,2]$ به ازاء $n = 4$، برابر است با:

۱) -8 ۲) -6 ۳) -5 ۴) -4

۵ـ برای تابع $f(x) = x^2$ در بازه‌ی $[-2,2]$، اگر $n = 4$ باشد، اختلاف بالا ریمان و پائین ریمان چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۳

۶ـ هرگاه $I = \int_0^1 x\,dx$ و $P = \int_0^1 \frac{x\cos x\,dx}{x^2+1}$، آنگاه:

۱) $I \geq P$ ۲) $I \leq P$ ۳) $I = P$ ۴) $2I = P$

۷ـ حاصل $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ برابر است با:

۱) e ۲) $\frac{1}{e}$ ۳) $\sqrt{e}$ ۴) $e + 1$

۸ـ کران بالای انتگرال $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$، کدام است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) کوچکتر از $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۹ـ هرگاه $f(x) = \int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx$ و $g(x) = \int x \cos x\,dx$، حاصل $f'(0) + g''(0)$ کدام است؟

۱) -2 ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۱۰ـ مقدار میانگین تابع $y = \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ در فاصله‌ی $[\frac{\pi^2}{4}, \pi^2]$ کدام است؟

۱) $\frac{8\sqrt{2}}{3\pi^2}$ ۲) $\frac{-8\sqrt{2}}{3\pi^2}$ ۳) $\frac{4\sqrt{2}}{3\pi^2}$ ۴) $\frac{-4\sqrt{2}}{3\pi^2}$

۱- (۳) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2\sim\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}n^3}{n^3}=\frac{1}{3}$

۲- (۴) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+...+\sqrt{\frac{n}{n}})=\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$

$\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{x}\Big]_0^1=\frac{2}{3}$

۳- (۲) $Ln(x+1)=\int_1^{x+1}\frac{dt}{t}=\lim_{n\to\infty}\Delta x\sum_{k=1}^{n}f(x_k)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+1-1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k},\ f(x)=\frac{1}{x}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{x}{n}k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{n+kx}$

۴- (۱)

$y=x^3\Rightarrow y'=3x^2>0\Rightarrow$ در $[-2,2]$ صعودی است. $f\Rightarrow\begin{cases}u_i=x_i\\ l_i=x_{i-1}\end{cases}$

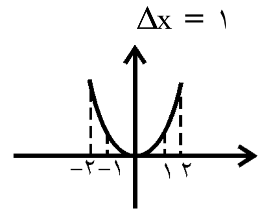
$L_4(f)=\Delta x(f(l_1)+f(l_2)+f(l_3)+f(l_4))=(1)(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4))=(1)(-8+(-1)+0+(1))=-8$

۵- (۳) $\Delta x=1$

$L_4(f)=\Delta x(f(x_1)+f(x_2)+f(x_2)+f(x_3))=1(1+0+0+1)=2$

$U_4(f)=\Delta x(f(x_0)+f(x_1)+f(x_3)+f(x_4))=1(4+1+1+4)=10$

$U_4(f)-L_4(f)=8$ به شکل توجه کنید. $\Rightarrow$



۶- (۱) $0\le\frac{\cos x}{x^2+1}\le1\overset{\times x}{\Rightarrow}0\le\frac{x\cos x}{x^2+1}\le x\Rightarrow\int_0^1\frac{x\cos x\,dx}{x^2+1}dx\le\int_0^1x\,dx\Rightarrow P\le I$

۷- (۲) $A=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}=\sqrt[n]{\frac{1\times2\times...\times n}{n\times n\times...\times n}}\Rightarrow LnA=\frac{1}{n}Ln(\frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times...\times\frac{n}{n})$

$\Rightarrow LnA=\frac{1}{n}(Ln\frac{1}{n}+Ln\frac{2}{n}+...+Ln\frac{n}{n})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Ln(\frac{i}{n})\Rightarrow\lim_{n\to\infty}LnA=\int_0^1Lnx\,dx$

$Ln(\lim_{n\to\infty}A)=xLnx-x\Big]_0^1=(-1)-(0\times(-\infty))\quad,\lim_{x\to0}xLnx=\lim_{x\to0}\frac{Lnx}{\frac{1}{x}}\overset{HOP}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$

$\Rightarrow Ln(\lim_{n\to\infty}A)=-1\Rightarrow\lim_{n\to\infty}A=e^{-1}=\frac{1}{e}$

۸- (۱) $\int_a^bf(x)\,dx\le M(b-a)$ کران بالا

$0<x<1\Rightarrow0<x^4<1\Rightarrow1<1+x^4<2\Rightarrow1<\sqrt{1+x^4}<\sqrt{2}=M\Rightarrow M(b-a)=\sqrt{2}(1-0)=\sqrt{2}$

۹- (۲)

$f'(x)=\frac{\cos2x}{\sin x+\cos x}\Rightarrow f'(0)=\frac{1}{0+1}=1$

$g'(x)=x\cos x\Rightarrow g''(x)=\cos x-x\sin x\Rightarrow g''(0)=1$

$f'(0)+g''(0)=2$

۱۰- (۴) $\bar{y}=\frac{\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx}{\pi^2-\frac{\pi^2}{4}}=\frac{2\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\,dx}{\frac{3\pi^2}{4}}=\frac{8\int u'\cos u\,dx}{3\pi^2}=\frac{8\int\cos u\,du}{3\pi^2}=\frac{8\sin\sqrt{x}\Big]_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2}}{3\pi^2}=$

$\frac{8(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{4})}{3\pi^2}=\frac{-4\sqrt{2}}{3\pi^2}$

تست ۵:

۱ـ هرگاه $F(x)=\int_x^1 \frac{dt}{t^2+4}$، آنگاه $(F^{-1})'(0)$، برابر است با:

۱) -5 ۲) $-\frac{1}{5}$ ۳) 5 ۴) $\frac{1}{5}$

۲ـ معادله‌ی خط مماس بر تابع $f(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt$ در نقطه‌ی $x=0$ واقع بر منحنی کدام است؟

۱) $x=0$ ۲) $y=0$ ۳) $y=x$ ۴) $y=-x$

۳ـ هرگاه f در R پیوسته باشد، حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right]$، کدام است؟

۱) $f(x)$ ۲) $f'(x)$ ۳) $f(t)$ ۴) $f'(t)$

۴ـ هرگاه $f(x)=\int_0^{2x} \operatorname{Arctan}\frac{t}{2}\,dt$، حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

۵ـ هرگاه $ydy-xdx=0$ و منحنی از $A\left|\begin{matrix}1\\ \sqrt{5}\end{matrix}\right.$ بگذرد، معادله‌ی منحنی y کدام است؟

۱) $y=\frac{x^2}{2}+12$ ۲) $y^2=\frac{x}{2}+12$ ۳) $y^2=x^2+24x$ ۴) $y^2=x^2+4$

۶ـ طول نقطه‌ی Max نسبی تابع $f(x)=\int_1^x e^{-\frac{t^2}{2}}(1-t^2)\,dt$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۰ ۴) ± 1

۷ـ هرگاه تابع اولیه‌ی $f(x)$، برابر $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ باشد، مشتق $f(\frac{1}{x^2})$ با شرط $x>0$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{x^2}$ ۲) $\frac{1}{x}$ ۳) $-\frac{1}{x^2}$ ۴) $-\frac{1}{x^5}$

۸ـ هرگاه $f(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}\cos t^2\,dt$، $(x>0)$ $f'(x)$ کدام است؟

۱) $\cos x$ ۲) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x$ ۳) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x$ ۴) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x+\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$

۹ـ حاصل $\int xf''(x)dx$، برابر کدام یک می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{1}{2}x^2f(x)$ ۲) $xf'(x)+f(x)$ ۳) $x^2f(x)-f'(x)$ ۴) $xf'(x)-f(x)$

۱۰ـ هرگاه $F(x)=\int_e^x \frac{Lnt}{t}\,dt$ $(x\geq e)$، در این صورت $(F^{-1})'(0)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) e ۳) ۰ ۴) $\frac{1}{e}$

۱ـ (۱)

$$A\left|\begin{matrix}a=۱\\ b=۰\end{matrix}\right. \qquad ۰=\int_{x}^{۱}\frac{dt}{t^{۲}+۴} \Rightarrow x=۱\Rightarrow a=۱$$

$$A'\left|\begin{matrix}b=۰\\ a=۱\end{matrix}\right. \qquad F'(x)=۰-(۱)\frac{۱}{x^{۲}+۴}=\frac{-۱}{x^{۲}+۴}=F'(۱)=\frac{-۱}{۵}\Rightarrow (F^{-۱})'(۰)=\frac{۱}{F'(۱)}=-۵$$

۲ـ (۲)

$$f(۰)=\int_{۰}^{۰}\sqrt{۱+t^{۲}}\,dt=۰ \quad \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۰\\ ۰\end{matrix}\right. \quad ,f'(x)=۲x\sqrt{۱+x^{۴}} \quad \Rightarrow m=f'(۰)=۰$$

$$\Rightarrow y-۰=۰(x-۰) \quad \Rightarrow y=۰$$

۳ـ (۱)

$$\lim_{h\to ۰}\frac{۱}{h}\times\int_{x}^{x+h}f(t)\,dt=\lim_{h\to ۰}\frac{\int_{x}^{x+h}f(t)\,dt}{h}=\frac{۰}{۰}$$

$$\overset{\text{HOP نسبت به } h}{\Rightarrow} \quad \lim_{h\to ۰}\frac{۱f(x+h)-۰}{۱}=\lim_{h\to ۰}f(x+h)=f(x)$$

۴ـ (۱)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\int_{۰}^{۲x}\text{Arctan}\frac{t}{۲}\,dt}{x^{۲}}=\frac{۰}{۰}\overset{HOP}{\Rightarrow}\lim_{x\to ۰}\frac{۲\text{Arctan}x}{۲x}=۱$$

۵ـ (۴)

$$A\left|\begin{matrix}۱\\ \sqrt{۵}\end{matrix}\right.$$

$$\int y\,dy=\int x\,dx \quad \Rightarrow\frac{y^{۲}}{۲}=\frac{x^{۲}}{۲}+c \quad \Rightarrow \quad \frac{۵}{۲}=\frac{۱}{۲}+c\Rightarrow c=۲ \quad \Rightarrow\frac{y^{۲}}{۲}=\frac{x^{۲}}{۲}+۲\Rightarrow y^{۲}=x^{۲}+۴$$

۶ـ (۱)

$$f'(x)=e^{-\frac{x^{۲}}{۲}}(۱-x^{۲})=۰ \quad \Rightarrow x=\pm ۱$$

x		-۱		$+۱$	
f'	$-$	۰	$+$	۰	$-$
	↘		↗		↘
			Max نسبی		

۷ـ (۳)

$$\int f(x)dx=\frac{۲}{۳}x\sqrt{x}\overset{\text{مشتق می‌گیریم}}{\Rightarrow}f(x)=\frac{۲}{۳}\left(\sqrt{x}+x\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)$$

$$f(x)=\sqrt{x} \quad \Rightarrow y=f\left(\frac{۱}{x^{۲}}\right)=\frac{۱}{x} \quad \Rightarrow y'=\frac{-۱}{x^{۲}}$$

۸ـ (۴)

$$f'(x)=\frac{۲}{۲\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})^{۲}-\left(\frac{-۱}{x^{۲}}\right)\cos\left(\frac{۱}{x}\right)^{۲}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\cos x+\frac{۱}{x^{۲}}\cos\frac{۱}{x^{۲}}$$

۹ـ (۴)

$$(xf'(x)-f(x))'=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=xf''(x)$$

روش دوم: استفاده از روش جزء به جزء

۱۰ـ (۲)

$$A\left|\begin{matrix}e\\ ۰\end{matrix}\right. \quad \Rightarrow \int_{e}^{x}\frac{Lnt}{t}\,dt \quad \Rightarrow x=e \quad ,F(x)=\int_{e}^{x}\frac{Lnt}{t}\,dt\Rightarrow F'(x)=\frac{Lnx}{x}$$

$$A'\left|\begin{matrix}۰\\ e\end{matrix}\right.$$

$$(F^{-۱})'(b)=\frac{۱}{F'(a)} \quad \Rightarrow (F^{-۱})'(۰)=\frac{۱}{F'(e)} \quad \Rightarrow (F^{-۱})'(۰)=\frac{۱}{\frac{Lne}{e}}=e$$

تست ۶:

۱ـ هرگاه $A(x)=\int_{-x}^{x}\frac{dt}{2+t^5}$، حاصل $\lim\limits_{x\to 1}\frac{A(x)-A(1)}{x-1}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{2}{3}$

۲ـ هرگاه حاصل $\int x^4(2x-1)(x-1)^4dx$ به صورت $A(x^2-x)^B+c$ باشد، $A+B$ کدام است؟

۱) $\frac{24}{5}$ ۲) $\frac{26}{5}$ ۳) ۶ ۴) ۵

۳ـ هرگاه $F(x)=\int_{1}^{x}\frac{dt}{1+\sqrt[3]{t}}$، مشتق $y=F(x^3)$ در $x=2$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۴ـ حاصل $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 8x\lfloor \sin x+\cos x\rfloor dx$ برابر است با:

۱) π^2 ۲) $2\pi^2$ ۳) $3\pi^2$ ۴) $4\pi^2$

۵ـ مقدار $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\lfloor \tan x\rfloor \sin x dx$ چقدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

۶ـ مقدار $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}(\cos x-\lfloor \cos x\rfloor)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{6}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{4}$

۷ـ هرگاه $F(x)=\int\frac{dx}{x^2+2x+5}$، آنگاه حاصل $F(1)-F(-1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{8}$

۸ـ حاصل $\int(a+b\tan^2x)dx$ کدام است؟

۱) $(a-b)\tan x+c$ ۲) $(a-b)x+b\tan x+c$ ۳) $(a+b)\tan x+c$ ۴) $(a-b)x+\tan x+c$

۹ـ حاصل $\int\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}dx$ کدام است؟ $(x\neq k\pi-\frac{\pi}{4})$

۱) $-\sin x+\cos x+c$ ۲) $-\sin x-\cos x+c$

۳) $\sin x-\cos x+c$ ۴) $\sin x+\cos x+c$

۱۰ـ هرگاه $f'(\cos^2x)=\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}$ باشد و $f(1)=2$ باشد، آنگاه مقدار $f(0)$ چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰ ۴) ۱-

۱ـ (۲) $\lim_{x\to ۱} \frac{A(x)-A(۱)}{x-۱} = A'(۱) \Rightarrow A'(x) = \frac{۱}{۲+x^۵} + \frac{۱}{۲-x^۵} \Rightarrow A'(۱) = \frac{۱}{۳} + ۱ = \frac{۴}{۳}$

۲ـ (۲) $\int (x^۲-x)^۴(۲x-۱)dx = \int u^۴ u' dx = \int u^۴ du = \frac{u^۵}{۵} + c$

$= \frac{(x^۲-x)^۵}{۵} + c = A(x^۲-x)^۵ + c \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{۱}{۵} \\ B = ۵ \end{cases} \Rightarrow A + B = \frac{۲۶}{۵}$

۳ـ (۴) $y = F(x^۳) \Rightarrow y' = ۳x^۲ F'(x^۳), F'(x) = \frac{۱}{۱+\sqrt[۳]{x}} \Rightarrow y' = ۳x^۲ \times \frac{۱}{۱+\sqrt[۳]{x^۳}} = \frac{۳x^۲}{۱+x}$

$y'(۲) = \frac{۱۲}{۳} = ۴$

۴ـ (۱) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} ۸x \lfloor \sin x + \cos x \rfloor dx = \int_{۰}^{\sqrt{۲}} ۸x \times ۱ dx = ۴x^۲ \Big]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = \pi^۲$

$۰ \le x \le \frac{\pi}{۲} \Rightarrow ۰ \le \sin x + \cos x \le \sqrt{۲}$

۵ـ (۴) $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۳}} \lfloor \tan x \rfloor \sin x dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}} ۰ \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}} ۱ \sin x dx = ۰ - \cos x \Big]_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۳}} = (-\frac{۱}{۲}) - (-\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = \frac{\sqrt{۲}-۱}{۲}$

۶ـ (۲) $\int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{۵\pi}{۶}} (\cos x - \lfloor \cos x \rfloor) dx = \int_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}} (\cos x - ۰) dx + \int_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۵\pi}{۶}} (\cos x + ۱) dx$

$= \sin x \Big]_{\frac{\pi}{۶}}^{\frac{\pi}{۲}} + (\sin x + x)\Big]_{\frac{\pi}{۲}}^{\frac{۵\pi}{۶}} = \frac{۱}{۲} + \left[(\frac{۱}{۲} + \frac{۵\pi}{۶}) - (۱ + \frac{\pi}{۲}) \right] = \frac{\pi}{۳}$

۷ـ (۴) $F(x) = \int \frac{dx}{۴+(x+۱)^۲} = \frac{۱}{۲} \text{Arctan}\frac{x+۱}{۲} \Rightarrow F(۱) - F(-۱) = \frac{\pi}{۸} - ۰ = \frac{\pi}{۸}$

۸ـ (۲) $\int adx + b\int \tan^۲ x dx = ax + b\int(\tan^۲ x + ۱ - ۱) dx = ax + b\tan x - bx + c = (a-b)x + b\tan x + c$

۹ـ (۴) $\int \frac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\cos x + \sin x} dx = \int (\cos x - \sin x) dx = \sin x + \cos x + c$

۱۰ـ (۲) $f'(\cos^۲ x) = \cos ۲x \Rightarrow f'(\cos^۲ x) = ۲\cos^۲ x - ۱ \Rightarrow f'(x) = ۲x - ۱$

$f(x) = \int f'(x) dx = x^۲ - x + c \overset{f(۱)=۲}{\Rightarrow} ۲ = ۱ - ۱ + c \Rightarrow c = ۲ \Rightarrow f(x) = x^۲ - x + ۲ \Rightarrow f(۰) = ۲$

تست ۷:

۱ـ حاصل $\int \frac{(x^2+2x)}{(x+1)^2}dx$ کدام است؟

۱) $\frac{x}{x+1}+c$ ۲) $\frac{2x}{x+1}+c$ ۳) $\frac{1}{x+1}+c$ ۴) $\frac{x^2}{x+1}+c$

۲ـ $\int \sin x \sin(\cos x)dx$ برابر است با:

۱) $\sin(\cos x)+c$ ۲) $\sin(\sin x)+c$ ۳) $\cos(\cos x)+c$ ۴) $\cos(\sin x)+c$

۳ـ یکی از تابع اولیه‌های تابع $y=(x+\sqrt{x^2+1})^2$ برابر است با:

۱) $\frac{(x+\sqrt{x^2+1})^3}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}x^3+x+\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

۳) $\frac{2}{3}x^3+x+\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$ ۴) $\sqrt{x^2+1}+\frac{2}{3}x^3$

۴ـ مقدار $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ برابر است با:

۱) $\text{Arctan}\sqrt{x}+c$ ۲) $2\text{Arctan}\sqrt{x}+c$ ۳) $\text{Arctan}\frac{\sqrt{x}}{2}+c$ ۴) $\text{Arctan}2\sqrt{x}+c$

۵ـ هرگاه $\int f(x)\,dx=x^2-1$، حاصل $\int \cos x\, f(\sin x)\,dx$ برابر است با:

۱) $\cos^2x+c$ ۲) $-\cos^2x+c$ ۳) $-\sin^2x+c$ ۴) $\cos 2x+c$

۶ـ حاصل $\int \frac{dx}{\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$ برابر است با:

۱) $\sqrt{1+\sqrt{x}}+c$ ۲) $2\sqrt{1+\sqrt{x}}$ ۳) $\frac{1}{4}\sqrt{1+\sqrt{x}}+c$ ۴) $4\sqrt{1+\sqrt{x}}+c$

۷ـ هرگاه $\int f(\frac{x}{2})\,dx=2x^3+c$، حاصل $\int f(2x)\,dx$ کدام است؟

۱) $32x^3+c'$ ۲) $16x^3+c'$ ۳) $\frac{1}{4}x^3+c'$ ۴) $64x^3+c'$

۸ـ هرگاه $\int \frac{2\sin^3x}{1+\cos x}dx=f(x)\cos x+c$، آنگاه $f(x)$ کدام است؟

۱) $-2+\cos x$ ۲) $\cos x+2$ ۳) $\sin x+1$ ۴) $1-\sin x$

۹ـ هرگاه $f(x)=f(a-x)$، حاصل $\int_0^a xf(x)dx$ برابر است با:

۱) 0 ۲) $a\int_0^a f(x)dx$ ۳) $\frac{a}{2}\int_0^a f(x)dx$ ۴) $2a\int_0^a xf(x)dx$

۱۰ـ حاصل $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ کدام است؟

۱) $2\text{Ln}(1+\sqrt{x})$ ۲) $\text{Ln}(x+\sqrt{x})$ ۳) $\text{Ln}(x+\sqrt{x})^2$ ۴) $\frac{1}{2}\text{Ln}(x+\sqrt{x})$

۱ـ (۴) $\int \frac{(x+1)^{2}-1}{(x+1)^{2}}dx=\int (1-(x+1)^{-2})dx=x-\frac{(x+1)^{-1}}{-1}+c=$

$=x+\frac{1}{x+1}+c=x-1+\frac{1}{x+1}+c+1=\frac{x^{2}}{x+1}+c'$

۲ـ (۳) $\int \sin x.\sin(\cos x)dx=-\int -\sin x\sin(\cos x)dx=-\int u'\sin u dx$

$=-\int u'\sin u dx=-\int \sin u\, du=\cos u+c=\cos(\cos x)+c$

۳ـ (۳) $\int (2x^{2}+1+2x\sqrt{x^{2}+1})dx=\frac{2x^{3}}{3}+x+\int 2x\sqrt{x^{2}+1}dx=\frac{2x^{3}}{3}+x+\int u'\sqrt{u}dx=$

$=\frac{2x^{3}}{3}+x+\int \sqrt{u}du=\frac{2x^{3}}{3}+x+\frac{2}{3}(x^{2}+1)^{\frac{3}{2}}+c$

۴ـ (۲) $2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+(\sqrt{x})^{2}}dx=2\int \frac{u'}{1+u^{2}}dx=2\text{Arctan}u+c=2\text{Arctan}\sqrt{x}+c$

۵ـ (۲) $\int f(x)dx=x^{2}-1 \xrightarrow{\text{x را به sinx تبدیل می‌کنیم.}} \int f(\sin x)d(\sin x)=\sin^{2}x-1$

$=\int \cos x f(\sin x)dx=-\cos^{2}x+c$

۶ـ (۴) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}=2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}dx=2\int \frac{u'}{\sqrt{u}}dx=4\int \frac{du}{2\sqrt{u}}=4\sqrt{u}+c=4\sqrt{1+\sqrt{x}}+c$

۷ـ (۱) $\int f(\frac{x}{2})dx=2x^{3}+c \xrightarrow{\text{x را به 4x تبدیل می‌کنیم.}} \int f(\frac{4x}{2})d(4x)=2(4x)^{3}+c$

$4\int f(2x)dx=2(64x^{3})+c \Rightarrow \int f(2x)dx=32x^{3}+c$

۸ـ (۱) $\int \frac{2\sin x(1-\cos^{2}x)}{1+\cos x}dx=\int 2\sin x(1-\cos x)dx=2\int \sin x dx-2\int \sin x\cos x dx$

$=-2\cos x+\cos^{2}x+c=\cos x\underbrace{(-2+\cos x)}_{f(x)}+c$

۹ـ (۳) فرض می‌کنیم $I=\int_{0}^{a} xf(x)dx$، در این تساوی x را به a − x تبدیل می‌کنیم، حدود انتگرالگیری نیز عوض می‌شود.

$I=\int_{a}^{0}(a-x)f(a-x)d(a-x)=\int_{a}^{0}(a-x)f(x)(-dx)=\int_{0}^{a}(a-x)f(x)dx$

$=a\int_{0}^{a}f(x)dx-\int_{0}^{a}xf(x)dx \Rightarrow I=a\int_{0}^{a}f(x)dx-I \Rightarrow 2I=a\int_{0}^{a}f(x)dx \Rightarrow I=\frac{a}{2}\int_{0}^{a}f(x)dx$

۱۰ـ (۱) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}=2\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}dx=2\int \frac{u'}{u}dx=2\text{Ln}(1+\sqrt{x})+c$

تست ۸:

۱ـ هرگاه $m < 0 < n$، در این صورت، $\int_m^n \frac{\lfloor x \rfloor}{x} dx$ برابر است با:

۱) $|m| - |n|$ ۲) $-|m-n|$ ۳) $|n| - |m|$ ۴) $|n| + |m|$

۲ـ حاصل $\lim_{x \to 0} \frac{\int_{2x}^{3x} \sin t dt}{\int_1^{\cos x} t dt}$ برابر است با:

۱) -1 ۲) -5 ۳) 4 ۴) 5

۳ـ حاصل $\int_0^2 Max\{1, x\} dx$ کدام است؟

۱) 2 ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) 3

۴ـ هرگاه $f(x) = \begin{cases} x^2 & , (0 \le x \le 1) \\ 2-x & , (1 < x \le 2) \end{cases}$ باشد $\int_0^2 f(x) dx$ برابر است با:

۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $\frac{5}{12}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۵ـ انتگرال معین $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - \cos x| dx$ کدام است؟

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) 0 ۴) $2\sqrt{2} - 2$

۶ـ مقدار $\int_1^2 \lfloor x^2 \rfloor dx$ برابر است با:

۱) $6 - \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ۲) 1 ۳) $4 - \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ۴) $5 - \sqrt{3} - \sqrt{2}$

۷ـ هرگاه $\int_{1-m}^{3m-7} \text{Arctan}x \, dx = 0$، m کدام است؟

۱) $m = 1$ ۲) $m = \frac{7}{3}$ ۳) $m = 3$ ۴) $m = 4$

۸ـ هرگاه $\int_{-1}^{4} f(x) dx = 4$ و $\int_2^4 f(x) dx = -1$، حاصل $\int_2^{-1} f(x) dx$ برابر است با:

۱) 5 ۲) -5 ۳) 3 ۴) -3

۹ـ حاصل $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \lfloor x \rfloor \cos 2x dx$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \sin 2)$ ۲) $\frac{1}{2}(-\frac{1}{2} - \sin 2)$ ۳) $\frac{1}{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2)$ ۴) $\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 2)$

۱۰ـ حاصل $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) dx$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) π ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) 2π

۱ـ (۳)

$$m < ۰ < n \Rightarrow \begin{cases} m < ۰ \\ n > ۰ \end{cases} \Rightarrow \int_m^n \frac{|x|}{x}dx = \int_m^۰ (-۱)\,dx + \int_۰^n ۱dx$$

$$= (-۱)(۰ - m) + ۱(n - ۰) = m + n = -|m| + |n| = |n| - |m|$$

۲ـ (۲)

$$\frac{۰}{۰} \overset{HOP}{\Rightarrow} \lim_{x \to ۰} \frac{۳\sin ۳x - ۲\sin ۲x}{-\sin x \,.\, \cos x} = \frac{۰}{۰} \Rightarrow \sim \lim_{x \to ۰} \frac{۹x - ۴x}{-x \times ۱} = -۵$$

۳ـ (۳)

$$\int_۰^۱ \text{Max}\{۱, x\}dx + \int_۱^۲ \text{Max}\{۱, x\}dx = \int_۰^۱ ۱dx + \int_۱^۲ xdx = ۱(۱ - ۰) + \frac{x^۲}{۲}\Big]_۱^۲ = ۱ + (۲ - \frac{۱}{۲}) = \frac{۵}{۲}$$

۴ـ (۱)

$$\int_۰^۲ f(x)dx = \int_۰^۱ x^۲dx + \int_۱^۲ (۲ - x)dx = \frac{x^۳}{۳}\Big]_۰^۱ + (۲x - \frac{۱}{۲}x^۲)\Big]_۱^۲ = \frac{۵}{۶}$$

۵ـ (۴)

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۴}} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} (\sin x - \cos x)\,dx = \sin x + \cos x\Big]_۰^{\frac{\pi}{۴}} + (-\cos x - \sin x)\Big]_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$= (\sqrt{۲} - ۱) + (-۱ + \sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲} - ۲$$

۶ـ (۴)

$$\int_۱^۲ \lfloor x^۲ \rfloor\, dx = \int_۱^{\sqrt{۲}} ۱dx + \int_{\sqrt{۲}}^{\sqrt{۳}} ۲dx + \int_{\sqrt{۳}}^۲ ۳dx = ۱(\sqrt{۲} - ۱) + ۲(\sqrt{۳} - \sqrt{۲}) + ۳(۲ - \sqrt{۳})$$

$$= ۵ - \sqrt{۳} - \sqrt{۲}$$

۷ـ (۳) ***یادآوری:*** (تابع فرد و انتگرالپذیر) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = ۰$، چون $f(x) = \text{Arctan}x$ تابعی فرد است لذا:

$۱ - m + ۳m - ۷ = ۰$ و بنابراین: $m = ۳$

۸ـ (۲)

$$\int_۲^{-۱} f(x)\,dx = \int_۲^۴ f(x)\,dx + \int_۴^{-۱} f(x)\,dx = -۱ - ۴ = -۵$$

۹ـ (۴)

$$\int_{\frac{\pi}{۴}}^۱ ۰\cos ۲x dx + \int_۱^{\frac{\pi}{۳}} \cos ۲x\, dx = ۰ + \frac{۱}{۲}\sin ۲x\Big]_۱^{\frac{\pi}{۳}} = \frac{۱}{۲}(\frac{\sqrt{۳}}{۲} - \sin ۲)$$

۱۰ـ (۲)

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} ۲\sin^۲ x dx + ۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۲ x dx = ۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} (\sin^۲ x + \cos^۲ x)\,dx = ۲\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} dx = \pi$$

آنکه خود را خردمندتر از همه می‌داند، از همه نادان‌تر است.　«کولستون»

تست ۹:

۱ـ معادله‌ی مشتق تابعی در هر نقطه از آن به صورت $\frac{y^2}{\sin^2 x}$ می‌باشد، هرگاه $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ باشد، $f(\frac{\pi}{3})$ کدام است؟

۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{2}{3}$

۲ـ هرگاه $\int f'(\frac{x}{2})\,dx = (k-1)\, 2f(\frac{x}{2})$، مقدار k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳ـ هرگاه $f'(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ و $g'(x) = \frac{-4}{x+1}$ باشند، حاصل $2f(x) + g(x)$ کدام است؟

۱) $2x^2 + x + c$ ۲) $x^2 + 2x + c$ ۳) $x^2 - x + c$ ۴) $x^2 - 2x + c$

۴ـ هرگاه $\int f(x)\,dx = \frac{x^4}{4} + c$، حاصل $\int f^{-1}(x)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ ۲) $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$ ۳) $\frac{x^3}{3}$ ۴) $2x^2$

۵ـ ضریب زاویه‌ی خط مماس بر منحنی تابع $y = f(x)$ در هر نقطه‌ی (x,y) واقع بر آن، معکوس عرض آن نقطه است، اگر نمودار تابع از نقطه‌ی $(1,2)$ بگذرد، معادله‌ی آن کدام است؟

۱) $y^2 = 4x$ ۲) $y^2 = x + 3$ ۳) $y^2 = 2(x+1)$ ۴) $y^2 = 3x + 1$

۶ـ حاصل $\int (2xy\,dx + x^2 dy)$ کدام است؟

۱) $x^2y + \frac{x^3}{3} + c$ ۲) $x^2y + c$ ۳) $xy^2 + c$ ۴) $x^2y^2 + \frac{x^3}{3} + c$

۷ـ هرگاه $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \frac{4}{3}\sqrt{x-2}\,f(x) + c$ باشد، آنگاه $f(0)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) -1 ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) ۲

۸ـ حاصل $\int \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x}$ کدام است؟

۱) $\text{Arccos}(\sin x) + c$ ۲) $\text{Arctan}(\cos x) + c$ ۳) $\text{Arcsin}(\cos x)$ ۴) $\text{Arctan}(\sin x) + c$

۹ـ در یک منحنی $y'' = 6x$ و خط $y = 5x - 1$، در نقطه‌ای به طول ۲، بر منحنی مماس است، معادله‌ی منحنی، کدام است؟

۱) $y = x^3 - 7x + 15$ ۲) $y = x^3 + 1$ ۳) $y = x^3 - 5x$ ۴) $y = x^3 + 5x$

۱۰ـ هرگاه $f(x) = \begin{cases} -1 & ,(x \geq 0) \\ -x & ,(x < 0) \end{cases}$، آنگاه حاصل $\int_{-k}^{k} f(x)dx$ کدام است؟ $(k > 0)$

۱) $\frac{k^2}{2}$ ۲) $\frac{k^2+2k}{2}$ ۳) $\frac{k^2-2k}{2}$ ۴) $\frac{k^2-1}{2}$

۱ـ (۱) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^{۲}}{\sin^{۲}x} \Rightarrow \frac{dy}{y^{۲}}=\frac{dx}{\sin^{۲}x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y^{۲}}=\int\frac{dx}{\sin^{۲}x}\Rightarrow -\frac{۱}{y}=-\cot x+c \overset{(\frac{\pi}{۴},۱)}{\Rightarrow} -۱=-۱+c\Rightarrow c=۰$

$\Rightarrow \frac{۱}{y}=\cot x \Rightarrow f(x)=\tan x\Rightarrow f(\frac{\pi}{۳})=\sqrt{۳}$

۲ـ (۲) $۲f(\frac{x}{۲})=۲(k-۱)\int f'(\frac{x}{۲})d(\frac{x}{۲}) \Rightarrow f(\frac{x}{۲})=(k-۱)\int f'(\frac{x}{۲})d(\frac{x}{۲})$

$\frac{x}{۲}=t \Rightarrow f(t)=(k-۱)\int f'(t)dt \overset{\text{مشتق می‌گیریم}}{\Rightarrow} f'(t)=(k-۱)f'(t) \Rightarrow k-۱=۱ \Rightarrow k=۲$

۳ـ (۴) $۲f'(x)+g'(x)=\frac{۲x^{۲}+۲-۴}{x+۱}=\frac{۲x^{۲}-۲}{x+۱}=۲(x-۱)=۲x-۲\Rightarrow\int(۲f'(x)+g'(x))dx=\int(۲x-۲)dx$

$\Rightarrow ۲f(x)+g(x)=x^{۲}-۲x+c$

۴ـ (۲) $\int f(x)dx=\frac{x^{۴}}{۴}+c \overset{\text{مشتق می‌گیریم}}{\Rightarrow} f(x)=x^{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}\Rightarrow \int f^{-۱}(x)dx=\int x^{\frac{۱}{۳}}dx=\frac{۳}{۴}\sqrt[۳]{x^{۴}}=\frac{۳}{۴}x\sqrt[۳]{x}$

۵ـ (۳) $y'=\frac{۱}{y}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{y}\Rightarrow\int y\,dy=\int dx\Rightarrow\frac{y^{۲}}{۲}=x+c \overset{A(۱,۲)}{\Rightarrow} ۲=۱+c\Rightarrow c=۱\Rightarrow y^{۲}=۲(x+۱)$

۶ـ (۲) $\int(۲xy\,dx+x^{۲}dy)=\int d(x^{۲}y)=x^{۲}y+c$

توجه کنید که چون هیچکدام از xو y، ثابت نیستند، لذا نمی‌توان از جملات ۲xydx و $x^{۲}dy$ جداگانه انتگرال گرفت.

۷ـ (۱) $\int\frac{۲x-۱}{\sqrt{x-۲}}dx=\int\frac{۲(x-۲)+۳}{(x-۲)^{\frac{۱}{۲}}}dx=۲\int(x-۲)^{\frac{۱}{۲}}dx+۳\int(x-۲)^{-\frac{۱}{۲}}dx=\frac{۴}{۳}(x-۲)^{\frac{۳}{۲}}+۶(x-۲)^{\frac{۱}{۲}}+c$

$=\frac{۴}{۳}(x-۲)^{\frac{۱}{۲}}(x-۲+\frac{۹}{۲})+c=\frac{۴}{۳}\sqrt{x-۲}\underbrace{(x-۲+\frac{۹}{۲})}_{f(x)}+c\Rightarrow f(x)=x-۲+\frac{۹}{۲}\Rightarrow f(۰)=\frac{۵}{۲}$

۸ـ (۴) $\int\frac{\cos x}{۲-\cos^{۲}x}dx=\int\frac{\cos x}{۲-(۱-\sin^{۲}x)}dx=\int\frac{\cos x}{۱+\sin^{۲}x}dx=\text{Arctan}(\sin x)+c$

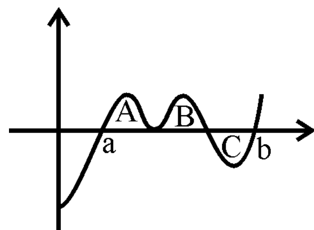
۹ـ (۱) $y''=۶x\Rightarrow y'=\int y''dx=۳x^{۲}+c \overset{f'(۲)=۵}{\Rightarrow} ۵=۳(۲)^{۲}+c\Rightarrow c=-۷\Rightarrow y'=۳x^{۲}-۷$

$\Rightarrow y=\int y'dx=x^{۳}-۷x+c' \quad ,y=۵x-۱ \overset{x=۲}{\Rightarrow} y=۹ \Rightarrow y=x^{۳}-۷x+c' \overset{(۲,۹)}{\Rightarrow} ۹=۸-۱۴+c'\Rightarrow$

$c'=۱۵\Rightarrow y=x^{۳}-۷x+۱۵$

۱۰ـ (۳) $\int_{-k}^{k}f(x)dx=\int_{-k}^{۰}(-x)dx+\int_{۰}^{k}(-۱)dx=\frac{-x^{۲}}{۲}\Big]_{-k}^{۰}+(-۱)(k-۰)=(۰+\frac{k^{۲}}{۲})-k=\frac{k^{۲}-۲k}{۲}$

تست ۱۰:

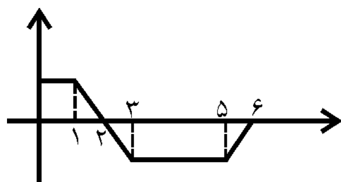


۱ـ با توجه به شکل مقابل، مقدار $\int_a^b f(x)dx$، کدام است؟

۱) $A+B+C$　۲) $C-A-B$

۳) $A+B-C$　۴) $A-B+C$

۲ـ هرگاه نمودار تابع f مطابق شکل مقابل باشد و $F'=f$ و $F(\circ)=\circ$ و $F(x)=\int_\circ^x f(t)dt$، مقدار $F(b)$ به ازاء $b=۵$، چقدر است؟



۱) ۱　۲) ۱-

۳) ۲　۴) ۲-

۳ـ مساحت سطح محصور بین منحنی $y=x^۳+x-۲$ و محورهای مختصات چقدر است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$　۲) $\frac{۴}{۳}$　۳) $\frac{۵}{۴}$　۴) $\frac{۴}{۵}$

۴ـ مساحت بین منحنی $y=x^۲$ و خط $y=mx$ $(m>\circ)$ برابر $\frac{۴}{۳}$ واحد سطح است، مقدار m کدام است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۵ـ مساحت بین دو منحنی $x-y^۲=\circ$ و $y^۲-۲x+۱=\circ$ برابر است با:

۱) $\frac{۲}{۳}$　۲) $\frac{۴}{۳}$　۳) $\frac{۳}{۲}$　۴) $\frac{۳}{۴}$

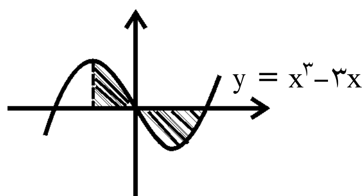
۶ـ مساحت سطح محصور بین منحنی $y=\text{Arccos}x$ و محورهای مختصات و خط $y=\frac{\pi}{۳}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۲}$　۲) $\sqrt{۳}$　۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$　۴) $\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$

۷ـ مساحت سطح محصور به نمودارهای دو تابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$، در بازه‌ی $[\frac{\pi}{۴},\frac{۱۳\pi}{۴}]$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$　۲) $۴\sqrt{۲}$　۳) $۶\sqrt{۲}$　۴) $۸\sqrt{۲}$

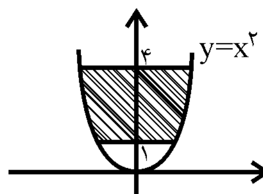
۸ـ مساحت سطح هاشور خورده کدام است؟



۱) $\frac{۱۴}{۴}$　۲) $\frac{۱۴}{۳}$

۳) $\frac{۲۷}{۸}$　۴) $\frac{۱۷}{۶}$

۹ـ مساحت سطح هاشور خورده در شکل مقابل چقدر است؟



۱) $\frac{۱۴}{۳}$　۲) $\frac{۲۸}{۳}$

۳) $\frac{۱۶}{۳}$　۴) $\frac{۳۲}{۳}$

۱۰ـ مساحت بین منحنی $xy=k^۲$ و محور xها و دو خط $x=a$ و $x=b$ چقدر است؟ $(\circ<a<b)$

۱) $k\text{Ln}\frac{b}{a}$　۲) $k^۲\text{Ln}\frac{b}{a}$　۳) $k^۳\text{Ln}\frac{b}{a}$　۴) $\text{Ln}\frac{b}{a}$

۱ـ (۳) $\int_a^b f(x)dx = A+B-C$

۲ـ (۲) $F(x)=\int_۰^x f(t)\,dt \Rightarrow F(۵)=\int_۰^۵ f(t)dt \Rightarrow F(۵)=\int_۰^۲ f(t)dt+\int_۲^۵ f(t)\,dt = s_۱-s_۲=\frac{۳}{۲}-\frac{۵}{۲}=-۱$

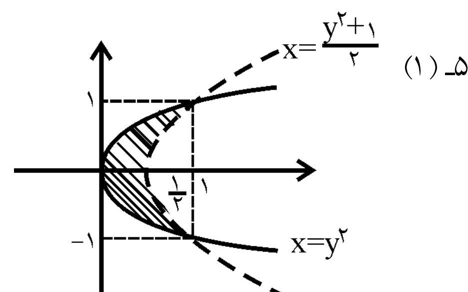
۳ـ (۳) $y=۰ \Rightarrow x^۳+x-۲=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow (x-۱)(x^۲+x+۲)=۰ \Rightarrow x=۱$

$\Rightarrow S=\left|\int_۰^۱ (x^۳+x-۲)dx\right| = \left|\frac{x^۴}{۴}+\frac{x^۲}{۲}-۲x\Big]_۰^۱\right| = \left|\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲}-۲\right| = \frac{۵}{۴}$

۴ـ (۲) $\begin{cases} y=x^۲ \\ y=mx \end{cases} \Rightarrow x^۲-mx=۰ \Rightarrow x=۰\ ,m \Rightarrow S=\left|\int_۰^m (x^۲-mx)\,dx\right| \Rightarrow$

$\frac{۴}{۳}=\left|\frac{x^۳}{۳}-\frac{mx^۲}{۲}\Big]_۰^m\right| \Rightarrow \frac{۴}{۳}=\left|\frac{m^۳}{۳}-\frac{m^۳}{۲}\right| \Rightarrow m=۲$

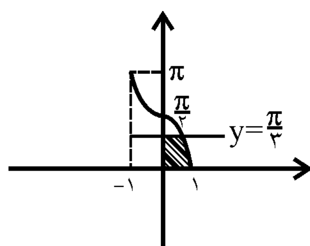
۵ـ (۱) $\begin{cases} y^۲=x \\ y^۲=۲x-۱ \end{cases} \Rightarrow ۲x-۱=x \Rightarrow x=۱ \Rightarrow y=\pm۱$



$\Rightarrow S=\left|\int_c^d (x_۲-x_۱)\,dy\right| = \left|\int_{-۱}^۱ (\frac{y^۲+۱}{۲}-y^۲)dy\right|$

$=۲\left|\int_۰^۱ (\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}y^۲)dy\right| = ۲\left|\frac{۱}{۲}y-\frac{۱}{۶}y^۳\Big]_۰^۱\right| = \frac{۲}{۳}$

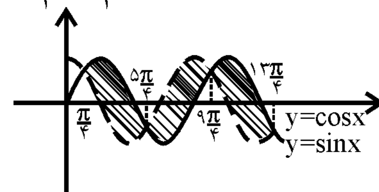
۶ـ (۳) کافی است مساحت سطح بین $x = \cos y$ و محور yها را، از $y = ۰$ تا $y = \frac{\pi}{۳}$ پیدا کنیم.



$\Rightarrow S=\left|\int_۰^{\frac{\pi}{۳}} \cos y\,dy\right| = \sin y\Big]_۰^{\frac{\pi}{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۷ـ (۳) $\begin{cases} y=\sin x \\ y=\cos x \end{cases} \Rightarrow \sin x=\cos x \Rightarrow \tan x=۱ \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۴} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴},\frac{۹\pi}{۴},\frac{۱۳\pi}{۴}$

$S=۳\left|\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۵\pi}{۴}} (\sin x-\cos x)dx\right| = ۳\left|-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{۵\pi}{۴}}\right| = ۶\sqrt{۲}$



۸ـ (۳) $y=x^۳-۳x=۰ \Rightarrow x=۰\ ,\pm\sqrt{۳} \overset{\text{با توجه به شکل}}{\Rightarrow} S=\frac{۳}{۲}\left|\int_۰^{\sqrt{۳}} (x^۳-۳x)dx\right|$

$=\frac{۳}{۲}\left|\frac{x^۴}{۴}-\frac{۳x^۲}{۲}\Big]_۰^{\sqrt{۳}}\right| = \frac{۳}{۲}\times\frac{۹}{۴}=\frac{۲۷}{۸}$

۹ـ (۲) $S=۲\left|\int_۱^۴ x\,dy\right| = ۲\left|\int_۱^۴ \sqrt{y}\,dy\right| = \frac{۴}{۳}\sqrt{y^۳}\Big]_۱^۴ = \frac{۴}{۳}(۸-۱)=\frac{۲۸}{۳}$

۱۰ـ (۲) $xy=k^۲ \Rightarrow y=\frac{k^۲}{x} \Rightarrow S=\int_a^b \frac{k^۲}{x}dx = k^۲ \mathrm{Ln}\, x\Big]_a^b = k^۲ \mathrm{Ln}\frac{b}{a}$

تست ۱۱:

۱ـ حاصل $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{9\pi}{2}$ ۲) $\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\frac{9\pi}{4}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

۲ـ حاصل $\int_{-4}^{4} (5+\sqrt{16-x^2})dx$ برابر است با:

۱) $20+8\pi$ ۲) $20+4\pi$ ۳) $40+8\pi$ ۴) $40+4\pi$

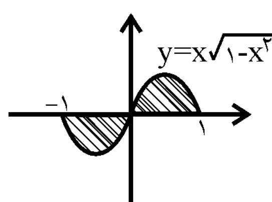
۳ـ سطح محصور بین $y=\sqrt{x}$ و نیمساز نواحی اول و سوم چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۴ـ مساحت بین منحنی $y=x(x+1)(x+2)$ و محور xها چقدر است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۰

۵ـ مساحت سطح هاشور خورده، کدام است؟

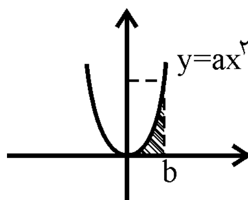


۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{4}{3}$

۶ـ سطح بین منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ و محورهای مختصات چقدر است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۷ـ با توجه به شکل مقابل، مساحت ناحیه‌ی هاشور خورده، چه کسری از مساحت مستطیل است؟



۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۸ـ مساحت حلقه‌ی $y^2=x^2-x^4$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۹ـ بیضی $16x^2+9y^2=144$ را حول قطر کوچکتر خود دوران داده‌ایم، حجم حاصل چقدر است؟

۱) $\frac{48}{\pi}$ ۲) 64π ۳) 16π ۴) $\frac{44\pi}{3}$

۱۰ـ حجم جسم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی به معادله‌ی $y=\sqrt{\frac{x}{1+\sqrt{x+1}}}$ و محور xها و خطوط $x=0$ و $x=3$، حول محور xها چقدر است؟

۱) $\frac{7\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{17\pi}{3}$ ۴) $\frac{5\pi}{3}$

۱ـ (۳) معادله‌ی $f(x)=\sqrt{9-x^2}$، معادله‌ی یک نیمدایره به مرکز (۰ و ۰) و به شعاع ۳ است.

$y=\sqrt{9-x^2} \Rightarrow y^2=9-x^2 \Rightarrow x^2+y^2=9 \quad ,y\geq 0$

$\int_0^3 \sqrt{9-x^2} =$ مساحت ربع دایره $= \frac{9\pi}{4}$

۲ـ (۳) $\int_{-4}^{4}(5+\sqrt{16-x^2})\,dx = 2\int_0^4 (5+\sqrt{16-x^2})dx$

$=2\int_0^4 5dx + 2\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx = 40+8\pi$

ضمناً با توجه به شکل دیده می‌شود که انتگرال فوق برابر است با مساحت مستطیلی به ابعاد ۴ و ۵، بعلاوهٔ مساحت نیمدایره.

۳ـ (۴) $\begin{cases} y=x \\ y=\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow x=\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=0 \Rightarrow x=0,1$

$S=\left|\int_0^1 (x-\sqrt{x})dx\right| = \left|\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big]_0^1\right| = \frac{1}{6}$

۴ـ (۲) $y=0 \Rightarrow x=0,-1,-2 \Rightarrow S=s_1+s_2=\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+2x)dx + \left|\int_{-1}^{0}(x^3+3x^2+2x)dx\right| = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

۵ـ (۲) $y=x\sqrt{1-x^2}$ تابع فرد است. $\Rightarrow S=2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^1\sqrt{1-x^2}\,.2xdx$

$=\int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}\sqrt{u^3} = \frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\Big]_0^1 = \frac{2}{3}$

۶ـ (۲) $\sqrt{y}=1-\sqrt{x} \Rightarrow y=(1-\sqrt{x})^2 \Rightarrow s=\int_0^1 (1-\sqrt{x})^2 = \int_0^1(1+x-2\sqrt{x})dx=\frac{1}{6}$

۷ـ (۲) مساحت مستطیل $= b\times ab^2 = ab^3$

$S=\int_0^b ax^2dx=\frac{ab^3}{3} \Rightarrow S = \frac{1}{3}\times$ مساحت مستطیل

۸ـ (۳) منحنی نسبت به هر دو محور xها و yها متقارن است، بنابراین: $y=x\sqrt{1-x^2}, y=0 \Rightarrow x=0,1$

$S=4\left|\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx\right| = \frac{4}{3}$

به پاسخ تست (۵) همین صفحه توجه شود.

۹ـ (۲) **یادآوری:** هرگاه بیضی، حول قطر کوچکترش دوران داده شود، داریم:

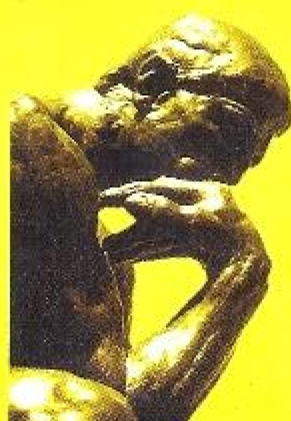
$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

$V=\frac{4}{3}\pi a^2b=\frac{4}{3}\pi(16)(3)=64\pi$

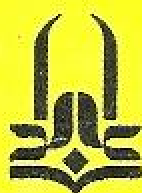
۱۰ـ (۲) $V=\pi\int_0^3 y^2dx=\pi\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}dx=\pi\int_0^3\frac{x(1-\sqrt{x+1})}{1-x-1}dx$

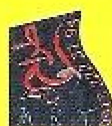
$=\pi\int_0^3 (\sqrt{x+1}-1)\,dx = \pi(\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x\Big]_0^3 = \frac{\pi}{3}$

SUPERIOR COGITATION



By : Ahmad Ali Daraie





ISBN 964-364-397-2
شابک ۲-۳۹۷-۳۶۴-۹۶۴